

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА'

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.
Разложим число 16875 на простые множ.:
 $16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

Заметим, что $3 \times 3 = 9$, а 9 — это тоже цифра, а значит наши восьмизначные числа будут состоять из цифр одной из двух следующих последовательностей:

1) 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

2) 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1.

(произведение любых двух чисел (не считая единицы) кроме 3×3 , дает число больше 9, а значит не являющееся цифрой)

Осталось посчитать кол-во чисел из цифр наших двух последовательностей.

1) на 8 клеток пройти можно разложить 56 способами без повторений. Остальные повторки на каждый из вариантов раскладываются в 5 способами. $56 \times 5 = 280$.

2) 9 и 3 на 8 клеток раскладываются $8 \times 7 = 56$ способами, а остальные числа на каждый из вариантов — 15; $56 \times 15 = 840$; 1) + 2) = $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120 чисел.

N7.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x. \end{cases}$$

Заметим, что для каждого x , мы сможем найти возможное кол-во y , как разность $2) - 1)$.

Также заметим, что $4 < x < 85$.

(док-во этого ~~на~~ неравенства будет позже).

Для примера возьмем $x = 5$, тогда

$$\text{кол-во целых } y \text{ равно } 2) - 1) = (85 + (3^{81} - 1) \cdot 5) - (3^5 + 4 \cdot 3^{81}).$$

Получим общую формулу для любого целого x :

$$\begin{aligned} n &= (85 + x \cdot 3^{81} - 1) - (3^x + 4 \cdot 3^{81}) = \\ &= 3^{81} (x - 4) - 3^x + 85 - x, \text{ где} \\ n &\text{ - кол-во целых } y. \end{aligned}$$

Найдем все x , при которых $n > 0$:

При $x \leq 3$, очевидно, n сильно < 0 .

При $x = 4$, $n = 0$.

Замечаем также, что при $4 < x < 81$,

n всегда > 0 . А далее простым перебором находим, что при возрастающих x до 85, n непрерывно > 0 ; при

$x = 85$, $n = 0$, а при $x > 85$, $n < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Делает вывод, что $4 < x < 85$.

Теперь найдем сумму всех n при
допустимых x .

$$\begin{array}{r}
 + 3^{81} \\
 + 2 \cdot 3^{81} \\
 + \dots + 81 \cdot 3^{81} \\
 \hline
 3^{81} (1 + 2 + \dots + 81) = 3^{81} \cdot 81 \cdot 41
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + 3^5 \\
 + 3^6 \\
 + \dots + 3^{85} \\
 \hline
 3^{86} - 3^5
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 + 0 \\
 + 81 \\
 + \dots + 80 \\
 \hline
 81 \cdot 40
 \end{array}
 =$$

$$\begin{aligned}
 &= 3^{81} \cdot 81 \cdot 41 - 3^{86} + 3^5 + 81 \cdot 40 = \\
 &= 3^{81} \cdot 81 (41 - 3) + 81 (3 + 40) = \\
 &= 3^{85} \cdot 38 + 3^7 \cdot 43.
 \end{aligned}$$

Ответ: $3^{85} \cdot 38 + 3^7 \cdot 43$
~ 5.

$$\begin{cases}
 1) |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\
 2) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a
 \end{cases}$$

График функции 1) - это квадрат
со сторонами, параллельными осям Ox и Oy ,
точка пересечения диагоналей этого
квадрата находится в точке $(6; 0)$,

a сторона равна 6.
Теперь рассмотрим график функции 2).
Сначала закрепим a на модуль.

График данной функции — окружность
с центром в точке $(6; 8)$ и радиусом =
= $\sqrt{a}$ ($a > 0$). Теперь добавляем модуль:

При $0 < a \leq 6$ — график — 4 окружности.

При $a > 6$ — график — "четырёхлистник".

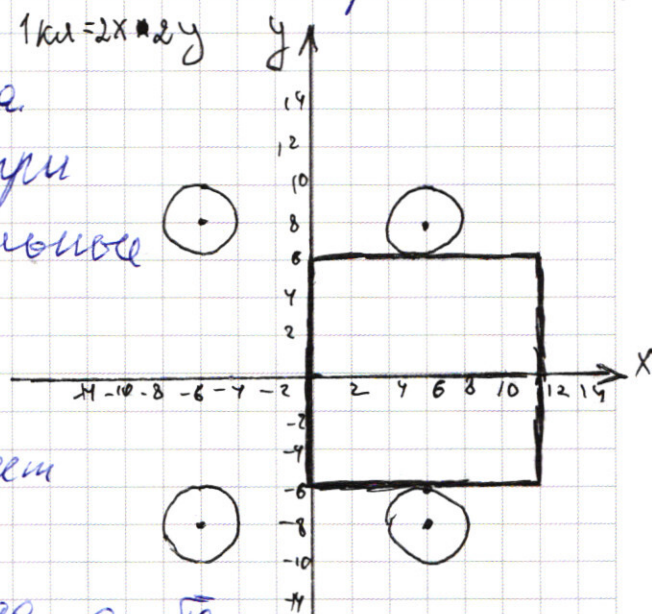
Очевидно, что система
имеет 2 решения при
 $a = \sqrt{2}$; найдем остальные
 a :

При увеличении a от $\sqrt{2}$,
до $\sqrt{10}$, система будет
иметь 4 решения.

В ~~момент~~ момент, когда $a = \sqrt{10}$,
система снова будет иметь 2 корня
 $(0; 0)$ и $(12; 0)$.

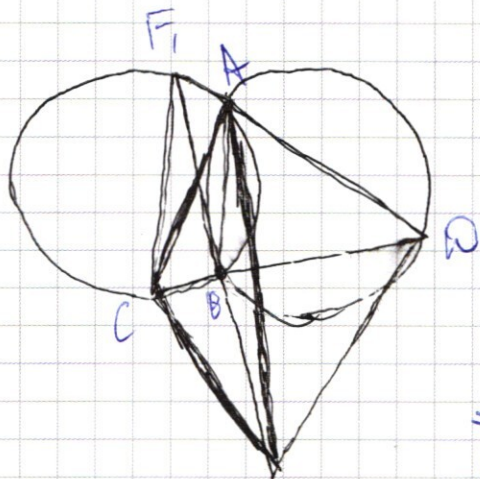
При $a > \sqrt{10}$ система вообще перестанет
иметь корни.

Ответ: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{10}$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



$$\begin{aligned} \text{a) } \angle CAD &= 90^\circ \\ \angle CBF &= 90^\circ. \end{aligned}$$

$$\frac{AC}{\sin \angle CBA} = 2R = \frac{AD}{\sin \angle DBA};$$

$$\begin{aligned} \angle CBA &= 180^\circ - \angle DBA \Rightarrow \\ \Rightarrow AC &= AD; \angle BCA = \angle BDA = 45^\circ. \end{aligned}$$

$\triangle BDF$ — прямой и $\text{NO} \Rightarrow$
 $\Rightarrow BD = BF, \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$.
 $\angle ADB = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow BD$ — биссектриса $\angle ADF$.

Продолжим AD до пересечения с FB ;
 $AD \cap FB = F_1$.

$\triangle F_1FD$ — прямой, $\angle F_1FD = 45^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow$ и р/б ~~с~~ $\Rightarrow BD$ — биссектриса. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow BD$ — медиана; $BD = F_1D = BF$.

Рассмотрим $\triangle CBF_1$ и $\triangle CBF$;

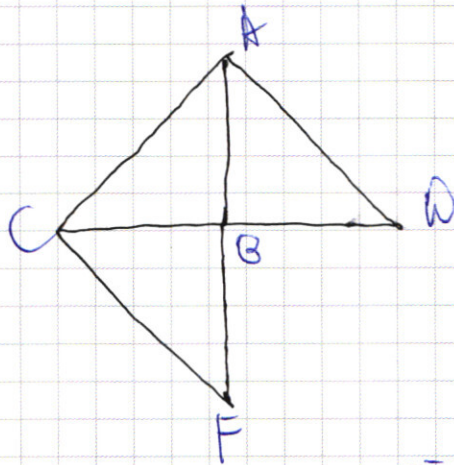
$$CD \text{ — общ., } \angle CBF = \angle CBF_1 = 90^\circ,$$

$$BF_1 = BF \Rightarrow CF = CF_1, \text{ а так}$$

как $\angle CBF_1$ — прямой $\Rightarrow CF_1$ — диаметр $\Rightarrow$

$$\Rightarrow CF = 2R = 26.$$

б)



Возьмем произвольную точку, которая не противоречит условию ($AB \perp CF$), тогда

$$BF = CB = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AF = 20 \Rightarrow$$

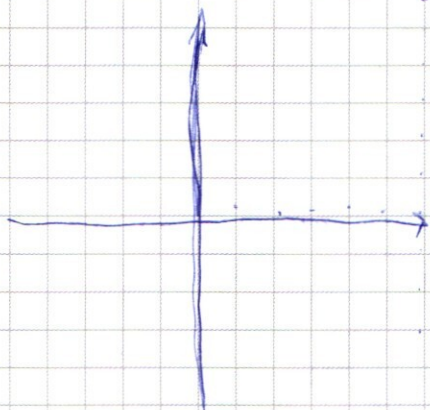
$$\Rightarrow S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot AF \cdot \sin \angle CFA =$$

$$= \frac{26 \cdot 20}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 130\sqrt{2}.$$

Ответ: а) 26

б) $130\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



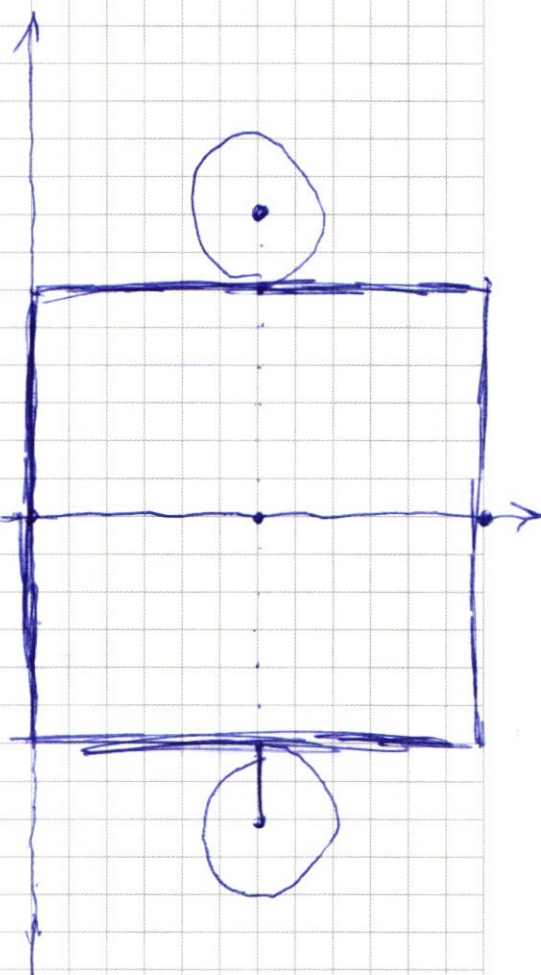
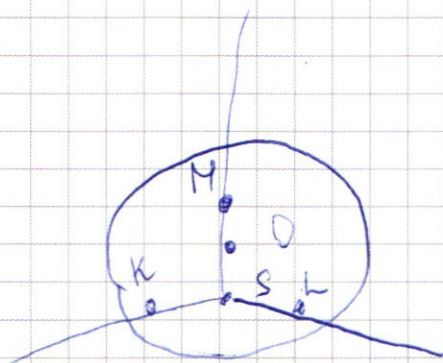
$$x=0.$$

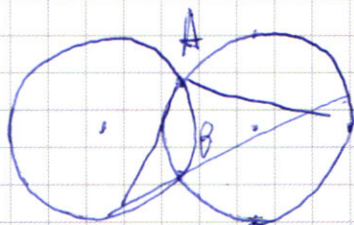
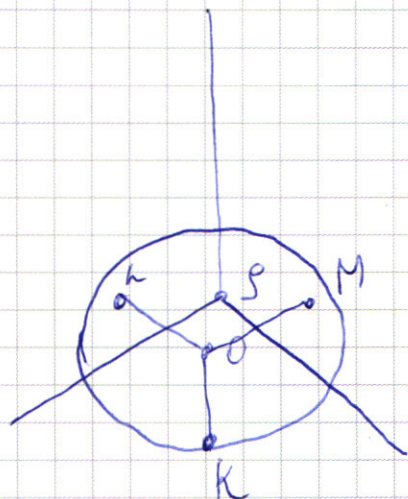
$$|-6-y| + |y-6| = 12.$$

$$x=6.$$

$$|-y| + |y| = 12.$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \log_{10} y = (-x) \log_{10} (-xy)$$





$$\frac{AB}{\sin C} = 2R$$

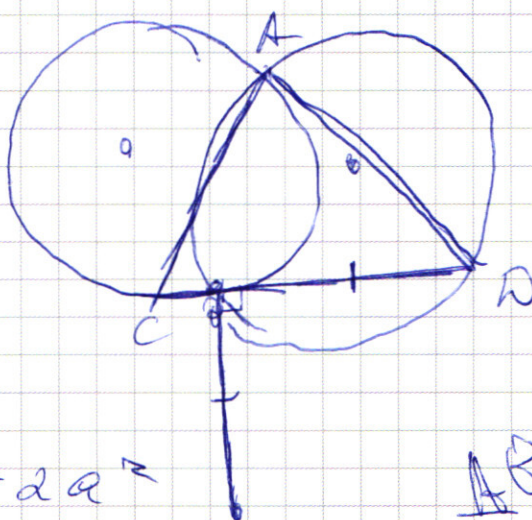
$$(b+c)^2 = 2a^2$$

$$b^2 + c^2 + 2bc = 2a^2$$

$$\sqrt{b^2 + c^2} = ?$$

$$c = \sqrt{2a^2 - b^2}$$

$$b+c = 2a$$



$$\frac{AB}{\sin C} = 2R$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \\ 15 \overline{) 16875} \\ \underline{15} \\ 18 \\ 15 \overline{) 18} \\ \underline{15} \\ 37 \\ 35 \overline{) 37} \\ \underline{35} \\ 25 \\ 25 \overline{) 25} \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \\ + 12500 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$55553331$$

$$n-k-1 =$$

$$333$$

$$8-3-1 =$$

$$56 \times 5 = 280$$

$$6 + 10 + 12 + 12 + 10 + 6$$

$$672 + 280 = 952$$

$$93$$

$$28$$

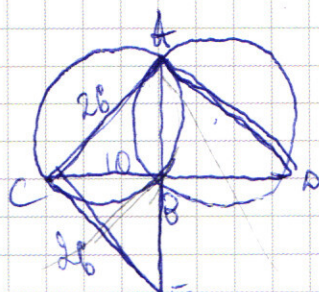
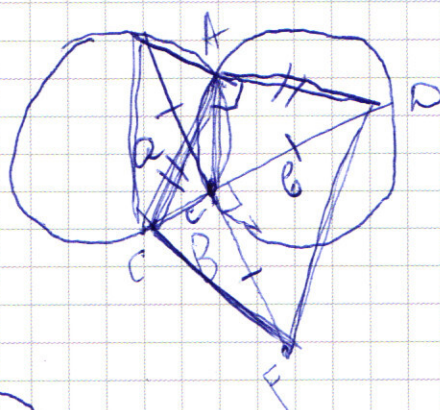
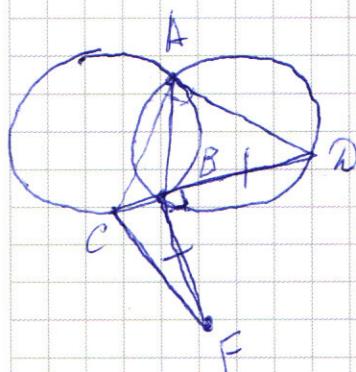
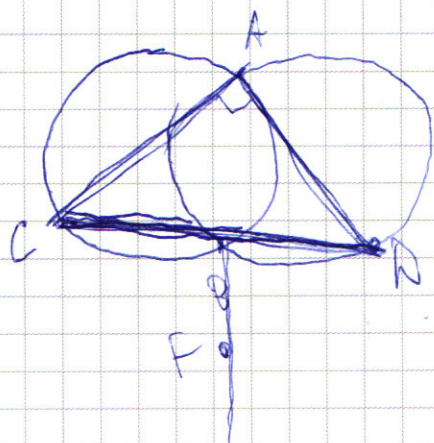
$$1680$$

$$840$$

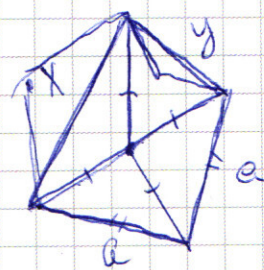
$$280$$

$$8 \times 7 = 56$$

$$56 \times 12 = 672$$



$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 26^2 \\ x^2 &= \frac{26^2}{2} \\ x^2 &= 13 \cdot 13 \cdot 2 \\ x &= 13\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$x^2 + y^2 = 2a^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot x \end{cases} \quad \begin{matrix} 3^x (1 + 4 \cdot 3^{81-x}) \\ x \cdot 3^{81} + 85 - x \end{matrix}$$

$$y \geq 5 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + 81 \cdot 3^{81} - 81 \rightarrow y < 81 \cdot 3^{81} - 4$$

$$5 \cdot 3^{81}$$

$$85 + 81 \cdot 3^{81} - 81$$

$$81 \cdot 3^{81} + 4$$

$$(x-4)3^{81} - 3^x - x + 85$$

$$x > 4$$

$$(x-4)3^{81} - 3^x - x + 85$$

$$81 \cdot 3^{81} + 4$$

$$82 \cdot 3^{81} + 3$$

$$83 \cdot 3^{81} + 2$$

$$84 \cdot 3^{81} + 1$$

$$85 \cdot 3^{81}$$

$$86 \cdot 3^{81}$$

$$81 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + 4 \cdot 3^{81} - 4$$

$$243 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + 5 \cdot 3^{81} - 5$$

$$3^{81} - 163$$

$$729 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + 6 \cdot 3^{81} - 6$$

$$2 \cdot 3^{81} - 650$$

$$3^{81} - 163$$

$$2 \cdot 3^{81} - 650$$

$$3 \cdot 3^{81} - 2109$$

$$80 \cdot (76 \cdot 3 - 1) 3^{80} + 5$$

$$2187 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + 7 \cdot 3^{81} - 7$$

$$76 \cdot 3^{81} - 3^{80} + 5$$

$$3 \cdot 3^{81} - 2109$$

$$79 \cdot 3^{81} - 3^{78} + 6$$

$$(x-4)3^{81} - 3^x - x + 85$$

$$5 \quad 3^{81} - 3^5 + 80$$

$$6 \quad 2 \cdot 3^{81} - 3^6 + 79$$

$$7 \quad 3 \cdot 3^{81} - 3^7 + 78$$

$$8 \quad 4 \cdot 3^{81} - 3^8 + 77$$

100

80

$$76 \cdot 3^{81} - 3^{80} + 5$$

81

$$77 \cdot 3^{81} - 3^{81} + 4$$

82

$$78 \cdot 3^{81} - 3^{82} + 3$$

$$83 \quad 79 \quad 83$$

$$84 \quad 80 \quad 84$$

$$85 \quad 81 \cdot 3^{81} - 81 \cdot 3^{81} + 0$$

0

$$3^{81} - 3^5 + 80$$

$$\begin{aligned} & \frac{3^{81}}{81 \cdot 3^{81}} - \frac{3^5}{3^{85}} + \frac{1}{80} - (3 \cdot 3^7 - 3) = \\ & \frac{1}{81} - \frac{1}{3^{85}} + \frac{1}{80} - (3^8 - 3) = \end{aligned}$$

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16 \quad 3 \quad 9 \quad 27 \quad 81 \quad 243$$

$$\frac{3^0}{3^0}$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

~~38~~

$$3^{81} \cdot 81 \cdot 41 - 3^{81} \cdot 81 \cdot 3 + 81 \cdot 3 + 81 \cdot 40 =$$

$$= 81(3^{81} \cdot 41 - 3^{81} \cdot 3 + 3 + 40) = 81(3^{81} \cdot 38 + 43)$$

$$b=2 \quad q=2 \quad n=3$$

$$2+4+8$$

$$6q^{n-1} - b$$

$$b=3 \quad q=3 \quad n=85$$

$$3 \cdot 3^{85} - 3 =$$

$$= 3^{86} - 3 =$$