

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

↓
Восьмизначное число может состоять:

а) из цифр 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5
всего таких чисел $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$

б) из цифр 1, 1, 3, 5, 5, 5, 5, 9
всего таких чисел $\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3 = 840$

Итого $280 + 840 = 1120$ вариантов

Ответ: 1120.

№2

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\text{tg } 5x = 1$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - (5x + \frac{\pi}{4}))$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$$

$$\cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$$

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k \\ 5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$; $\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \mathbb{Z}$.

№5.

Рассмотрим I уравнение:

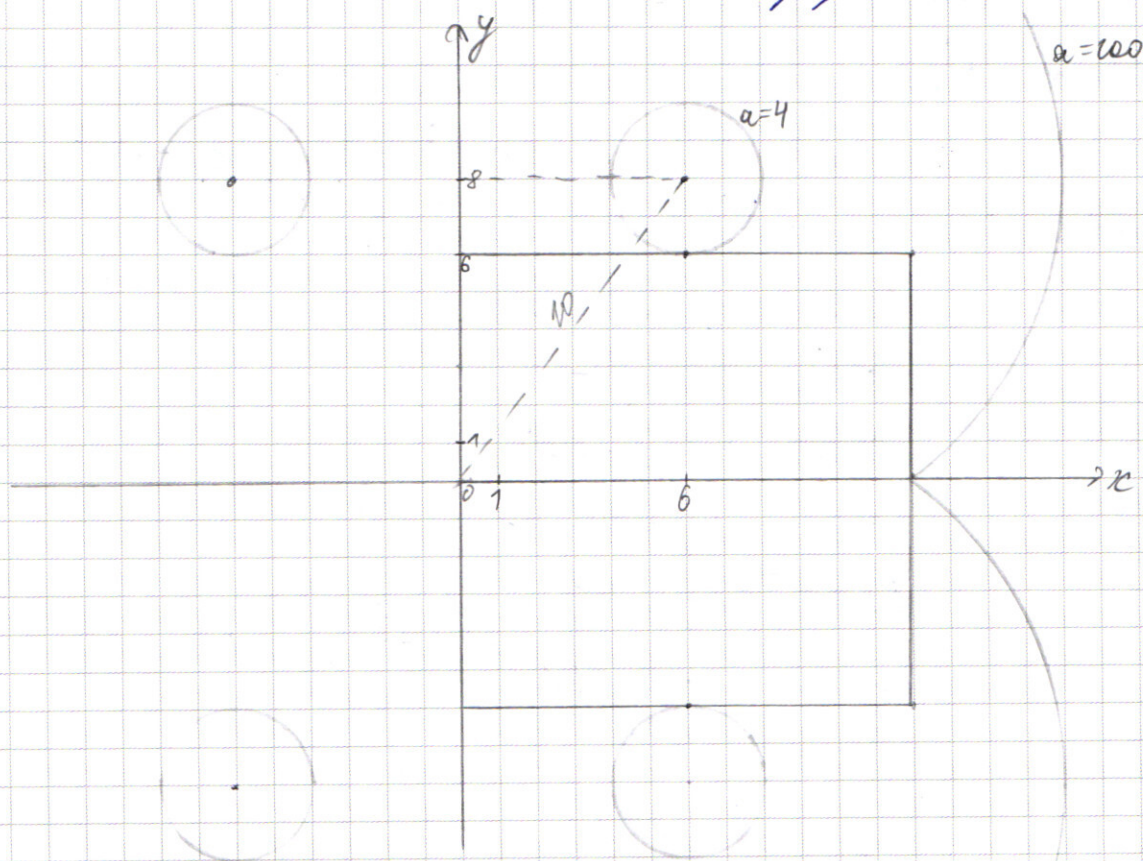
$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

Порядковые выражения равны 0 при $y = x-6$ и $y = x+6$ соответственно. В зависимости от раскрытия уравнение принимает вид $x=0$, $x=12$, $y=-6$, $y=6$, т.е. оно задает квадрат с центром в $(6; 0)$ со сторонами, равными 12 и параллельными осям координат.

Рассмотрим II уравнение:

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

При $x \geq 0$ и $y \geq 0$ оно задает окружность с центром в $(6; 8)$ радиуса $\sqrt{a}$. Этот график нужно отразить относительно обеих осей координат.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По заданию видно, что система имеет ровно 2 решения, если

- 1) окружность в I четверти касается прямой $y=6 \Rightarrow a=4$. Тогда решениями будут точки $(6;6)$ и $(6;-6)$
- 2) окружности пересекаются через $(0;0) \Rightarrow a=100$. Тогда решениями будут точки $(0;0)$ и $(12;0)$

Ответ: 4; 100.

№6.

$$\angle CAK + \angle CBK = 180^\circ$$

↓

CAKB - вписанный 4-уг.

↓

K лежит на ω_1

↓

CK - радиус $\omega_1 \Rightarrow CK = 26$

$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$ (опираются на равные дуги)

↓

$$\angle BKO = 45^\circ \Rightarrow BK = BO = BF \Rightarrow CF = CK = 26$$

$$AK = KB \text{ (CK - радиус)} \Rightarrow AC = BC = 10$$

Пусть $\angle ACK = \alpha$:

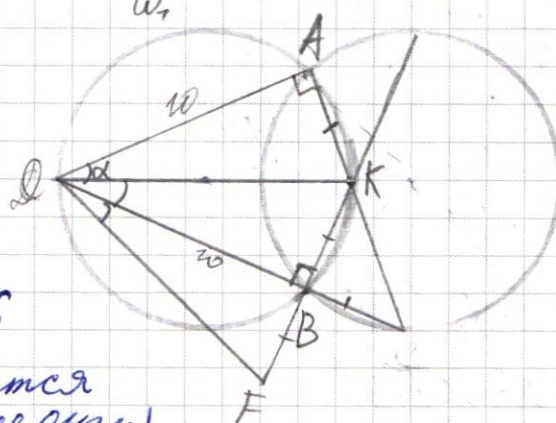
$$\cos \alpha = \frac{AC}{CK} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \frac{5}{13} \left(4 \cdot \frac{125}{2197} - 3 \right) = \frac{5}{13} \left(\frac{1250 - 6459}{2197} \right) = \frac{5 \cdot (-5209)}{13 \cdot 2197} = -\frac{5 \cdot 407}{13 \cdot 169}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha = \frac{12}{13} \left(3 - 4 \cdot \frac{1728}{2197} \right) = \frac{12}{13} \cdot \frac{6507 - 6912}{2197} = \frac{12 \cdot (-405)}{13 \cdot 169} = -\frac{12 \cdot 69}{13 \cdot 169}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin 3\alpha = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 26 \cdot \frac{12 \cdot 69}{13 \cdot 169} = \frac{8280}{169}$$

Ответ: $CF = 26$; $S_{ACF} = \frac{8280}{169}$



Рассмотрим II уравнение: $\sqrt{3}$.

003:
 $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$x^2 + (y+4)x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{-y-4-3y+4}{2} = -2y$$

$$x = \frac{-y-4+3y-4}{2} = y-4$$

$$1) \left(\frac{16y^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2} \quad 2)$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(4y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$2^{\lg y^2} \cdot (2y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$2^{\lg y^2} \cdot y^{\lg y^2} = 2^{\lg y^2} \cdot y^{\lg y^2}$$

$$y^{\lg y^2} = y^{\lg y^2}$$

$$(4y)^{\lg y^2} = 4y^2 \cdot (2y)^{\lg y^2}$$

$$2^{\lg y^2} = 4y^2$$

$$\lg y^2 = \lg_2(4y^2)$$

$$\lg y^2 = 2 + \lg_2 y^2$$

$$\lg y^2 = 2 + \frac{\lg y^2}{\lg 2}$$

$$\lg y^2 \left(1 - \frac{1}{\lg 2} \right) = 2$$

$$\lg y^2 = \frac{2}{1 - \lg_2 10} = \frac{2}{1 - 1 - \lg_2 5} = \frac{2}{-\lg_2 5} = -2 \lg_5 2$$

$$y^2 = 10^{-2 \lg_5 2}$$

$$y = 10^{-\lg_5 2} \Rightarrow x = -2 \cdot 10^{-\lg_5 2}$$

Ответ: $(-2 \cdot 10^{-\lg_5 2}; 10^{-\lg_5 2})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓4.

$$\frac{SO-R}{SO+R} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$3SO-3R=2SO+2R$$

$$SO=5R$$

$$\frac{R}{SO}=5 \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

$$R = \sqrt{OH \cdot SO}$$

$$R^2 = OH \cdot 5R$$

$$OH = \frac{R}{5}$$

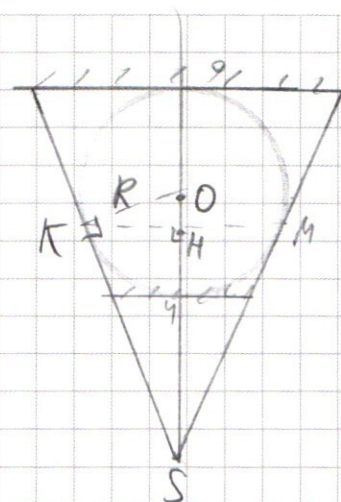
$$SH = SO - OH = 5R - \frac{R}{5} = \frac{24R}{5}$$

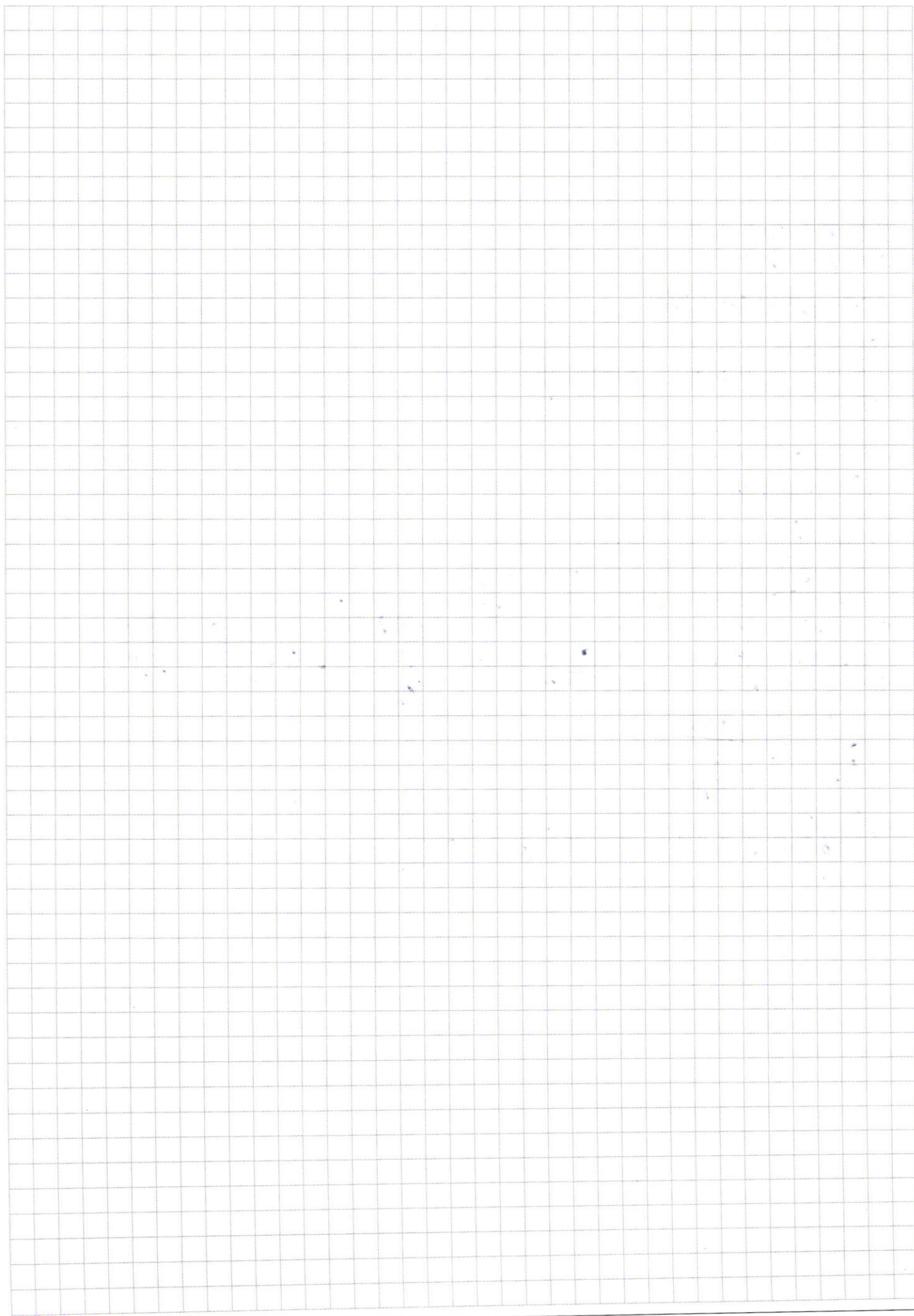
$$\left(\frac{SH}{SO-R} \right)^2 = \frac{S_{KLM}}{4}$$

$$S_{KLM} = 4 \cdot \left(\frac{\frac{24R}{5}}{\frac{4R}{5}} \right)^2 = 4 \cdot \frac{36}{25} = \frac{144}{25}$$

~~$$S_{KLM} = 4 \cdot \frac{\frac{24R}{5}}{\frac{4R}{5}} =$$~~

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}; S = \frac{144}{25}$.





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 15 \overline{) 3375} \\ 18 \\ 15 \\ \hline 34 \\ 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 30 \overline{) 675} \\ 38 \overline{) 5} \\ 35 \overline{) 17} \\ 25 \overline{) 15} \\ 25 \overline{) 25} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 20 \overline{) 127} \\ 35 \overline{) 25} \\ 35 \overline{) 35} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \overline{) 27} \\ 43 \overline{) 75} \\ 125 \overline{) 0} \\ 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 280 \overline{) 3} \\ 840 \\ 35 \\ 280 \end{array}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5$$

$$1, 1, 3, 5, 5, 5, 5, 9$$

$$280 + 840 = 1120$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 \sin(5x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$$

$$\cos 2x - \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - (5x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x)$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + 5x + 2\pi k$$

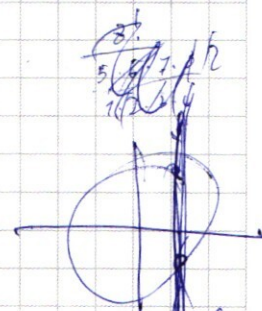
$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k \quad x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta \\ \alpha &= \beta + 2\pi k \\ \alpha &= -\beta + 2\pi k \end{aligned}$$

$$x^2 + xy + 4x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + (y+4)x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = (y+4)^2 - 4(8y - 2y^2) = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$x = \frac{-y-4 \pm 3y-4}{2} = \frac{2y-8}{2} = y-4$$

$$x = \frac{-y-4 \pm 3y-4}{2} = \frac{-4y}{2} = -2y$$

x^4

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg x} = (4-y)^{\lg(-y(y-4))}$$

x

$$\frac{x^4 \lg y}{y^2 \lg x} = (-x)^{\lg x} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$x^4 \lg x = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-xy^2)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{16y^4}{x^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$16^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + 2\lg y}$$

$$16^{\lg y} = (2y)^{\lg 2} \cdot (4y^2)^{\lg y}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

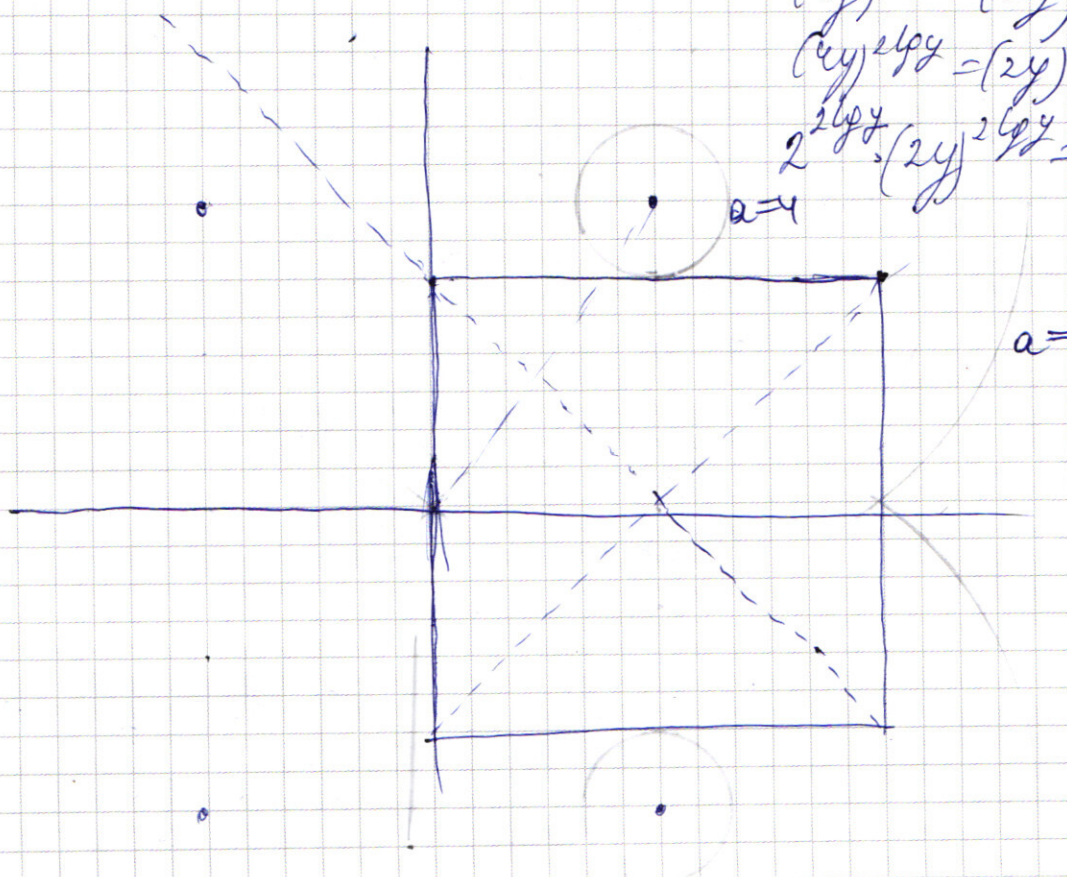
$$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

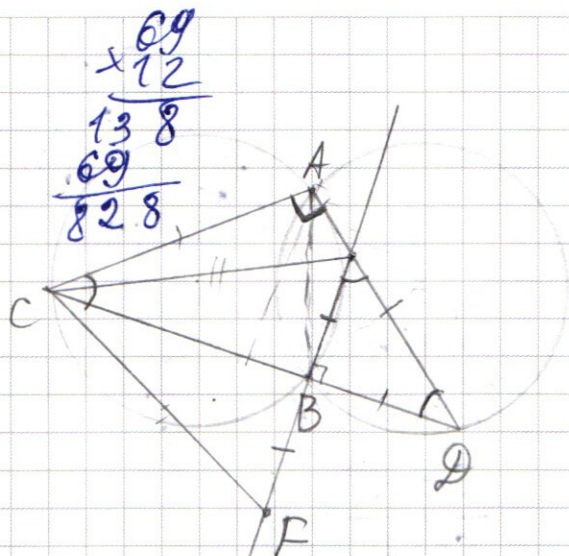
$$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{2\lg y}$$

$$2^{2\lg y} \cdot (2y)^{2\lg y} = (2y)^{2\lg y}$$

003:
 $\begin{cases} y > 0 \\ xy > 0 \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} \times 69 \\ 12 \\ \hline 138 \\ 69 \\ \hline 828 \end{array}$$

$$\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$3 \sin \alpha - 4 \sin^2 \alpha =$$

$$= \frac{12}{13} \left(3 - \frac{144}{169} \right)$$

$$\frac{5}{13} \left(4 - \frac{25}{169} - 3 \right) =$$

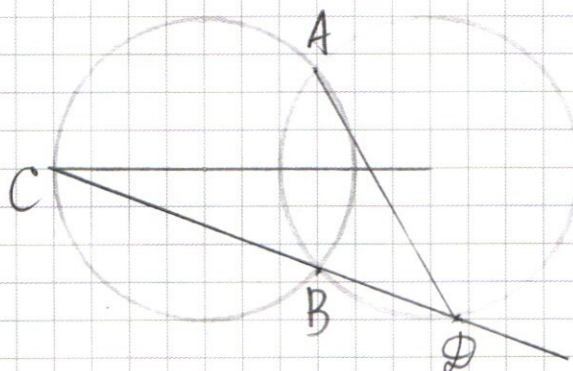
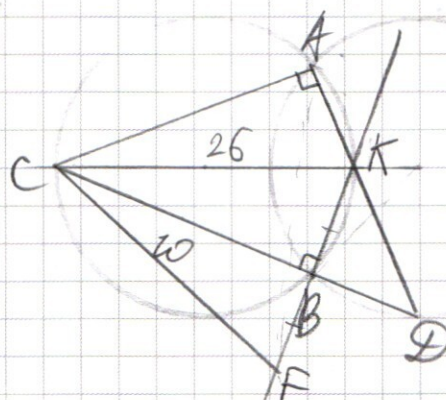
$$= \frac{5}{13} \left(\frac{100}{169} - \frac{169}{169} \right) = \frac{5}{13} \left(-\frac{69}{169} \right) = -\frac{345}{2207}$$

$$\begin{array}{r} \times 169 \\ 3 \\ \hline 507 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 402 \overline{) 173} \\ 39 \overline{) 13} \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ + 4 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84 \overline{) 13} \\ 6 \overline{) 28} \\ \hline 24 \end{array}$$

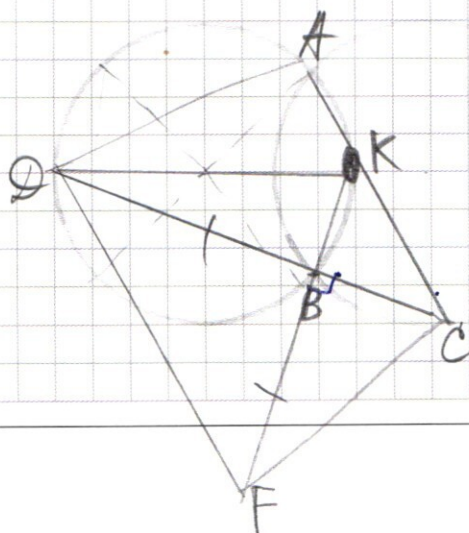


$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 7)/x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 7)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81}x - x$$

$$3^x + x < 3^{81}(x - 4) + 85$$



$$(4y) \lg y^2 = 4y^2 \cdot (2y) \lg y^2$$

$$2 \lg y^2 = 4y^2$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg -x + \lg y$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg -x + (-x) \lg y$$

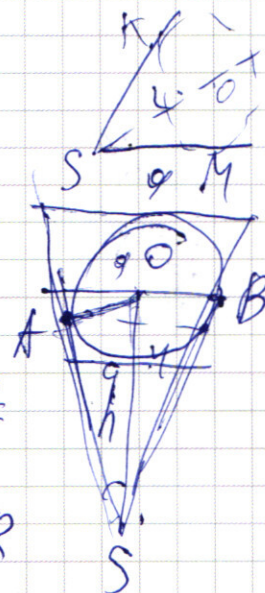
$$\left(-\frac{x^3}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg -x$$

$$(-x)^3 \lg y = (-x) \lg -x \cdot y^2 \lg y$$

$$(-x)^3 \lg y - \lg(-x) = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^3 \lg y - \lg(4-y) = y^2 \lg y$$

$$\left(\frac{(4-y)^3}{y^2}\right) \lg y = (4-y) \lg(4-y)$$



$$\frac{h}{h+2R} = \frac{2}{3}$$

$$3h = 2h + 4R$$

$$\frac{SO - R}{SO + R} = \frac{2}{3}$$

$$3SO - 3R = 2SO + 2R$$

$$SO = 5R$$

$$\sin \angle KSO =$$