

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

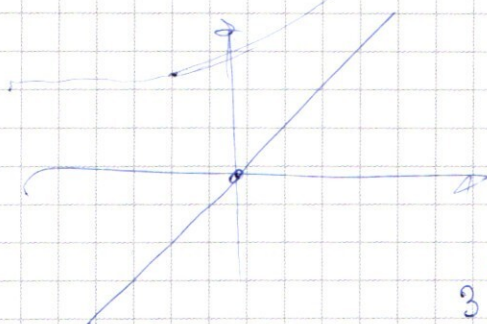
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad y \geq 3^x + 3^{82} + 3^{81} = 3^{81} (3^{x-81} + 4) \\ y < 3$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x \cdot 3^{81} - x + 85 > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x + x - 85 < (x - 4) \cdot 3^{81}$$

$$x \cdot (3^{81} - 1) + 85 > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 3^{82} + 3^{81} < 85 + 3^{81}x - x$$

$$\left(3^{x-81} + 4\right) \cdot 3^{81} < 85 + x \cdot 3^{81} - x + 3^{81}x + 4$$

$$x - 81 = t$$

$$81 - x + (x - 81) \cdot 3^{81} + 4 + \frac{3^{81} \cdot 81}{3^{85}}$$

$$\left(3^t + 4\right) \cdot 3^{81} < -t + t \cdot 3^{81} + 3^{85} + 4$$

$$\left(3^t + 4\right) \cdot 3^{81} < t \cdot (-1 + 3^{81}) + 3^{85} + 4$$

$$3^t + 4 < -\frac{t}{3^{81}} + t + 81 + \frac{4}{3^{81}}$$

~~не могу~~

$$\sum_{x=4}^{85} x \cdot (3^{81} - 1) - 3^x + 85 - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= \frac{4 \cdot (3^{81} - 1) + 85 \cdot (3^{81} - 1)}{2} \cdot 82 - 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 - 3^4 - 3^5 - \dots - 3^{85} =$$

$$= 41 \cdot (89 \cdot 3^{81} - 89) - 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 - \frac{81 \cdot (3^{82} - 1)}{2} =$$

$$3^4 + \dots + 3^{85} = \frac{3^4 \cdot (3^{82} - 1)}{3 - 1} = 81 \cdot \frac{81}{2} \cdot (3^{82} - 1)$$

=

$$\begin{array}{r} \cancel{85} \\ 82 \\ \hline 170 \\ \cancel{80} \\ \hline 6970 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{89} \\ 41 \\ \hline 89 \\ \cancel{356} \\ \hline 3649 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3649 \\ - 328 \\ \hline 3321 \\ \times 2 \\ \hline 6642 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6642 \\ 243 \\ \hline 6399 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6970 \\ - 3649 \\ \hline 3321 \\ + 3321 \\ \hline 40,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6399 \overline{) 2} \\ \underline{6} \\ - 3 \\ \underline{2} \\ - 19 \\ \underline{18} \\ - 19 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x - \sin 3x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 10x.$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos(2x) = 2 \cos 5x \sin 5x;$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos 5x \sin 5x.$$

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x = \cos 5x \sin 5x.$$

$$\frac{1}{2} \cos 5x \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$\frac{1}{2} \cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$a \text{ и } b \text{ и } \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \sqrt{2} (\cos 5x \cos 5x - \sin 5x \sin 5x)$$

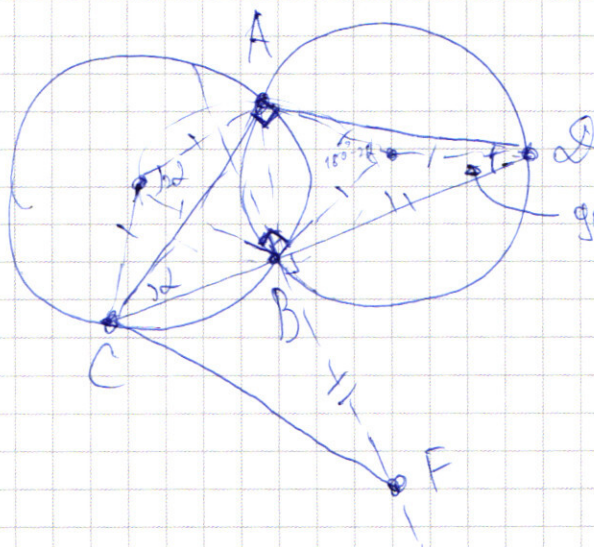
$$a + b - \sqrt{2} (ab - cd) = c + d.$$

$$\cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = 2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \sin 2x.$$

$$- \cos 2x \sin 5x = \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \sin$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x.$$

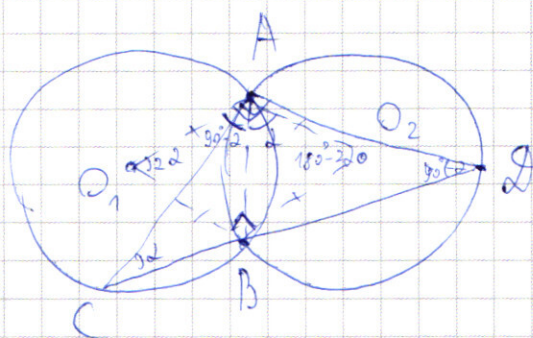


$$\angle CAO_2 = 90^\circ$$

$$R = 13$$

$$BF = BD$$

$$CF = ?$$



$$ABO_1O_2 - \text{line}$$

$$\angle O_1AO_2 = 90^\circ$$

$$2\alpha = 180^\circ - 2\alpha;$$

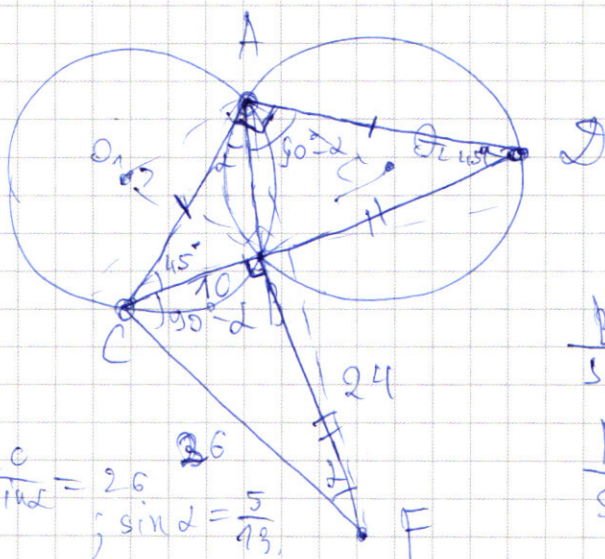
$$2\alpha = 90^\circ; \alpha = 45^\circ$$

$$AC = AD$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$BC^2 + BD^2 = CF^2$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$$\frac{10}{\sin \alpha} = 26; \sin \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 26$$

$$\frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 26;$$

$$BC^2 = 26^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$BD^2 = 26^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

$$CF^2 = 26^2; CF = 26$$

$$26^2 - 10^2 = 16 \cdot 36$$

$$4 \cdot 9 \cdot 36 \cdot 6 \cdot 4 = 24$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 5x \cos 4x = \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 4x - \sqrt{2} \sin 5x \cos 5x$$

$$\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} -$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right)$$

$$\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right)$$

$$\cos 10x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - 4x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 8x\right)$$

$$2 \cos 5x \cos 4x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

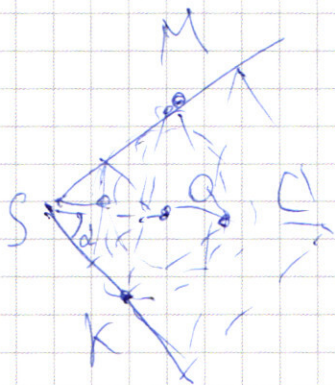
$$\cos 10x = \cos 3x \cdot \cos 7x - \sin 3x \sin 7x$$

$$a + b - \sqrt{2} (ab - cd) = c + d;$$

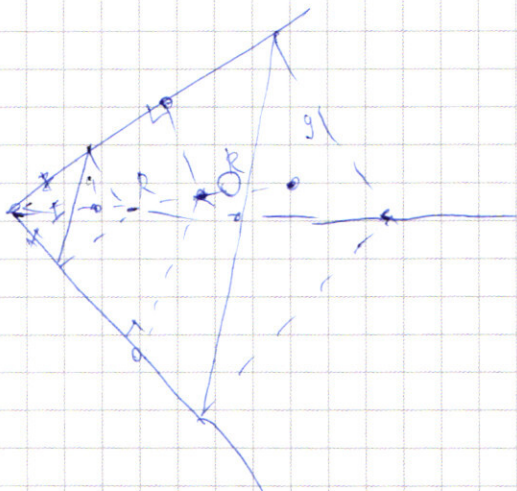
$$a + b - \sqrt{2} ab = c + d - \sqrt{2} cd.$$

$$a \cdot (1 - \sqrt{2} b) + b$$

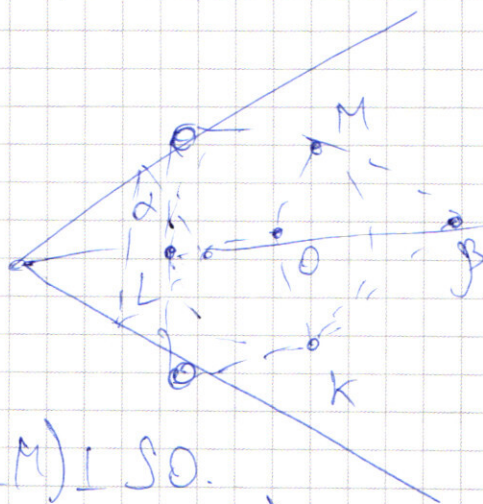
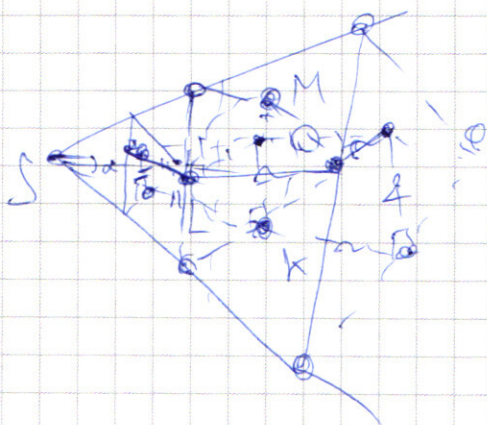
$$a - c + b - d = \sqrt{2} \cdot (ab - cd).$$



$$\angle = ? \quad S_{KLM} = ?$$



$$S = p \cdot r$$



$$(KLM) \perp SO.$$

$$\angle \pi \beta \pi (KLM).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$SK = SL = SM$

$(KLM) \parallel \angle \parallel B$

$\angle \parallel B$

$S_1 = p_1 \cdot r_1 = 4$

$S_2 = p_2 \cdot r_2 = 9$

$\sin \varphi = \frac{1}{5}$

$\cos \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\frac{p_1}{p_2} = k$ $\frac{r_1}{r_2} = k$

$\angle KSO = \angle MSO = \varphi$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{9} = k^2$; $k = \frac{2}{3}$

$\frac{SA}{SB} = \frac{2}{3}$; $\frac{SA}{SA+2R} = \frac{2}{3}$; $3SA = 2SA + 4R$

$SA = 4R$

$\frac{R}{x} = \frac{5R}{SN}$; $SN = 5x$

$\sin \varphi = \frac{1}{5}$ $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\frac{4R}{5x}$

$\frac{2\sqrt{6}}{5}$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 10x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos 2x = \cos 10x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$2 \cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$/ \cdot \cos 5x + \sin 5x$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$\alpha = \beta \quad \alpha = \pm \beta + 2\pi k$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\begin{array}{r} \times 105 \\ 8 \\ \hline 840 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 = 16875 = 5^2 \cdot 675 = 5^4 \cdot 3^3$

5 5 5 5 3 3 3 1

$8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!}$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 25} \\ \underline{150} \\ 187 \\ \underline{175} \\ 125 \end{array}$$

② $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x;$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 25} \\ \underline{50} \\ 175 \\ \underline{175} \\ 0 \end{array}$$

$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) - \cos 10x = 0.$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 8 \\ \hline 280 \end{array}$$

$\sin(x + \beta) = \sin x \cos \beta + \sin \beta \cos x$

$\cos(x + \beta) = \cos x \cos \beta - \sin x \sin \beta$

$\cos(x - \beta) = \cos x \cos \beta + \sin x \sin \beta$

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times 15 \\ \hline 280 \\ + 56 \\ \hline 1840 \\ + 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$2 \cos x \cos \beta = \cos(x + \beta) + \cos(x - \beta);$

$x + \beta = x \quad \frac{x+y}{2} = x \quad \frac{x-y}{2} = \beta$

$x - \beta = y$

$\cos x + \cos \beta = 2 \cos \frac{x+\beta}{2} \cos \frac{x-\beta}{2}$

$\cos(x - \beta) - \cos(x + \beta) = 2 \sin x \sin \beta;$

$\sin(x + \beta) = \sin x \cos \beta + \sin \beta \cos x$

$\sin(x - \beta) = \sin x \cos \beta - \sin \beta \cos x$

$\sin(x + \beta) + \sin(x - \beta) = 2 \sin x \cos \beta$

$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$$\textcircled{13} \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (-x)^{\lg(-x)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. & 10 = -x^{\lg(-x)} \end{cases}$$

$$\text{О.Д.З.: } y > 0; -x > 0; x < 0.$$

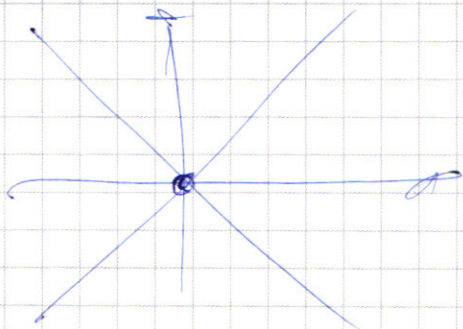
$$y > 0, x < 0$$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{y^2 \lg y} =$$

$$|y - x + 6| + |y + x - 6|$$

$$|y - (x - 6)| + |y + (x - 6)|$$

$$|y - x| + |y + x| = 12.$$



$$\sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{1 + 9^2} = 2\sqrt{10}.$$

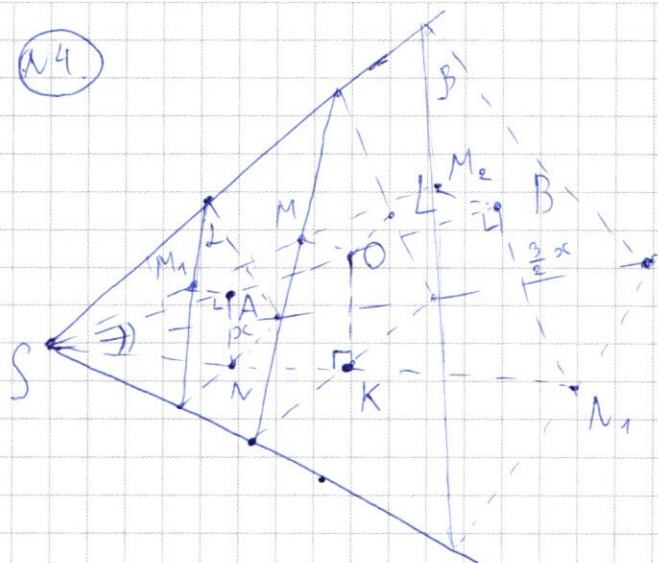
$$\sqrt{6^2 + 8^2} = 2\sqrt{3^2 + 4^2} = 2\sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10.$$

$$\sqrt{6^2 + 14^2} = 2\sqrt{3^2 + 7^2} = 2\sqrt{9 + 49} = 2\sqrt{58}$$

$$58 = 2 \cdot 29$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Площади сечений α и β :

$$S_{\alpha} = 4 \text{ и } S_{\beta} = 9$$

$OM = OL = OK = OA = OB = R$ - радиусы,
 A и B - (...) касания α и β со сферой

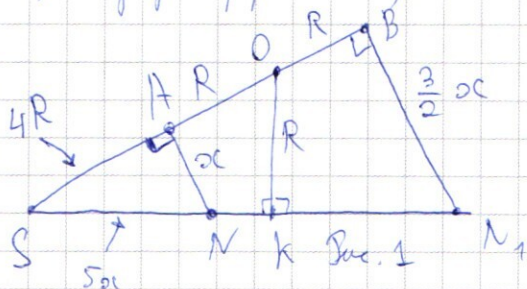
1) $\alpha \perp SO$ и $\beta \perp SO$, т.к. сечения

1) $\alpha \perp OA$ и $\beta \perp OB$ (плоскости касаются сферы), значит $\alpha \parallel \beta$,
сечения подобны, коэффициент подобия k (прямо, по которому
 α и β пересекают грани трёхгранного угла ||-ны).

$$k^2 = \frac{S_{\beta}}{S_{\alpha}}; \quad k = \frac{3}{2}$$

2) $SK \cap \alpha = N$; $SK \cap \beta = N_1$, тогда $NA \perp SO$ и $N_1B \perp SO$
(кас. к сфере). Плоскости $OK \perp$ грани трёхгран. угла, т.к. углы
кас. сферы в (...) K .

3) Радиус сферы: R ; $AN = x$, тогда $BN_1 = \frac{3}{2}x$ ($k = \frac{3}{2}$).



$$\triangle ASN \sim \triangle BSN_1; \quad \frac{AS}{SB} = \frac{AN}{BN_1};$$

$$\frac{AS}{2R+AS} = \frac{2}{3}; \quad 3AS = 4R + 2AS;$$

$$AS = 4R$$

$$\triangle ASN \sim \triangle KSO; \quad \frac{SN}{SO} = \frac{AN}{OK}; \quad \frac{SN}{5R} = \frac{x}{R}; \quad SN = 5x$$

$$\sin \angle NSA = \frac{AN}{SN} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5}; \quad \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}.$$

$$\triangle N \triangle ASN: SN^2 = AN^2 + AS^2;$$

$$25x^2 = x^2 + 16R^2; \quad 16R^2 = 24x^2; \quad 4R^2 = 6x^2;$$

$$4x^2 = \frac{2R^2}{3}; \quad x = \frac{\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}; \quad R = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x.$$

$$4.) \text{ Аналогично: } SM \cap \alpha = M_1; \quad SM \cap \beta = M_2.$$

$$SL \cap \alpha = L_1; \quad SL \cap \beta = L_2.$$

$$\text{Потому: } SL = SM = SK \text{ (кас. к сферам)}, \text{ значит: } \angle LSO = \angle MSO = \angle KSO;$$

$$\triangle SAM_1 = \triangle SAL_1 = \triangle SAN$$

$$\triangle SAM_1 = \triangle SAL_1 = \triangle SAN \text{ по катетам и общ. углу.}$$

$$\text{Аналогично: } \triangle SBM_2 = \triangle SBL_2 = \triangle SBK.$$

$$\text{Следовательно: } AN = AM_1 = AL_1 \text{ и } BN = BM_2 = BL_2,$$

A и B - центры впис. окр. в сечениях.

Площадь сечения (KLM) равна S_1 .

$$\text{Сечения } \alpha \text{ и } (KLM) \text{ подобны, т.к. } \frac{SM}{SA} = \frac{SO}{SK} \text{ т.к. } \frac{SM}{SA} = \frac{SO}{SK};$$

$$\frac{SM_1}{SA} = \frac{SO}{SM}; \quad \frac{SL_1}{SA} = \frac{SO}{SL} \text{ (из подобия } \triangle\text{-ков, как на рис. 1)}$$

$$\text{Потому: } \frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{OK}{AN} \right)^2 = \left(\frac{R}{x} \right)^2 = \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x}{x} \right)^2 = \frac{3}{2};$$

$$S_1 = \frac{3}{2} S_2 = \frac{3}{2} \cdot 4 = 6.$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}; \quad S_{\text{сеч}} = 6.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$\cos 2x \cdot \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \right) = \sqrt{2} \sin 5x \cos 5x.$$

$$\cos 10x = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x.$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x$$

$$a + b = \sqrt{2} ab$$

$$\cos 7x \cos 3x = \frac{1}{2} \cos 10x + \frac{1}{2} \cos 5x.$$

$$(a+b)^2 \geq 2ab$$

$$\sin^2 x =$$

$$a + b \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt{ab}$$

$$\cos 7x \cos 3x + \sin 7x \sin 3x$$

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 7x \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) = \cos 10x$$

$$\frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) \cos 2x = \sin 5x \cos 5x.$$

200

$$\cos 5x \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \sin 5x = \sin 5x \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \sin 5x$$

$$\cos 5x \cdot \left(\sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \sin 5x \cdot \left(\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right)$$

$$(N2) \cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 10x;$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos 2x = \overset{2\cos^2 5x - 1}{\cancel{\cos 10x}} \cos 5x;$$

$$\cos 7x + \cos 3x - (\sin 7x + \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$\cancel{2 \cos 5x} \cos 2x - \cancel{2 \sin 5x} \cos 2x = \sqrt{2} \cdot (\cos^2 5x - \sin^2 5x);$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x; \end{cases} \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0 \\ \cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi}{4} - 5x = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\cancel{2x - 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}} \quad 5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{-3x} \quad 5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Answer:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для $x \leq 0$: ~~$A \geq 4 \cdot 3^{81}$~~

~~$85 + x \cdot 3^{81} - x > 4 \cdot 3^{81}$~~ ; X

~~$B \leq 85$~~

Для $x > 0$: $A = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$B = 85 + (3^{81} - 1)x$

$B > A$

$x = 1$: $A = 3 + 4 \cdot 3^{81}$ $B = 84 + 3^{81}$ $B < A$ X

$x = 2$: $A = 9 + 4 \cdot 3^{81}$ $B = 83 + 2 \cdot 3^{81}$ $B < A$ X

$x = 3$: $A = 27 + 4 \cdot 3^{81}$ $B = 82 + 3 \cdot 3^{81}$ $B < A$ X

$x = 4$: $A = 81 + 4 \cdot 3^{81}$ $B = 81 + 4 \cdot 3^{81}$ $B = A$ X

$x = 5$: $A = 81 \cdot 3 + 4 \cdot 3^{81}$ $B = 80 + 5 \cdot 3^{81}$ $B > A$ ✓

$x \geq 5$: $x = 6$: $A = 3^6 + 4 \cdot 3^{81}$ $B = 79 + 6 \cdot 3^{81}$ ✓

$x = 81$: $A = 3^{81} \cdot 5$ $B = 804 + 3^{81} \cdot 81$ $B > A$ ✓ 36

$A < B$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$; A

~~$3^{81} (x - 4) \cdot 3^{81} = 3^x - 85 + x$~~

$x = 85$; $3^4 \cdot 3^{81} = 3^{85}$

$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

$x \in [4; 85]$

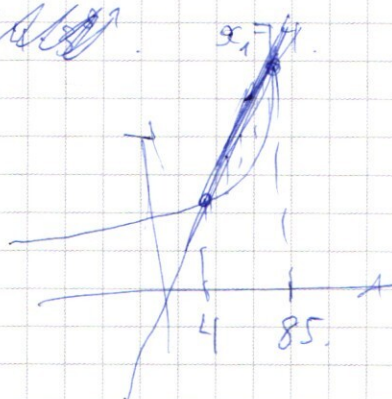
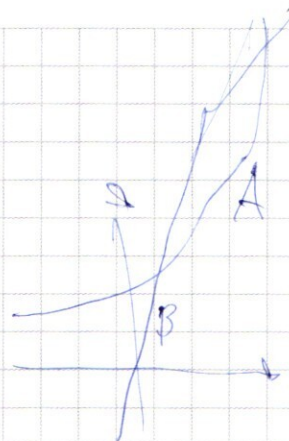
$24 \quad S_2 = \frac{2 \cdot 3}{1} = 6$

~~$y = t + 85 - x + 4 \cdot 3^{81}$~~

$t \geq 3^x - 85 + x$ $x = 4$: $t = 0$

$t < (x - 4) \cdot 3^{81}$ $x = 85$: $t = 0$

$t: (x - 4) \cdot 3^{81} - 3^x + 85 - x$



$$\cos 2 \neq \cos 3$$

$$\sin 2 + \sin 3 = \sin \left(\frac{2+3}{2} + \frac{2-3}{2} \right) + \sin \left(\frac{2+3}{2} - \frac{2-3}{2} \right) =$$

$$= 2 \sin \frac{2+3}{2} \cos \frac{2-3}{2}$$

$$\cos 7x - \sin 3x + \cos 3x - \sin 7x = \sqrt{2} \cos 10x.$$

$$\cos 2 - \sin 2 = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2 \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2 \right).$$

$$\sin$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x.$$

$$\cancel{2} \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x \cos 5x - \cancel{2} \sin 5x \cos 2x = 0, / \sin 5x.$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \sin 5x \cos 5x = 0.$$

$$\cos 2x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = \sqrt{2} \sin 5x \cos 5x.$$

$$\text{on } \tan 2 = \frac{1}{2}; \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2x \cdot \cos 5x$$

$$\cos 5x \cdot \left(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = \sin 5x \cdot \left(\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right)$$

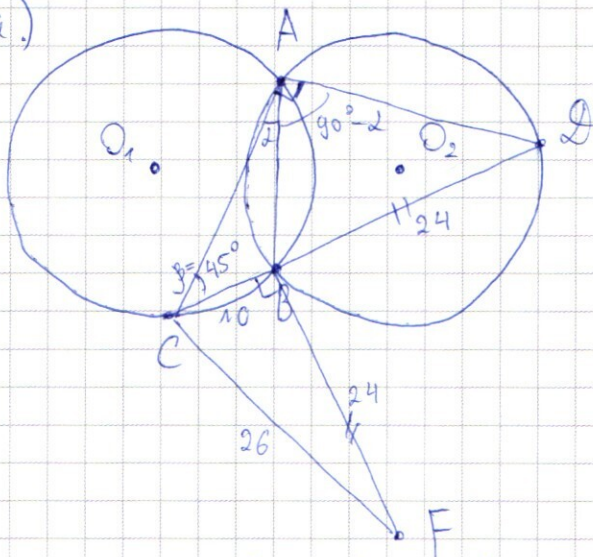
$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \tan 5x = \frac{\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x}{\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x}$$

$$\tan 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \cos 2x = 0;$$

$$(\tan 5x - 1) \cos 2x = \sqrt{2} \cos 5x.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NG. a.)



$$\begin{aligned}BF &= BD; \\ R_1 &= R_2 = 13; \\ \angle CAD &= 90^\circ \\ CF &= ?\end{aligned}$$

1.) $\mathcal{U}_g \triangle BCF: CF^2 = BC^2 + BF^2; CF^2 = BC^2 + BQ^2 (*)$.

2.) $\angle CAB = 2$, maka $\angle BAC = 90^\circ - 2$

3.) $u_8 \triangle ABC$: $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2 R_1$; $BC = 2 R_1 \sin \alpha$; $BC^2 = 2 G^2 \cdot \sin^2 \alpha$

4.) $U_3 \triangleq B A \varnothing$: $\frac{B \varnothing}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2 R_2$; $B \varnothing = 2 R_2 \cdot \cos \alpha$; $B \varnothing^2 = 2 \sigma^2 \cos^2 \alpha$

5.) Проверка б(*): $CF^2 = 26^2 \cdot (\sin^2 \angle + \cos^2 \angle) = 26^2$; $CF = 26$.

Omber: 26

d.) $BC=10$; $S_{ACF}=?$

$$1.) \angle ACB = \beta; \angle ABC = 90^\circ - \beta.$$

2) $\angle AO_1B = 2\angle ACB = 2\beta$ (центральный и вписанный)

Аналогично: $\angle A O_2 B = 2 \angle A Q B = 180^\circ - 2\beta$.

3.) $\angle A O_1 B = \angle A O_2 B$, т.к. окр. равные; $2\beta = 180^\circ - 2\beta$; $\beta = 45^\circ$;

$$\angle ACQ = \angle AQC = 45^\circ, \quad AC = AQ$$

4.) $\triangle BCF$: $BF^2 = CF^2 - BC^2 = 26^2 - 10^2 = 16 \cdot 36$; $BF = 24$; $BD = 24$

$$5.) \triangle ACF: \triangle ACD: AC = AD = \frac{CS}{\sqrt{2}} = \frac{34}{\sqrt{2}} = 17\sqrt{2}$$

$$6.) \triangle BCF: \sin \angle BCF = \frac{24}{26} = \frac{12}{13} \text{ и } \cos \angle BCF = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$7.) \sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \angle BCF) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sin \angle BCF + \cos \angle BCF) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{17}{13} = \frac{17}{13\sqrt{2}}$$

$$8.) S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \frac{17}{13\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot 17^2 \cdot 2 = 17^2 = 289$$

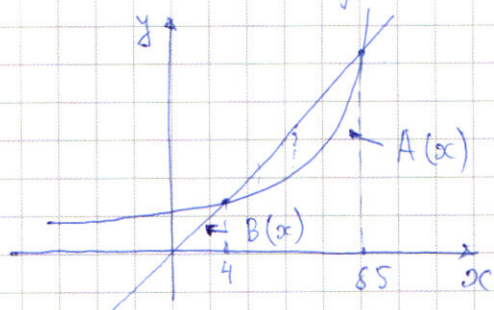
Ответ: $S_{ACF} = 289$

(N7.)
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Сделаем замену $A = 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$ — показательная функция, сдвинутая вверх.

$B = 85 + (3^{81} - 1)x$ — линейная, возрастающая функция.

Ит.х. $A(x)$ — выпукла вниз, то:



$A \leq B$ на промежутке $[4; 85]$, т.к.:

$$A(4) = B(4): 81 + 4 \cdot 3^{81} = 4 \cdot 3^{81} + 81$$

$$A(85) = B(85): 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81};$$

$$81 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81}$$

Ит.х.:
$$\begin{cases} y \geq A \\ y < B \end{cases}$$
, но решения могут быть только при $x \in [4; 85]$,

причем при каждом $x \in [4; 85]$ существует $B - A \geq 0$ решений.

$$B - A = (3^{81} - 1) \cdot x - \frac{x^2}{2} + 85 - 4 \cdot 3^{81}$$

Всего решений: $X = \sum_{x=4}^{x=85} (B - A)$

$$X = \frac{4 \cdot (3^{81} - 1) + 85 \cdot (3^{81} - 1)}{2} \cdot 82 - \frac{3^4 \cdot (3^{82} - 1)}{3 - 1} + 85 \cdot 82 - 82 \cdot 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= \frac{89 \cdot (3^{81} - 1)}{2} \cdot 41 - \frac{81 \cdot (3^{82} - 1)}{2} + 6970 - 328 \cdot 3^{81} =$$

$$= 3649 \cdot 3^{81} - 3649 - \frac{243}{2} \cdot 3^{81} + \frac{81}{2} + 6970 - 328 \cdot 3^{81} =$$

$$= \frac{(664248 - 243) \cdot 3^{81}}{2} + 3321 + \frac{81}{2} = \frac{6399}{2} \cdot 3^{81} + 3361,5 = 3199,5 \cdot 3^{81} + 3361,5$$

Ответ: $3199,5 \cdot 3^{81} + 3361,5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N 5)
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$
 имеет ровно 2 реш.

$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a^{(*)}$ при $a < 0$ — пуст. множество;

при $a = 0$ точка, а при $a > 0$ окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром $O_1(6; 8)$

$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ получается симметрией $(*)$ отн. OY ,
а затем отн. OX (куски ранее бывшие слева от OY и снизу от OX стирался).

При $a < 0$ решений нет, они не подходят.

(1): $|y-(x-6)| + |y+(x-6)| = 12$ получается сдвигая выраже вдоль OX на 6 ед.

из графика: $|y-x| + |y+x| = 12$ $(**)$

$(**)$: 1.) при $y \geq x$; $y \geq -x$: $2y = 12$; $y = 6$

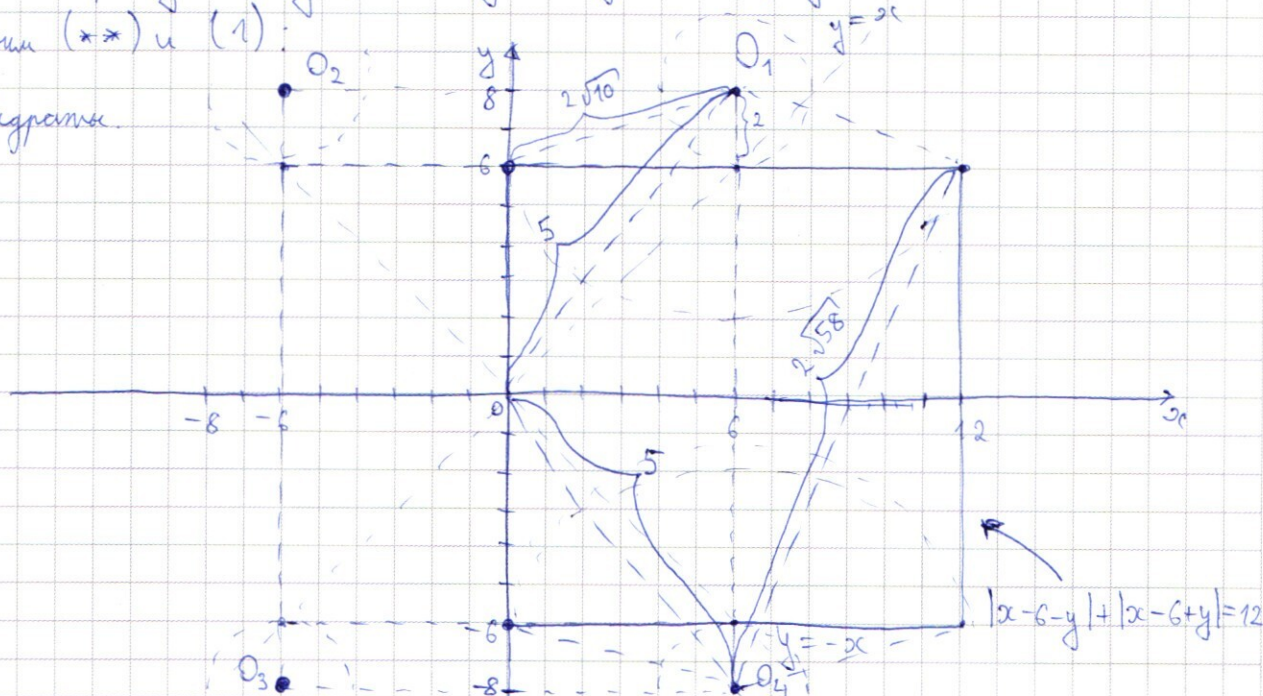
2.) при $y \geq x$; $y \leq -x$: $y - x - y - x = 12$; $x = -6$

3.) при $y \leq x$; $y \geq -x$: $-y + x + y + x = 12$; $x = 6$

4.) при $y \leq x$; $y \leq -x$: $-y + x - y - x = 12$; $y = -6$

Построим $(**)$ и (1):

это квадраты.



- 1.) Тип $R < 2$: нет реш.
- 2.) Тип $R = 2$: 2 реш.: $(6; 6)$; $(6; -6)$
- 3.) Тип $2 < R \leq 2\sqrt{10}$: 4 реш.
- 4.) Тип $2\sqrt{10} < R < 5$: 4 реш.
- 5.) Тип $R = 5$: 2 реш.: $(0; 0)$; ~~(12; 0)~~ $(12; 0)$.
- 6.) Тип $5 < R < 14$: 4 реш.
- 7.) Тип $R = 14$: 6 реш.
- 8.) Тип $14 < R \leq 2\sqrt{58}$: 8 реш.
- 9.) Тип $R = 2\sqrt{58}$: 4 реш.
- 10.) Тип $R > 2\sqrt{58}$: 0 реш.

Умк, $R_1 = 2$; $R_2 = 5$; $\begin{cases} \sqrt{a} = 2 \\ \sqrt{a} = 5 \end{cases} \begin{cases} a = 4 \\ a = 25 \end{cases}$

Ответ: 4; 25.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N1) Произведение цифр каждого из чисел: $16875 = 5^4 \cdot 3^3$,
значит 4 цифры - это 5. В произведении есть множитель 3^5 , значит
оставшиеся 4 цифры - это 3, 3, 3, 1 или 9, 3, 1, 1

1) 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1.

Ставим 1: 8 см.

Ставим еще ~~четыре~~ 5 или 3: $\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ см.

5 доставляются однозначно.

Способов: $8 \cdot 35 = 280$ см.

2) 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1.

Ставим 9: 8 см.

Ставим еще 3: 7 см.

Ставим еще две 1: $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ см.

5 доставляются однозначно.

Способов: $8 \cdot 7 \cdot 15 = 840$

Итого способов: $280 + 840 = 1120$.

Ответ: 1120.

(N2) ~~$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x$~~

~~$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x;$$~~

~~$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2} \cos 10x;$$~~

~~$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \cos 10x;$$~~

~~$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cdot \cos(-2x) = \cos 10x;$$~~

$$\textcircled{N3} \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Ограничения на x и y : $x < 0$; $y > 0$. ($\lg y$ сущ. и $\lg(-xy)$ сущ.)

Преобразования на ограничениях:

$$(1): \frac{(x^4)^{\lg y}}{y^2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y};$$

$$\frac{(x^4)^{\lg y}}{10^2} = 10 \cdot (-x)^{\lg y};$$

$$(-x)^{4 \lg y} = 10^3 \cdot (-x)^{\lg y};$$

$$(-x)^{4 \lg y} = (-x)^{3 \lg(-x) + \lg y};$$

$$4 \lg y = 3 \lg(-x) + \lg y;$$

$$\lg(-x) = \lg y;$$

$$-x = y; y = -x (*).$$

Подставим (*) в (2):

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0; \quad 2x^2 + 4x = 0; \quad x^2 + 2x = 0;$$

$$x(x+2) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \text{ не принадлежит огу. } x < 0 \\ x=-2. \end{cases}$$

$$x = -2: \text{из } (*) : y = 2.$$

Решение $(-2; 2)$ принадлежит ограничениям.

Ответ: $(-2; 2)$