

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

произведение $16875 = 25 \cdot 675 = 725 \cdot 735 = 27 \cdot 5^4 = 3^3 \cdot 5^4$

Возможны 4 варианта: числа из $7, 5, 3$, $7, 6, 5, 9$,
 $7, 6, 5$, $7, 5, 9$ в любом порядке (!) - все числа
использованы полностью C_4^4

1) $7, 5, 3$

Число $3, 3$ - C_4^3 число $C_2^1 \cdot C_4^3$

2) $7, 6, 5, 9$

число

~~использованы полностью $C_4^4 = \frac{4!}{4!4!} = 70$~~

~~из чисел $3, 6, 9$ можно 3 числа~~

~~$$A_4^3 = \frac{4!}{1!} = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 24$$~~

~~последовательность~~

~~числа 7, 5, 3~~

использованы полностью $C_4^4 = \frac{4!}{4!4!} = 70$

из чисел $3, 6, 9$ можно 3 числа $A_3^3 = \frac{3!}{1!} =$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 9 = 24$$

оставшаяся цифра - не может - C_2^1 вариантов

$$C_2^1 = 2$$

Всего вариантов произведений $9 \cdot 24 \cdot 70 =$

$$= 15120$$

Ответ 15120

$$\cos 2x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 70x - \sin 2x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 70x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 70x = \sqrt{2} (\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x))$$

$$\cos 2x - \sin 2x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 70x$$

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) + \cos(3x - \frac{\pi}{4}) = \cos 70x$$

$$2 \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\left(\frac{x^4}{8^2} \right)^{\log 2} = (-1)^{\log(-x^4)}$$

$$2x^2 - 16 - x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$2x^2 - (x+8)x - x^2 - 9x = 0$$

$$D = (x+8)^2 + 9(x^2+4x) = x^2 + 28x + 64 + 9x^2 + 36x =$$

$$= 10x^2 + 64x + 64 = (3x+8)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{x+8 \pm (3x+8)}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4x+16}{2} \\ x = \frac{-2x-8}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x+8 & \text{I} \\ x = \frac{-x-8}{2} & \text{II} \end{cases}$$

0.03

$$\begin{cases} y > 0 \\ -x > 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y \\ -x = y^2 \end{cases}$$

$$\text{I) } \begin{cases} y = x + 9 \\ y = -x \\ y = x + y \\ x = -y^2 \end{cases} \begin{cases} x = -2 & (-2; 2) \\ y = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 & D = 17; \delta_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = -y^2 \end{cases}$$

$$\text{то } y > 0 \quad y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

$$x = -\frac{2}{9} (17 - 2\sqrt{17}) = \frac{-9 + \sqrt{17}}{9} \quad \text{то } x < 0$$

$$\text{II) } \begin{cases} y = -\frac{x+9}{2} \\ y = -x \\ y^2 = -x \\ y = \frac{-x-9}{2} \end{cases} \begin{cases} x = 9 \\ y = -9 \\ y^2 = -x \\ 2y = y^2 - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = -x \\ y^2 - 2y - 9 = 0; D = 20; \delta_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2}; \delta_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{то } y > 0 \quad y = 1 + \sqrt{5}$$

$$x = -(1 + \sqrt{5})^2$$

$$x \in (-6 - 2\sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$$

$$\text{то } (-2; 2) \cap \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{9}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right) \cap (-6 - 2\sqrt{5}; 1 + \sqrt{5})$$

~5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 22 & \text{I} \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 & \text{II} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |y-x+6| + |x-6+y| = 22 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 5} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{4 \lg 5}{(-x)^{\lg 5}} = (-x)^{\lg(-xy) + \lg 5}$$

$$(-x)^{3 \lg 5} = 5^{2 \lg 5} (-x)^{\lg(-xy) + \lg 5}$$

$$(-x)^{3 \lg 5 - \lg(-xy) - \lg 5} = 5^{2 \lg 5}$$

$$(-x)^{\lg \left(\frac{y^2}{-x}\right)} = 5^{2 \lg 5}$$

$$\lg 5 (\lg(-x) \lg \left(\frac{y^2}{-x}\right) - \lg_{(-x)} y^2) = \lg(-x) + \lg(5)$$

$$\lg 5 (4 - 2 \lg_{(-x)} y^2) = \lg(-x) + \lg(5)$$

$$3 \lg 5 - 2 \lg 5 \lg_{(-x)} y^2 = \lg(-x)$$

$$3 - 2 \lg_{(-x)} y^2 = \lg_5(-x)$$

$$\lg_{(-x)} y^2 = t$$

$$\lg_5(-x) = \frac{3}{t}$$

$$3 - 2t = \frac{3}{t}$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t-1)(t-1) = 0$$

$$\begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\lg_{(-x)} y^2 = 1$$

$$\lg_{(-x)} y^2 = \frac{1}{2}$$

по основанию $(-x)$

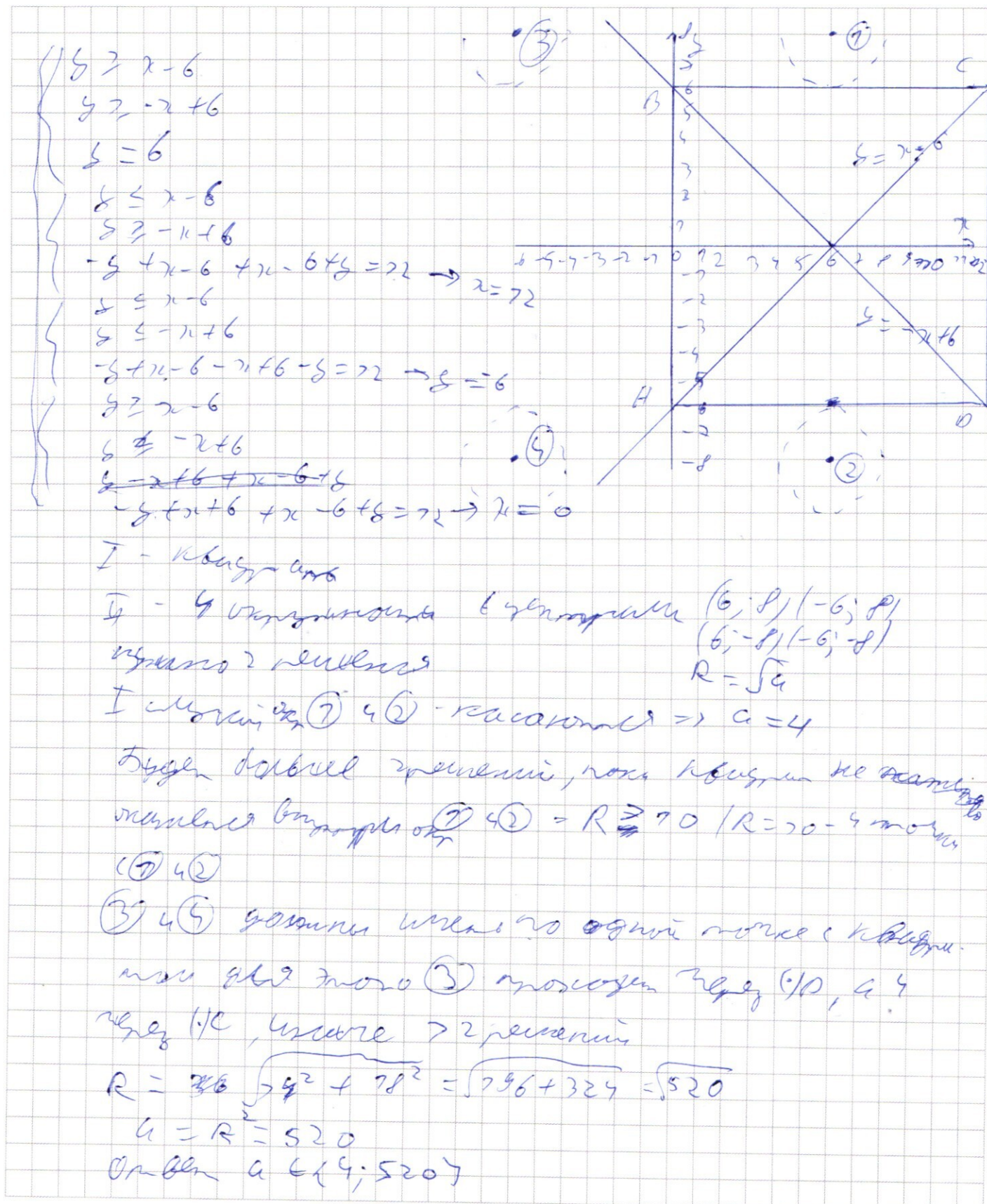
$$\lg_{(-x)} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 5} =$$

$$\lg_{(-x)} (-x)^{\lg(-xy)} = \lg_{(-x)} (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg_{(-x)} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 5} = \lg_{(-x)} (-x)^{\lg(-xy)}$$

тогда

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~4

$$\alpha \perp SO \\ \beta \perp SO \quad | \Rightarrow \alpha \parallel \beta \Rightarrow$$

=> плоскости
английское
математики

$$S_1 = S \\ S_2 = S$$

$$\frac{S_1}{S_2} = K^2 \quad (\text{свойство подобия})$$

$$K = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{FD}{EC} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$$

$$AD \perp SO \quad | \Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow BC \perp SO$$

$$\Rightarrow \angle SAD = \angle SBC \quad | \Rightarrow \frac{SD}{SC} = \frac{AS}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow AB = 2r, \text{ где}$$

$$r - \text{радиус сферы} \Rightarrow \frac{AS}{AS + 2r} = \frac{2}{3}$$

$$AS = 4r$$

~~AD = DK~~ $OK \perp SC$ (радиус перпендикулярен касательной)

$$\sin \angle KSO = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5} \\ \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

$AD = DK$ (как касательные из B)
 $BC = CK$ (одной точки)

$$\sin \angle KSO = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \angle KSO = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

Пускай $AD = 2x$, тогда $BC = 3x$; $KE = 3x$; $DK = 2x$

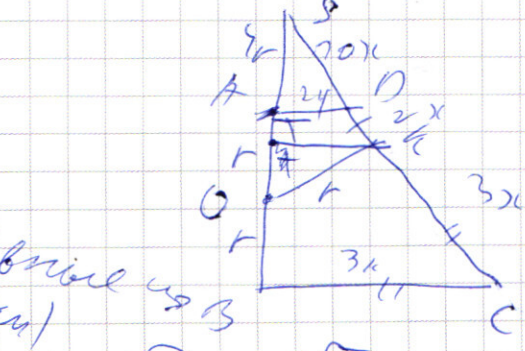
$$\frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$AD = \frac{2}{3} AC = \frac{2}{3} \cdot 5x = \frac{10x}{3}$$

по теореме Пифагора в $\triangle ASD$ $AS^2 + AD^2 = SD^2$

$$76x^2 = 47x^2 + \frac{100x^2}{9} \Rightarrow 700x^2 = 709x^2$$

$$x = r \sqrt{\frac{4}{26}}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2x = r \sqrt{\frac{16}{26}} = AD = \frac{4}{\sqrt{26}} r$$

$$S_K = 72x = \frac{24}{\sqrt{26}} r$$

$$\frac{KTSD}{ADSD} \Rightarrow \frac{KT}{AD} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow \triangle SAK \sim \triangle TKS \quad (\text{I критерий})$$

$$K = \frac{TK}{AD} = \frac{SK}{SD} = \frac{72}{70} = \frac{6}{5}$$

$$TK \perp SD \Rightarrow S_{KMN} = K^2 S_d = \frac{36}{25} \cdot \frac{4}{\sqrt{26}} = \frac{24}{25}$$

$$= \frac{36}{25} \cdot \frac{4}{\sqrt{26}} = \frac{24}{25}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{7}{5}; S_{KMN} = \frac{24}{25}$$

ОКМN — площадь
оттененной
части
(по пропорции
к м, n стороны
данной фигуры)
244

Решение

$$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ACB + \angle CDA = 90^\circ$$

$$\angle ACB = \frac{\widehat{AB}}{2} - \text{вписанный}$$

$$\angle BDA = \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} - \text{полный минус 2 вписанных}$$

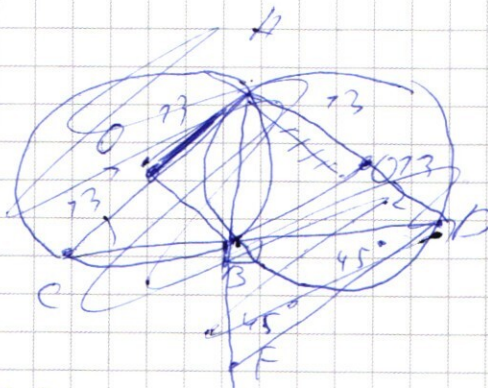
$$90^\circ = \angle ACB + \angle BDA = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2} - \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \widehat{AC} = 180^\circ \Rightarrow O_2$ лежит на AC, аналогично
показываем, что O_2 лежит на AD, тогда

$$AC = AD = 2R; \text{ из симметричности треугольника}$$

получаем, что O_2 — середина AC и AD, тогда

$$= \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} AD$$



~~$BF \perp CD \Rightarrow CB = BF = 23/2$~~ ~~$\Rightarrow$ $\dots$~~

~~$BF = BD$~~

~~$BC = BD = BF = 23/2$~~

~~$CF = 26$~~

~~$\angle ACB$ - вписанный угол на дуге AB~~

~~$\angle ACB = \frac{ABX_1}{2}$, $\angle BDA = \frac{ABX_2}{2}$~~

~~$\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow ABX_1 = ABX_2$~~

~~$(AB - \text{интервал на хорде})$~~

~~$\angle ACF = \angle CDA = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$~~

~~$BF \perp CD$~~

~~$BF \perp \omega_1 \Rightarrow \angle CBT = 90^\circ \Rightarrow CF = 26$~~

~~$BS \perp FD$~~

~~$\frac{5}{2} \cos 2x = \frac{5}{2} \sin x$~~

~~≈ 7~~

~~$\cos(11 - \frac{5}{4})$~~

~~$+ \cos(13) = \frac{5}{4}$~~

~~$\frac{3}{4} \cos 5x = \frac{5}{4} / \cos 2x =$~~

~~$\cos 70^\circ$~~

~~$3^x + 4 \cdot 3^{x/2} \leq 5 \leq 85 + (3^{x/2} - 7)/x$~~

~~$3^x + 4 \cdot 3^{x/2} < 85 + 3^{x/2} - 7/x$~~

~~$3^x + 3^{x/2} / (4 - 7/x + 3^{x/2}) + 4 \cdot 3^{x/2} - 85 < 0$~~

~~при $x < 4$ $3^x + 4 \cdot 3^{x/2} > 85 + (3^{x/2} - 7)/x$~~

~~при $x = 4$ $87 + 4 \cdot 3^{x/2} \geq 85 + 3^{x/2} - 7/x$~~

~~$3^x + 3^{x/2} / (4 - 7/x) + x$~~

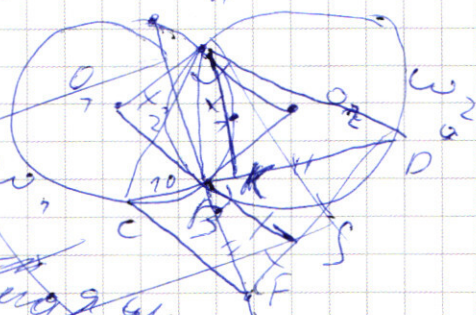
~~$3^x + 4 \cdot 3^{x/2} \leq 5 < 85 + (3^{x/2} - 7)/x$~~

~~$3^x + (4 - 7/x) \cdot 3^{x/2} - 85 + 7/x < 0$~~

~~при $x = 85$ $3^x + (4 - 7/x) \cdot 3^{x/2} - 85 + 7/x = 0$~~

~~при $x < 85$ $\dots$~~

~~при $x > 86$ $\dots$~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5 \leq \alpha \leq 85$ - только возможные
ответы 80

$$\begin{aligned} & \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 70x = \sin 7x + \sin 3x \\ & \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 70x = \sin 7x + \sin 3x \end{aligned}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - 1) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 8x \cos 2x) = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 8x \sin 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 8x \cos 2x) = 2 \sin 5x \cos 2x + \sqrt{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 8x \cos 2x - \cos^2 5x = \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x + \sin^2 5x$$

$$\cos 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) = \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x + \cos 5x)$$

$$\begin{aligned} & \cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 70x \\ & = \sin 7x \cos 4x - \sin 4x (\cos 3x + \sin 3x) \end{aligned}$$

$$\cos 3x (1 - \cos 4x) = \sin 4x$$

$$(\cos 3x - \sin 3x) + \cos 4x (1 - \cos 3x) = \sin 3x = \sqrt{2} \cos 70x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 70x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \cos 8x \cos 2x / (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x) / \\ & (\cos 5x + \sin 5x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 5x = 1 \\ \cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{72} + \frac{2\pi k}{3} \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}$$

тогда $x \in \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{72} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \right\} \quad k \in \mathbb{Z}$

тогда $\triangle ABC$ остроугольный, равнобедренный, $\angle CAD = 90^\circ$
 значит $\angle ACD = \angle CDA = 45^\circ$

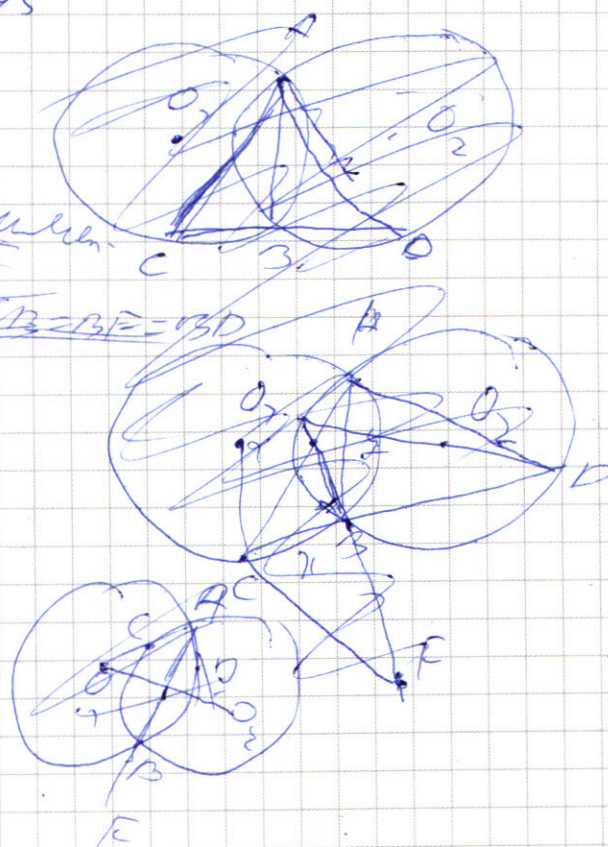
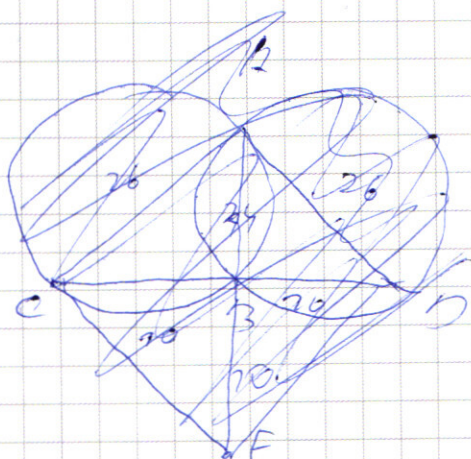
тогда $AC = AD$

$AC = AD = \sqrt{2} \cdot r = \sqrt{2} \cdot \cos \alpha$

тогда $\triangle ABC$ равнобедренный

тогда $OB = OD \Rightarrow CB = CF = CD$

$BF = FD$



Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 150} \\ 150 \\ \hline 787 \\ 775 \\ \hline 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ 5 \\ \hline 12 \\ 15 \\ \hline 25 \\ 25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 27 \\ 276 \\ 7 \\ \hline 75720 \end{array}$$

$$(-76)$$

$$\log(-14) + \log(4)$$

$$C_1 = \frac{P_1}{S_1 S_2} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 20$$

$$\cos 2x + \cos 2y = \sqrt{2} \left(\cos 2x \cos 2y + \sin 2x \sin 2y \right)$$

$$\cos 2x = \cos 2y \cos 2z \quad \cos 2y = \cos 2x \cos 2z$$

$$\cos 2x = \sqrt{2} / \cos 2y \cos 2z$$

$$x + y < 0$$

$$x < 0$$

$$x < -y$$

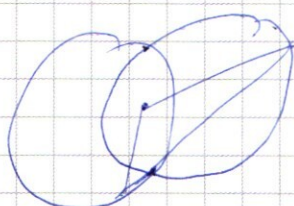
$$\log(1 + 2) \leq 0 \quad x < -2 \quad \log(\log(1) \frac{25}{5^2}) = -$$

$$x < 0$$

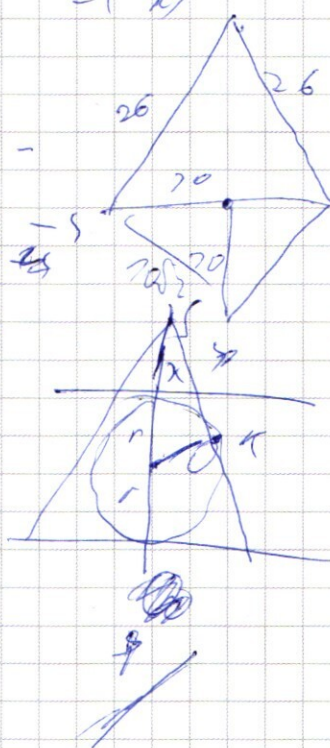
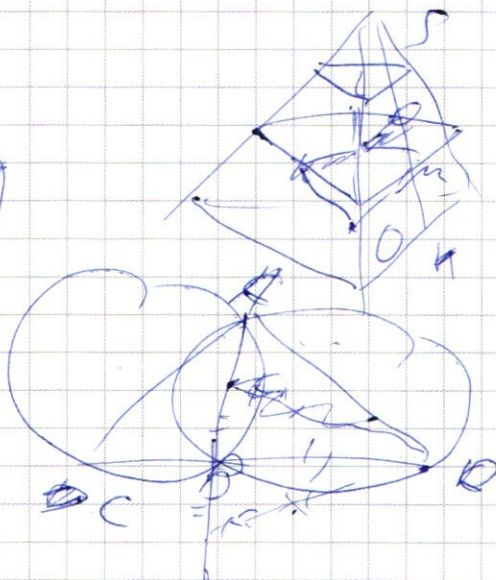
$$\log 20 \cdot \log(-x) \cdot \log(-x)$$

$$-25 = 72$$

$$3x = 6$$



$$\frac{AO}{2} + \frac{AC}{2} = \frac{AB}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

из соображений симметрии

$$CB = BD = BA/3 \quad (\text{так как } \angle BAC = 60^\circ)$$

$$BC = 70 \Rightarrow CF = 70\sqrt{2}$$

$$AT = TB = \sqrt{73^2 - 5^2} = 72$$

$$CF = 70\sqrt{2} = 99$$

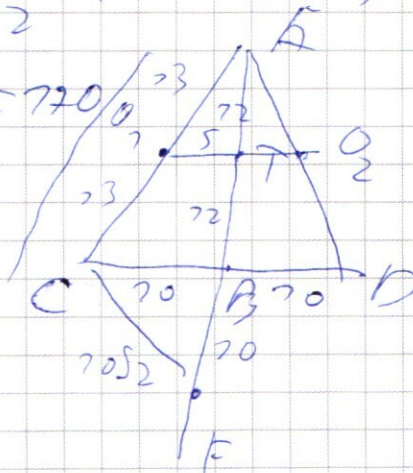
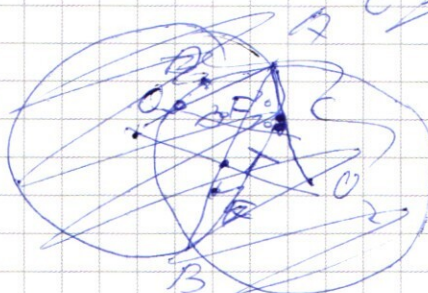
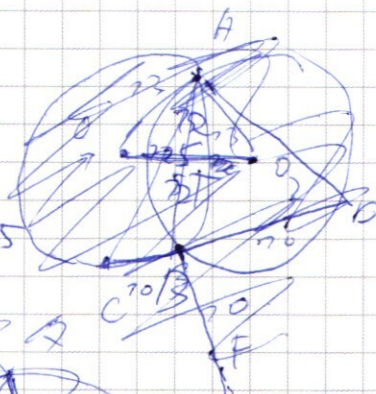
$$AF = 84 \quad 20 + 72 = 92$$

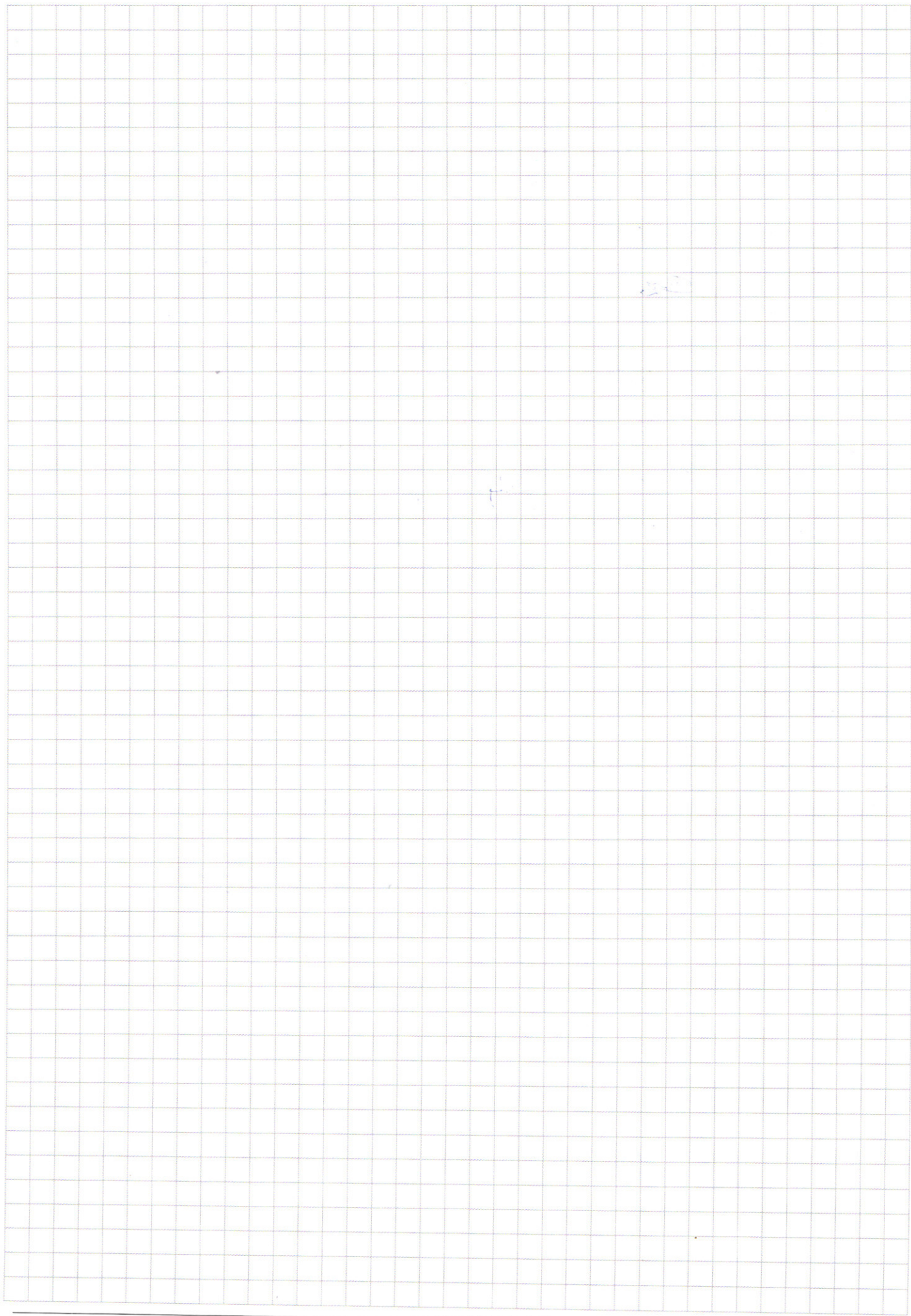
$$S_{ACF} = \frac{CB \cdot AF}{2} =$$

$$= \frac{70 \cdot 20}{2} = 700$$

$$S_{ACF} = \frac{70 \cdot CB \cdot AF}{2} = \frac{70 \cdot (70 + 24)}{2} = 5 \cdot 33 = 770$$

или $CF = 70\sqrt{2}$; $S_{ACF} = 770$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)