

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

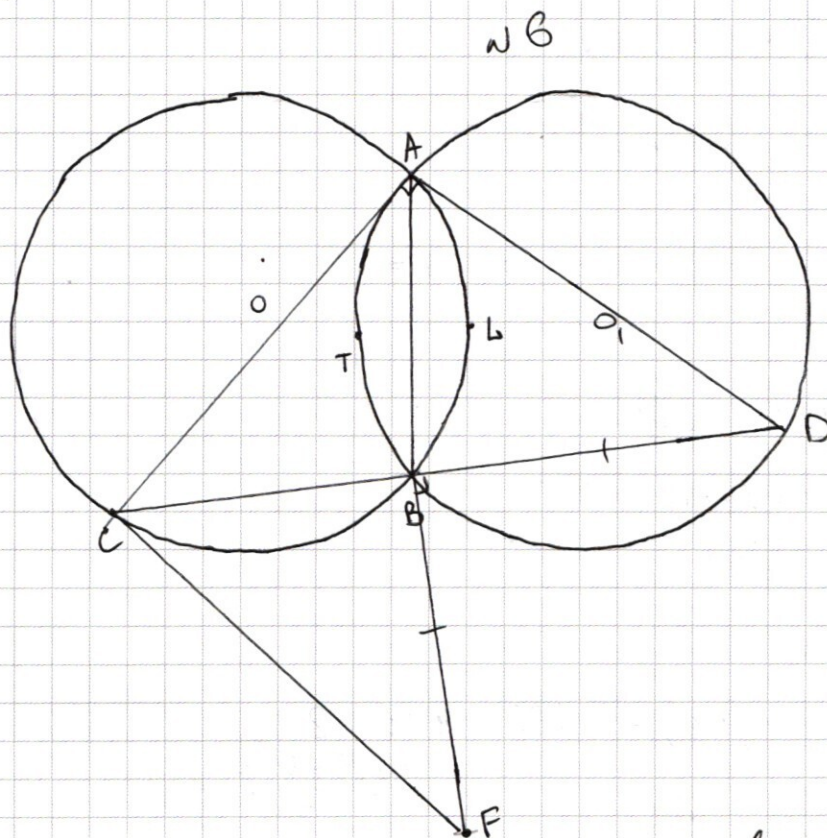
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:

$$R_1 = R_2 = R = 13$$

а) ① $\angle ATB = \angle ALB$ т.к. окружности равны (из симметрии) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ALB = \frac{1}{2} \angle ATB = \angle ADC \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC =$
 $= (180^\circ - \angle CAD) / 2 = 45^\circ \Rightarrow \triangle ACD - \text{пр.}; AC = AD = x$

② где $\triangle ACB$ $\text{Окр}(O, R)$ - опис $\Rightarrow$ по следствию из теоремы
 синусов $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R \Rightarrow AB = 2R \sin \angle ACB = 13\sqrt{2}$

③ По теореме косинусов где $\triangle ABD$

$$AB^2 = BD^2 + AD^2 - 2AD \cdot BD \cos \angle BDA$$

$$338 = BD^2 + x^2 - \sqrt{2}x \cdot BD$$

По теореме косинусов $\triangle ABC$

$$AB^2 = CB^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB$$

$$338 = BC^2 + x^2 - \sqrt{2}x \cdot BC$$

Значит, что коэффициенты обоих уравнений одинаковы $\Rightarrow$
 $\Rightarrow BC$ и BD корни квадратного уравнения относительно y
 $y^2 - \sqrt{2}xy + x^2 - 338 = 0$

④ По т. Пифагора $\triangle CBF$: $CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2}$

⑤ $BC^2 + BD^2 = (BC + BD)^2 - 2BC \cdot BD$

$$\begin{cases} BC + BD = \sqrt{2}x \\ BC \cdot BD = x^2 - 338 \end{cases} \quad \text{по теореме Виета}$$

$$BC^2 + BD^2 = \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} + 2 \cdot 338 = 26^2 \Rightarrow CF = 26$$

Ответ: $CF = 26$

б) ① По теореме косинусов $\triangle ABC$:

$$AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle ACB = AB^2$$

$$4x^2 + 100 - \sqrt{2} \cdot 10x = 338$$

$$x^2 - 10\sqrt{2}x - 238 = 0$$

$$D = 200 + 238 \cdot 4 = 4(50 + 238) = 4 \cdot 288 = 4 \cdot 144 \cdot 2$$

$$x = \frac{10\sqrt{2} + 24\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2} = AC \quad x = \frac{10\sqrt{2} - 24\sqrt{2}}{2} < 0$$

② $\cos \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{10}{26} \Rightarrow \sin \angle BCF = \sqrt{1 - \frac{100}{676}} = \frac{24}{26}$

③ $\sin \angle ACF = \sin (\angle ACB + \angle BCF) = \sin 45^\circ \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \sin \angle BCF =$
 $= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{10}{26} + \frac{24}{26} \right) = \frac{34}{26} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17\sqrt{2}}{26}$

④ $S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26} = 289$

Ответ: 289

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим число 16875 на простые множители $16875 = 5^4 \cdot 3^3$.
Чтобы произведение цифр было равно этому числу, надо чтобы
в нем были 4 пятёрки (т.к. только из цифр только 5 кратно 5).

Т.к. остаются только множители 3 у нас есть следующие
варианты наборов цифр: $(9; 3; 1; 1); (3; 3; 3; 1)$. Рассмотрим
количество четырёхзначных чисел, которые можно составить
из этих наборов

1. $C_4^2 \cdot 2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2 = 6 \cdot 2 = 12$
↑
количество способов
выставить $(1; 1)$

2. $C_4^1 = 4$
↑
количество способов поставить 1

Количество способов, расставить 4 пятёрки в 8-значном
числе: $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{56 \cdot 7 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$. Для каждого из этих способов
остальные места можно занять $12 + 4 = 16$ способами. Следовательно
всего возможно $70 \cdot 16 = 1120$ способов

Ответ: 1120

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = 0$$

$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin \frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, k, m \in \mathbb{Z}$$

25

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1)$$

a-? 2 пунт

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 = a \quad (2)$$

$$(1) |y - (x-6)| + |y - (-x+6)| = 12$$

$$1. \begin{cases} y \geq x-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$y - x + 6 + y + x - 6 = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$2. \begin{cases} y \geq x-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -x+6 \end{cases}$$

$$y - x + 6 - y - x + 6 = 12 \Rightarrow x = 0$$

$$3. \begin{cases} y < x-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$-y + x - 6 + y + x - 6 = 12 \Rightarrow x = 12$$

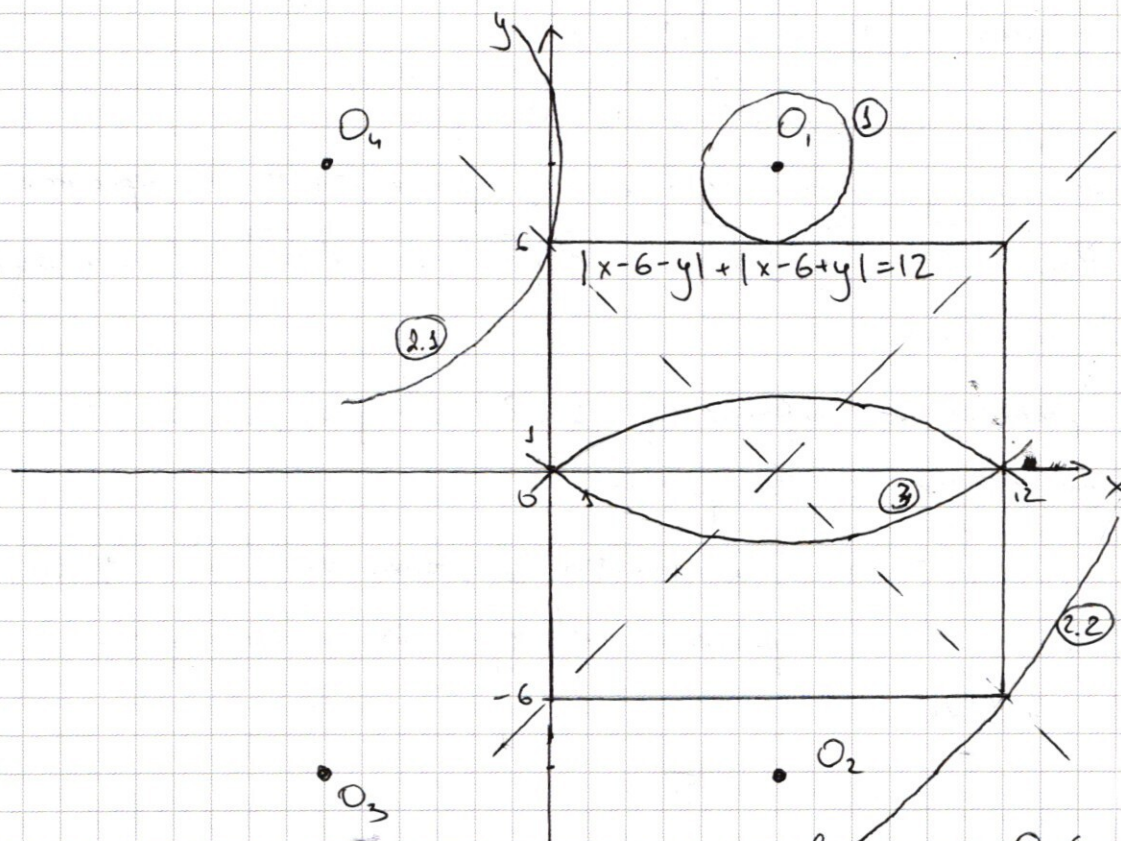
$$4. \begin{cases} y < x-6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y < -x+6 \end{cases}$$

$$-y + x - 6 - y - x + 6 = 12 \Rightarrow y = -6$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2): $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ — 4 окружности с центрами в точках $(6; 8); (-6; 8); (6; -8); (-6; -8)$ радиусом $\sqrt{a} \Rightarrow a \geq 0$



Точки O_1 и O_2 симметричны относительно квадрата $\Rightarrow \text{Окр}(O_1; \sqrt{a})$ и $\text{Окр}(O_2; \sqrt{a})$ имеют одинаковое количество точек пересечения с квадратом. Аналогично для точек O_3 и O_4 . Следовательно равно 2 решения может быть в следующих случаях

1. 1 и 2 окружности касаются ^{снаружи} квадрата, а 3 и 4 не пересекают его

$$R_1 + R_2 = 2$$

ближайшая к O_3 точка квадрата — $A(0; 6)$

$$\rho(O_3; A) = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} > 2 \Rightarrow 3 \text{ и } 4 \text{ окр действительно не пересекают квадрат} \Rightarrow R = \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

2. окружности 1 и 2 не пересекают квадрат, а окружности 3 и 4 пересекают его каждая в одной точке

Самая дальняя 2.1. в точках $(0; 6)$ и $(0; -6)$

$$R_1 \text{ и } R_2 = \sqrt{40} \text{ (см. п. 1)}$$

Расстояние от O_1 до дальней стороны квадрата: $54 \Rightarrow 1$ и 2 будут пересекать квадрат $\rightarrow$ не подходит

2.2. в точках $(12; 6)$ и $(12; -6)$

$$R_3 \text{ и } R_4 = \sqrt{(-6-12)^2 + (8+6)^2} = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{520}$$

Максимальный радиус первой окружности, при котором они пересекают квадрат: $R_{\max} = \sqrt{(6-12)^2 + (8+6)^2} = \sqrt{6^2 + 14^2} < \sqrt{18^2 + 14^2} \Rightarrow$ подходит

$$\sqrt{a} = \sqrt{520} \Rightarrow a = 520$$

3. точки пересечения первой окр 1 и 2 совпадают, а 3 и 4 не имеют общих точек с квадратом

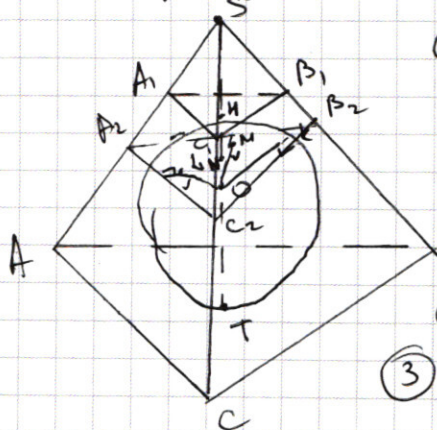
$$R_1 \text{ и } R_2 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (из симметрии совп. точки это } (0; 0) \text{ и } (12; 0))$$

$\sqrt{40} < R < \sqrt{520} \Rightarrow 3$ и 4 пересекают квадрат $\Rightarrow$ не подходит

Ответ: $a = 4; 520$

н5

Рассмотрим треугольную пирамиду, в которую вписана сфера. Примем ее центр лежит на высоте пирамиды (т.к. по условию проведем сечение перпендикулярное SO) $ABC \perp SO; A_1B_1C_1 \perp SO$



① $S_{ABC} = 9; S_{A_1B_1C_1} = 4$. Т.к. $ABC \parallel A_1B_1C_1$, то

$$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{2}{3}$$

② $\triangle SC_1B_1 \sim \triangle SBC$ по 2-м углам $\Rightarrow \frac{SB_1}{SB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{2}{3}$

③ T, H — точки касания сферы и плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle SKB, \sim \triangle STB$ по 2-м углам (т.к. $AB \parallel A_1B_1C_1$) $\Rightarrow \frac{SK}{ST} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{2}{3}$

$$\frac{SO - R}{SO + R} = \frac{2}{3}$$

$$3SO - 3R = 2SO + 2R$$

R - радиус сферы

$$SO = 5R \Rightarrow \frac{R}{SO} = \frac{1}{5}$$

4) т.к. сфера вписанная $\Rightarrow OK \perp SBC \Rightarrow OK \perp SK \Rightarrow \triangle OSK$ - н/у
 $\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{SO} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$

5) Построим сечение пирамиды плоскостью KLM . Оно будет также перпендикулярно SO . $KLM \cap AS = A_2$; $KLM \cap BS = B_2$; $KLM \cap CS = C_2$

6) N - точка пересечения KLN и SO
 $KLN \perp SO \Rightarrow KN$ - высота $\triangle KSO$

$$7) \frac{ON}{OK} = \sin \angle OKN = \cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\frac{ON}{OK} = \sin \angle OKN = \sin \angle KSO = \frac{1}{5}$$

$$\angle OKN = 90^\circ - \angle SOK$$

$$\angle KSO = 90^\circ - \angle SOK$$

$\downarrow$

$$\angle OKN = \angle KSO$$

$$\frac{OK}{SO} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{ON}{OK} \cdot \frac{OK}{SO} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{ON}{SO} = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow SO = 25x; ON = x; R = 5x = OT$$

$$\frac{ON}{ST} = \frac{x}{25x + 5x} = \frac{1}{30} \quad \frac{SN}{ST} = \frac{SO - ON}{SO + OT} = \frac{24x}{30x} = \frac{4}{5}$$

8) $\triangle A_2B_2C_2 \sim \triangle ABC$ (т.к. $A_2B_2C_2 \perp SO$ и $ABC \perp SO$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SC_2}{SC}\right)^2$

9) $\triangle SC_2N \sim \triangle SCT$ т.к. $A_2B_2C_2 \parallel ABC \Rightarrow CT \parallel C_2N \Rightarrow$
 $\Rightarrow \frac{SC_2}{SC} = \frac{SN}{ST} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{A_2B_2C_2} = \frac{16}{25} \cdot S_{ABC} = \frac{144}{25}$

Order: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$; $S = \frac{144}{25}$
 ≈ 5

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$x = \frac{-y-4 \pm 3y-4}{2} = y-4$$

OD3:

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-y-4 - 3y-4}{2} = -2y$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$(1): x = -2y \quad \begin{cases} y > 0 \\ -2y < 0 \text{ верно} \end{cases}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$4^{\lg y} \cdot (2y)^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(2y)^{\lg 2y^2} (4^{\lg y})^{\lg y} = (2y)^{2\lg y} (2y)^{\lg 2} = 0$$

$$4^{\lg y} (2y)^{\lg y} = 2^{\lg 2} = 1$$

$$4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2}$$

$$\lg y = \lg 2 \cdot \lg y + \lg 2$$

$$\lg y = \lg 2 \left(\lg y + \frac{1}{2} \right)$$

$$\lg y = \frac{\lg 2 \cdot \lg y}{\lg 4} + \frac{\lg 2}{2}$$

$$\lg y = \frac{\lg 2 \cdot \lg y}{2\lg 2} + \frac{\lg 2}{2}$$

$$\frac{\lg y}{2} = \frac{\lg 2}{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$(2): x = y - 4$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} (4-y)^{\lg 4y-y^2}$$

OD3: $y \in (0; 4)$
 корней нет

Order: $(-4; 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 5)x$$

№7

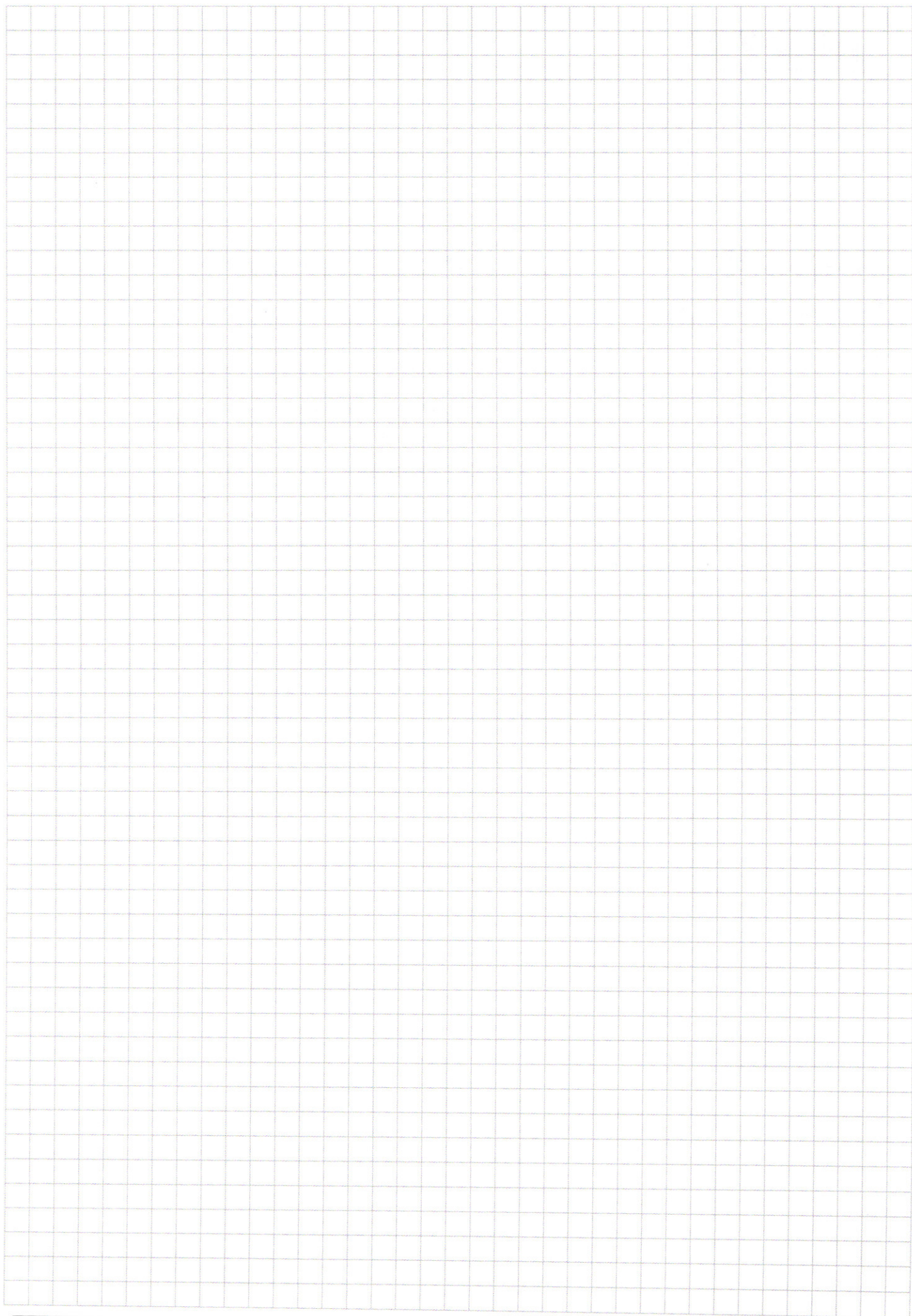
$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 5)x$$

$$3^{81}(x-4) + 81 + 4 - 3^x - x = 0$$

$$3^{81}(x-4) - (x-4) + 81 - 3^x = 0$$

$$(x-4)(3^{81} - 1) + (81 - 3^x) = 0$$

$x = 4$ — корень



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} = 3^x (1 + 4 \cdot 3^{81-x})$$

$$y = 85x + (3^{81} - 1)x$$

t g t $\textcircled{12}$

$$(-xy)^2 g(-x)$$

$$2 \log \frac{x}{y} = (-xy)^{\log(-x)}$$

$$y^{2\log \frac{x}{y}} \left(1 - \cancel{(\cancel{x}y)^{\cancel{\log x}}} \cdot (-x)^{\log(-x)} \cdot y^{\log(-x)} - 2\log \frac{x}{y} \right)$$

$$(-x)^{\lg(-x)} = \frac{1}{4^{\lg(-x)} - 2^{\lg \frac{x^2}{5}}}$$

$$(-x)^{\lg(-x)} = 4^{\lg \frac{x^2}{y} - \lg(-x)}$$

$$(y-4)^{\log(y-4)} = y^2 \log(y-4 - \frac{4}{y}) - \log(y-4)$$

$$338 = 169 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ + 17 \\ \hline 34 \end{array}$$

230

9
952

9200

115

—

1

1

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 22 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 676 \\ + 676 \\ \hline 1352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 678 \\ \times 2 \\ \hline 1352 \end{array}$$

$$3^x + 4 - 3^{81} - 85 - 3^{81} x + x$$

$$1 + 4 \cdot 3^{81} - 85 > 0$$

$$3^{21} + 4 \cdot 3^{21} - 85 - 3^{21} \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 238 \\ 4 \quad 4 \\ \hline 952 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 952 \\ 4 \overline{) 200} \\ \underline{1152} \end{array}$$

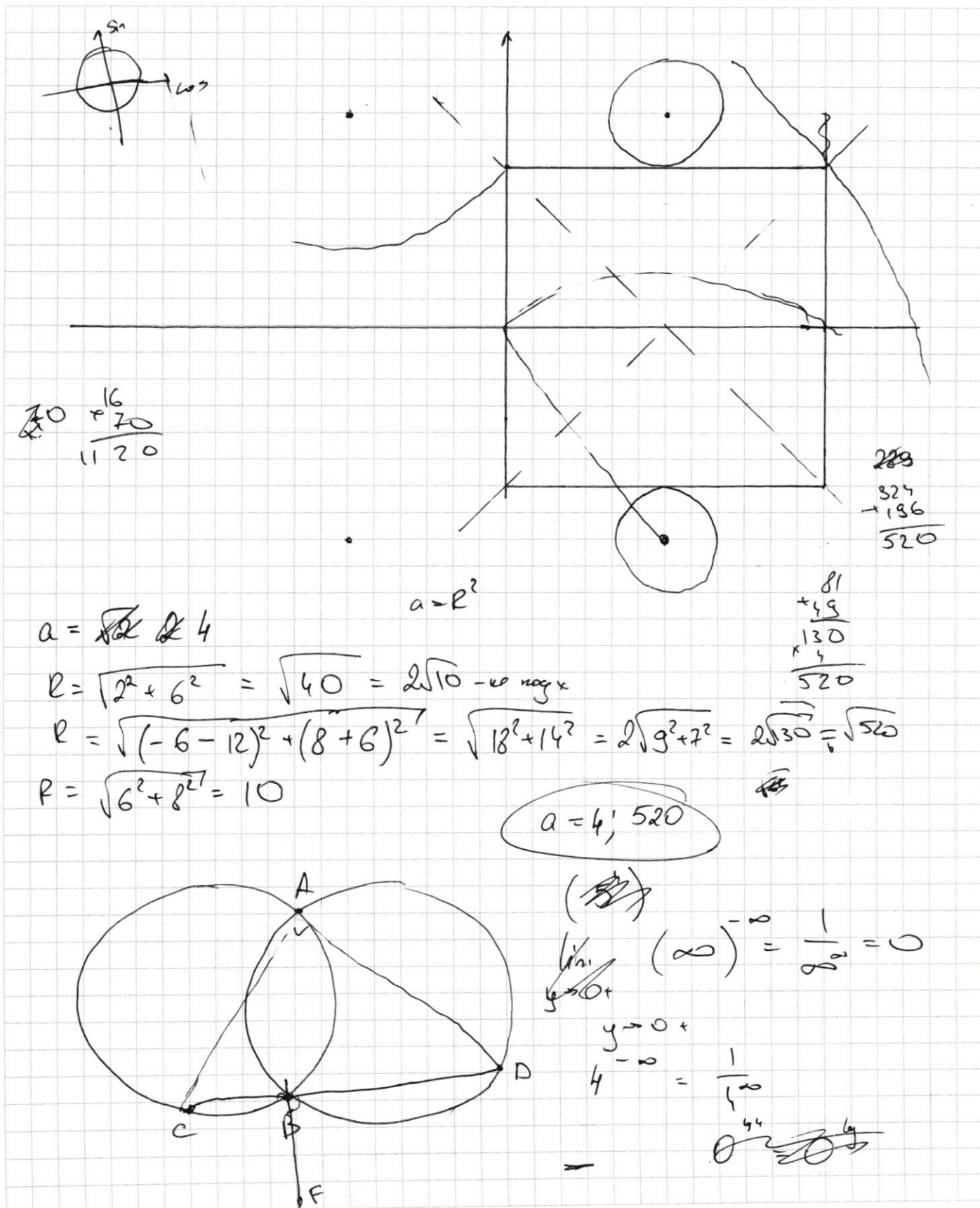
[illegible]

III

К ☐ ЧИО
 лочку в нужном

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

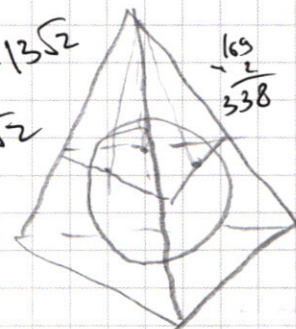
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{AB}{\sin 45} = 2 \cdot 13$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$OD = x\sqrt{2}$$



$$338 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy - 338 = 0$$

$$D = \frac{2}{3}x^2 - 4x^2 + 338 \cdot 4 =$$

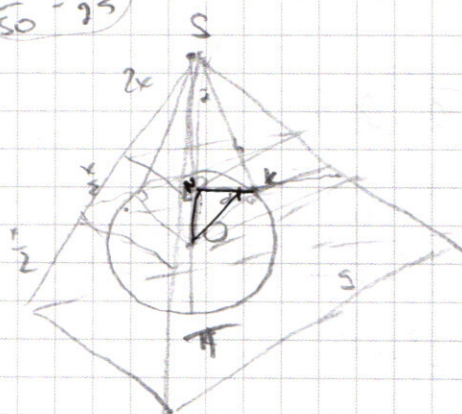
$$= 338 \cdot 4 - 2x^2$$

$$y = \frac{\sqrt{2}x \pm \sqrt{338 \cdot 4 - 2x^2}}{2}$$

$$\frac{OD}{OK} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{OK}{SO} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{OD}{SO} = \frac{1}{5}$$



$$\frac{SO}{OT} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\sin \angle KSO = \frac{1}{5}$$

$$y_1 + y_2 = \sqrt{2}x$$

$$y_1 y_2 = x^2 - 338$$

$$y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2 =$$

$$= 2x^2 - 2x^2 + 338$$

$$x^{\lg x} = x^{\lg 10 \cdot \lg x}$$

$$y^{-2\lg y} x^{4\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$(-x)^{\lg y} (y^{-2\lg y} (-x)^{3\lg y} - (-x)^{\lg(-x)}) = 0$$

$$y^{-2\lg y} \cdot (-x)^{3\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} = 0$$

$$(-x)^{3\lg y} (y^{-2\lg y} - (-x)^{\lg(-x) - 3\lg y}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ -15 \\ \hline 18 \\ -15 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 125} \\ -125 \\ \hline 437 \\ -437 \\ \hline 70 \\ -70 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$5^3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 1625 \\ -27 \\ \hline 4375 \\ -1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ -70 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$5555$$

$$9333$$

$$3331$$

$$C_8^4 \cdot (4 + C_4^2 \cdot 2) = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot (4 + \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2) = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot (4 + 2 \cdot 3 \cdot 2)$$

$$= 70 \cdot (4 + 12) = 70 \cdot 16 = 1120$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + 1 = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\cos 2x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = 0$$

$$\cos 2x - \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0$$

$$-2 \sin \frac{2x + \frac{\pi}{4} - 5x}{2} \sin \frac{2x - \frac{\pi}{4} + 5x}{2} = 0$$

$$\sin 1,5x - \frac{\pi}{8} \sin 3,5x - \frac{\pi}{8} = 0$$

$$1,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$3,5x - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7} \end{cases}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 + (y+4)x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{y+4 + 3y-4}{2} = 2y$$

$$x = \frac{y+4 - 3y+4}{2} = -y+4$$

$$x = 2y$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (-2y)^{\lg(-2y^2)} \leq 0 \Rightarrow \text{нет корней}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (-2y)^{\lg(2y)} \\ (4t^2)^{\lg t - \frac{1}{2}} = (-t)^{\lg t + \lg -\frac{1}{2}} \\ t^{\lg t - \frac{1}{2}} ((4t)^{\lg t - \frac{1}{2}} - t^{\lg t}) = 0$$

$$-2y = t \\ \lg y (y^2 - 16y + 96 - \frac{256}{y} + \frac{256}{y^2})^{\lg y - 1} \cdot (2y - 16 + \frac{256}{y^2} - \frac{512}{y^3}) = 0$$

$$x = -y+4$$

$$y > 0$$

$$y > 0 \Rightarrow x < 0$$

$$-xy > 0$$

$$y^2 - 4y > 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$2y^3 - 16y^2 + 256y - 512 \\ 2y^3(y-8) + 256(y-8) = 0 \\ (y^3 + 128)(y-8) = 0$$

$$y = 8 \\ y = -\sqrt[3]{128} = -5.04$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| \geq \cancel{x-6-y} + \cancel{y-6-x} = x-6+y$$

$$x-y \geq 6$$

$$y \leq x-6$$

$$y \geq -(x-6)$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$x = 12$$

$$y \leq x-6$$

$$y < -(x-6)$$

$$\cancel{x-6-y} - \cancel{x-6-y} = 12$$

$$y = -6$$

$$y > x-6$$

$$y < -(x-6)$$

$$\cancel{-x+6+y} - \cancel{-x+6-y} = 12$$

$$x = 0$$

$$y > x-6$$

$$y > -(x-6)$$

$$\cancel{-x+6+y} + \cancel{x-6+y} = 12$$

$$y = 6$$

$$f(10) = \frac{(10-4)^4}{10^2} = 1$$

$$f(8) = \frac{(8-4)^4}{8^2} = 1$$