

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Разложим 16875 на простые множители

$$16875 = 5 \cdot (3375) = 5^2 (675) = 5^3 (135) = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

Произведение восьми натуральных чисел от 1 до 9 равно $5^4 \cdot 3^3$

(0 среди них нет н.к. $16875 \neq 0$).

Среди цифр от 1 до 9, только 5 делится на 5. Значит четыре цифры равны 5.

Осталось 27. $27 = 3^3$, то есть

$$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$27 = 3 \cdot 9$$

Значит еще в числе либо 3 тройки, либо 3 и 9, а остальные - единицы.

В первом и втором тройками вариантов будет

$$\frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} \quad (8! - \text{перестановка всего, } 4! - \text{перестановка 5, } 3! - \text{тройка, } 1! - \text{единица})$$

А во втором случае:

$$\frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} \quad (8! - \text{перестановка всего, } 4! - \text{перестановка 5, } 2! - \text{единица, } 1! - \text{тройка и } 1! - \text{девятка})$$

Все перестановки - числа н.к. среди цифр нет 0. Тогда всего вариантов:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 =$$

$$= 56 \cdot 20 = 560 \cdot 2 = 1120.$$

Ответ: 1120 вариантов.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases} \quad N5$$

Пусть $x' = x - 6$ тогда

$$|x' - y| + |x' + y| = 12$$

Рассмотрим 4 варианта

раскрытия модулей

$$1) x' - y \geq 0, x' + y \geq 0 \quad 2) x' - y \leq 0, x' + y \leq 0$$

$$x' - y + x' + y = 12$$

$$x' = 6$$

$$\begin{cases} 6 - y \geq 0 \\ 6 + y \geq 0 \end{cases}$$

$$y \in [-6; 6]$$

$$-x' + y - x' - y = 12$$

$$x' = -6$$

$$\begin{cases} -6 - y \leq 0 \\ -6 + y \leq 0 \end{cases}$$

$$y \in [-6; 6]$$

$$y \in [-6; 6]$$

$$3) x' - y \geq 0, x' + y \leq 0$$

$$x' - y - x' - y = 12$$

$$y = -6$$

$$\begin{cases} x' + 6 \geq 0 \\ x' - 6 \leq 0 \end{cases}$$

$$x' \in [-6; 6]$$

$$x' \in [-6; 6]$$

$$4) x' - y \leq 0, x' + y \geq 0$$

$$-x' + y + x' + y = 12$$

$$y = 6$$

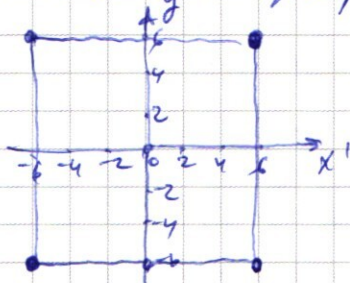
$$\begin{cases} x' - 6 \leq 0 \\ x' + 6 \geq 0 \end{cases}$$

$$x' \in [-6; 6]$$

$$x' \in [-6; 6]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Построим график:



Получился квадрат, причём
все вершины выкошены.

Теперь посмотрим на
оставшиеся условия

$$(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a$$

В I четверти это будет

$$(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = a \quad \text{то есть окружность}$$

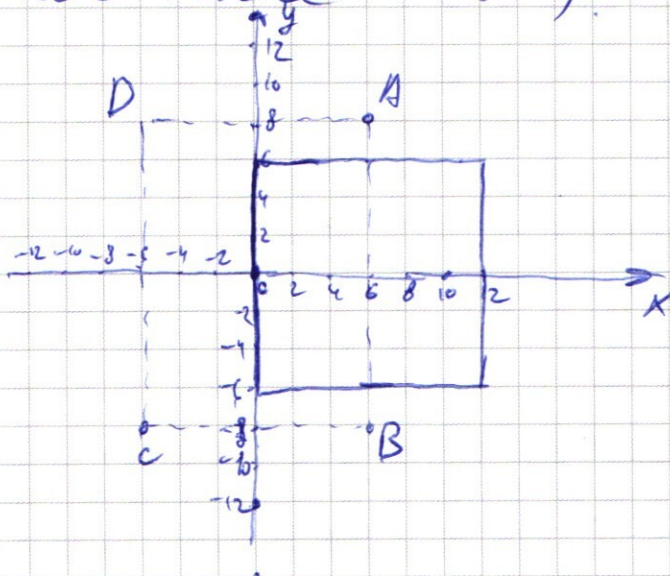
(это (ее часть в I четверти) с центром
в $6; 8$ и радиусом $\sqrt{a}$, а в остальных

четвертях она стоит симметрично,

то есть это 4 куса окружности,

не выходящие из ~~своей~~ своей четверти

и с центрами $(\pm 6; \pm 8)$ (модус
соединение $+$ и $-$).



Квадрат свивается
на 6 единиц т.к.

$$x = x' + 6$$

В силу симметрии от
оси ОУ, точки

пересечения окружностей
из D и C с квадратом
~~совпадут~~ будут

Также и точками пересечения с окружностями из B и A , (т.к. окр. из C и D не могут перейти через $x=0$).

Значит про C и D можно забыть. Остающаяся картинка симметрична относительно осей $x=6$ и $y=0$.

Значит, если есть пересечение, не лежащее на осях симметрии, то общих точек все меньше 4, а нам нужно 2. Значит наши точки пересечения это либо

$(2; 0)$ и $(12; 0)$, либо $(6; 6)$ и $(6; -6)$.

Во втором случае радиус окружности $r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ и $a = r^2 = 100$.

(Других общих точек при $a=100$ нет т.к. расстояние до верхнего отрезка $14 > 10$, а максимальное y мытого $\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} < 10$).

А в первом случае либо $r=2$ и $a=r^2=4$, либо $r=14$ и $a=r^2=196$, но $r=a=4$ подходит (т.к. других точек ^{пересечения} ~~касания~~ не будет т.к.

$\sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} > 2$ и $14 > 2$).

А $r=14$ не подойдет т.к. будут 4 общие точки с базовыми отрезками, ~~но есть т.к. $\sqrt{40} < 44 < \sqrt{6^2 + 14^2}$, но по~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

так как расстояние до их ближайшей точки $\sqrt{6^2+2^2} = \sqrt{40} < 14$, а до наиболее далекой $\sqrt{6^2+14^2} > 14$, то по непрерывности будет ещё хотя бы одна другая точка, что нам не подходит.

Ответ: $a=4$, $a=100$.

№7
При данном x , количество возможных значений y :

$85 + (3^{81} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{81}$, если это меньше 1, то нельзя.

~~Найдём~~

Пусть $n(x) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x + 4 \cdot 3^{81}$,

тогда найдём при каких x , $n(x) > 0$.

При $x \leq 3$ $n(x) \leq 0$ м.к. разности:

$$n(x) = 85 + 3^{81}x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

$$\leq 85 - x - 3^x - 3^{81} \leq -x - 3^x - 3^{80} < 0$$

м.к. при $x \in [-20; 3]$, 3^{80} больше

чем $|x| + |3^x|$ и даёт член отрицательный,

а при $x < -$

$-n(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - (3^{81} - 1)x$ будет не

больше 0 м.к. $3^x \geq 0$, то

$$\begin{aligned}
 -n(x) &\geq 4 \cdot 3^{81} - 85 - (3^{81} - 1)x \geq \\
 &\geq 3^{81} - 85 + 3 \cdot 3^{81} - (3^{81} - 1)x \geq \\
 &3 \cdot 3^{81} \geq (3^{81} - 1)x \quad \text{при } x \leq 3, \text{ тогда} \\
 &\geq 3^{81} - 85 > 0, \quad \text{значит } n(x) < 0.
 \end{aligned}$$

Остались $x \geq 4$.

Заметим, что при $n(85) = 0$, действительно

$$\begin{aligned}
 n(85) &= 85 + (3^{81} - 1) \cdot 85 - 3^{85} - 4 \cdot 3^{81} = \\
 &= 85 + 85 \cdot 3^{81} - 85 - 81 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} = \\
 &= 85 \cdot 3^{81} - 85 \cdot 3^{81} = 0.
 \end{aligned}$$

при $x \geq 86$, $n(x) \leq 0$ м.к.

$$\begin{aligned}
 n(x) &= 85 + 3^{81} \cdot x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = \\
 &= (85 - x) + 3^{81} \cdot x - 3^{81} \cdot 3^{x-81} - 4 \cdot 3^{81} = \\
 &= (85 - x) + 3^{81} (x - 3^{x-81} - 4) \\
 85 - x &< 0 \quad \text{и} \quad x - 3^{x-81} - 4 \leq 0 \Rightarrow n(x) < 0.
 \end{aligned}$$

второе верно м.к.

$$\begin{aligned}
 x - 3^{x-81} - 4 &\leq 0 \\
 \uparrow \\
 x - 4 &\leq 3^{x-81}
 \end{aligned}$$

При $x = 85$ достигается равенство, при доказана ММЧ.

База: равенство при $x = 85$

Предположение: $k - 4 \leq 3^{k-81}$

Шаг:

$$(k+1) - 4 = k - 4 + 1 \leq 3^{k-81} + 1 \leq 3^{k+1-81}$$

м.к. $k+1-81 \geq 4$ при этих k . т.к. g .

Остались $x \leq 84$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для $4 \leq x \leq 84$ доказать что $n(x) \geq 0$.
~~н(х) = для~~

$$n(x) = 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

$$n(4) = 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 - 81 - 4 \cdot 3^{81} = 0$$

Докажем для $5 \leq x \leq 84$:

$$n(x) = 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 3^{81}(x-4) + (85-x) - 3^x \geq$$

$$\geq 3^{81} - 3^x, \text{ то есть для } x \leq 81$$

мы доказали

$x = 82, 83$ и 84 рассмотрим отдельно

$$n(82) = 85 + 82 \cdot 3^{81} - 82 - 3^{82} - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 3 + 82 \cdot 3^{81} - 3 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 3 + 75 \cdot 3^{81} > 0.$$

$$n(83) = 85 + 83 \cdot 3^{81} - 83 - 3^{83} - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 2 + 83 \cdot 3^{81} - 9 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} = 2 + 70 \cdot 3^{81} > 0$$

$$n(84) = 85 + 84 \cdot 3^{81} - 84 - 3^{84} - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 1 + 84 \cdot 3^{81} - 3^{81} \cdot 27 - 4 \cdot 3^{81} = 1 + 3^{81} \cdot 53 > 0.$$

Значит $n(x) \geq 0$ при $x \in [4; 84]$,

а при остальных $n(x) \leq 0$.

Значит наименьшее количество пер S :

$$S = \sum_{x=4}^{x=84} n(x)$$

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_{k=4}^{x=84} n(x) = \sum_{k=4}^{x=84} (85 + 3^{87}x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{87}) = \\
 &= 87 \cdot 85 - 87 \cdot 4 \cdot 3^{87} + \sum_{k=4}^{x=84} (3^{87}x - x - 3^x) = \\
 &= 87 \cdot 85 - 87 \cdot 4 \cdot 3^{87} + \frac{(84+4) \cdot 87}{2} (3^{87} - 1) - \sum_{k=4}^{x=84} 3^k = \\
 &= 87 \cdot 85 - 87 \cdot 4 \cdot 3^{87} + 44 \cdot 87 \cdot 3^{87} - 44 \cdot 87 - \sum_{k=4}^{x=84} 3^k = \\
 &= 87 \cdot 41 + 87 \cdot 40 \cdot 3^{87} - \sum_{k=0}^{x=84} 3^k + 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = \\
 &= 87 \cdot 41 + 87 \cdot 40 \cdot 3^{87} + 40 - \sum_{k=0}^{x=84} 3^k = \\
 &\sum_{k=0}^{x=84} 3^k - \text{сумма геометрической} \\
 &\text{прогрессии, известно, что она} \\
 &\text{равна } \frac{3^{85} - 1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 87 \cdot 41 + 87 \cdot 40 \cdot 3^{87} + 40 - \frac{3^{85} - 1}{2} = \\
 &= (87 \cdot 41 + 40) + 3^{87} \cdot 87 \cdot 40 - 3^{87} \cdot \frac{3^4}{2} + \frac{1}{2} \\
 &= (87 \cdot 41 + 40 + \frac{1}{2}) + 3^{87} (87 \cdot 40 - \frac{81}{2}) = \\
 &= 3361,5 + 3199,5 \cdot 3^{87}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 87 \\
 41 \\
 \hline
 324
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 87 \\
 40 \\
 \hline
 3240
 \end{array} \\
 \times \quad \begin{array}{r}
 81 \\
 324 \\
 \hline
 3321
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 40,5 \\
 3199,5 \\
 \hline
 40 \\
 3361
 \end{array}
 \end{array}$$

Ответ: $3361,5 + 3199,5 \cdot 3^{87}$

№3

Замечая, что в записи участвует $\lg y$, значит по ОДЗ $y > 0$, при этом участвует и $\lg(-xy)$, значит $-xy > 0$ и $x < 0$.

Пусть $z = -x > 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{z^4}{y^2}\right)^{\lg y} = z^{\lg y z} \\ 2y^2 + yz - z^2 + 4z - 8y = 0 \end{cases}$$

$$(2y - z)(y + z) + 4(z - 2y) = 0$$

$$(2y - z)(y + z) - 4(2y - z) = 0$$

$$(2y - z)(y + z - 4) = 0$$

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y - z = 0 \\ y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

Пусть $z = 2y$, тогда

$$\left(\frac{(2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + 2 \lg y}$$

$$2^{4 \lg y} \cdot y^{2 \lg y} = 2^{\lg 2 + 2 \lg y} \cdot y^{\lg 2 + 2 \lg y}$$

$$y^{2 \lg y} \neq 0 \text{ т.к. } y > 0 \Rightarrow 2 \lg y$$

$$\text{Сократили на } y^{2 \lg y}, y^{2 \lg y} \neq 0 \text{ т.к. } y > 0$$

$$2^{2 \lg y} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2} \quad \text{сократили на } 2^{2 \lg y}, 2^{2 \lg y} \neq 0 \text{ т.к. } 2 > 0$$

$$(10^{\lg 2})^{2 \lg y} = (10^{\lg 2})^{\lg 2} \cdot (10^{\lg y})^{\lg 2}$$

$$10^{2 \lg 2 \lg y} = 10^{\lg 2 \lg y + \lg 2 \lg 2}$$

м.к. $10^x \uparrow$ при $\forall x \in \mathbb{R}$, то

$$2 \lg 2 \lg y = \lg 2 \lg y + \lg 2 \lg 2$$

$$\cancel{\lg 2} \lg y = \lg 2 \lg 2$$

м.к. $\lg 2 \neq \lg 1 = 0$, то

$$\lg y = \lg 2$$

и м.к. $\lg y \uparrow$ при $\forall y \in \mathbb{R}$, то

$y = 2$, тогда $z = 4$ и $x = -4$. (под 003 подставить)

и теперь $y + z - 4 = 0 \Leftrightarrow z = 4 - y$.

$$\left(\frac{(4-y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)y)}$$

$$(4-y)^{4 \lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)y)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$\left(10^{\lg(4-y)}\right)^{4 \lg y} = \left(10^{\lg(4-y)}\right)^{\lg((4-y)y)} \cdot \left(10^{\lg y}\right)^{2 \lg y}$$

$$10^{4 \lg(4-y) \lg y} = 10^{\lg(4-y)(\lg(4-y) + \lg y)} \cdot 10^{2 \lg y \lg y}$$

м.к. $10^x \uparrow$ при $\forall x \in \mathbb{R}$, то

$$4 \lg(4-y) \lg y = \lg(4-y)(\lg(4-y) + \lg y) + 2 \lg y \lg y$$

$$3 \lg(4-y) \lg y = \lg(4-y) \cdot \lg(4-y) + 2 \lg y \lg y$$

$$(\lg(4-y) - 2 \lg y)(\lg(4-y) - \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} \lg(4-y) - 2 \lg y = 0 \\ \lg(4-y) - \lg y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-y = y^2 \\ 4-y = y \end{cases} \begin{matrix} \text{м.к.} \\ \lg y \uparrow \text{ при} \\ \forall y \in \mathbb{R}. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \text{ известно что } y > 0, \\ y = 2 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = -2 \text{ (подписать под 003)} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} > 0 \quad \text{н.к.} \quad \sqrt{17} > 4$$

$$z = 4 - y = \frac{8 - \sqrt{17} - 1}{2} = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} > 0 \quad \text{н.к.} \quad 7 = \sqrt{49} > \sqrt{17}$$

$$x = \frac{\sqrt{17}-7}{2}, \quad \text{что подходит под ОДЗ}$$

Ответ: $y = z, \quad x = -4$

$$y = z, \quad x = -2$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}, \quad x = \frac{\sqrt{17}-7}{2}$$

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

По формуле Муавра получим, что

$$\cos 10x = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^{10}) =$$

$$= \cos^{10} x - \cos^8 x \sin^2 x + \cos^6 x \sin^4 x -$$

$$+ \cos^4 x \sin^6 x + \cos^2 x \sin^8 x - \sin^{10} x =$$

$$= \cos^8 x \cos 2x + \cos^4 x \cos 2x +$$

$$+ \cos^4 x \sin^4 x \cos 2x + \sin^8 x \cos 2x =$$

$$= \cos 2x (\cos^8 x + \cos^4 x \sin^4 x + \sin^8 x)$$

~~$\cos 5x$~~

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 2x (\cos^8 x + \cos^4 x \sin^4 x +$$

$$+ \sin^8 x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x =$$

$$= \sin$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

$$= 2 \sin 5x \cos 2x$$

~~2 cos~~

$$(\cos x + i \sin x)^{10} =$$

$$= \cos^{10} x - \cos^8 x \sin^2 x + \cos^6 x \sin^4 x -$$

$$= \cos^4 x \sin^6 x + \cos^2 x \sin^8 x - \sin^{10} x$$

$$\cos 5x = \operatorname{Re}(\cos x + i \sin x)^5 =$$

$$= \cos^5 x - \cos^3 x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x$$

$$\sin 5x = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x)^5 =$$

$$= \cos^4 x \sin x - \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$$

$$= \sin^5 x - \cos^2 x \sin^3 x + \cos^4 x \sin x$$

$$\cos 5x - \sin 5x = \cos 5x + \sin - 5x =$$

$$= \cos 5x + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right) =$$

$$= 2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos^7 x - \cos^6 x \sin x$$

$$(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^6 x - \cos^4 x \sin^2 x + 2 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2x$ равно 0 во всех случаях
 $\boxed{\cos 2x = 0}$ или подберем, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$
теперь для $\cos 2x \neq 0$ подберем
или $\cos 2x$:

~~$\cos 2x$~~

$$2 \cos 5x - \sqrt{2} \cos^2 x - \sqrt{2} \cos^4 x \sin^4 x +$$

$$+ \sin^2 x = 2 \sin 5x$$

$$\cos 5x - \sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 x + \cos^4 x \sin^4 x + \sin^2 x)$$

~~$$\cos 5x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 x + \cos^4 x \sin^4 x + \sin^2 x)$$~~

$$\cos 5x = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^5) = \cos^5 x - \sin^2 x \cos^3 x +$$

$$+ \cos x \cdot \sin^4 x$$

$$\sin 5x = \operatorname{Im}((\cos x + i \sin x)^5) = \sin^5 x - \cos^2 x \sin^3 x +$$

$$+ \sin x \cdot \cos^4 x$$

$$\cos^5 x + \cos^4 x \sin x - \cos^3 x \cdot \sin^2 x - \cos^2 x \cdot \sin^3 x +$$

$$+ \cos x \cdot \sin^4 x + \sin^5 x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 x + \cos^4 x \sin^4 x + \sin^2 x)$$

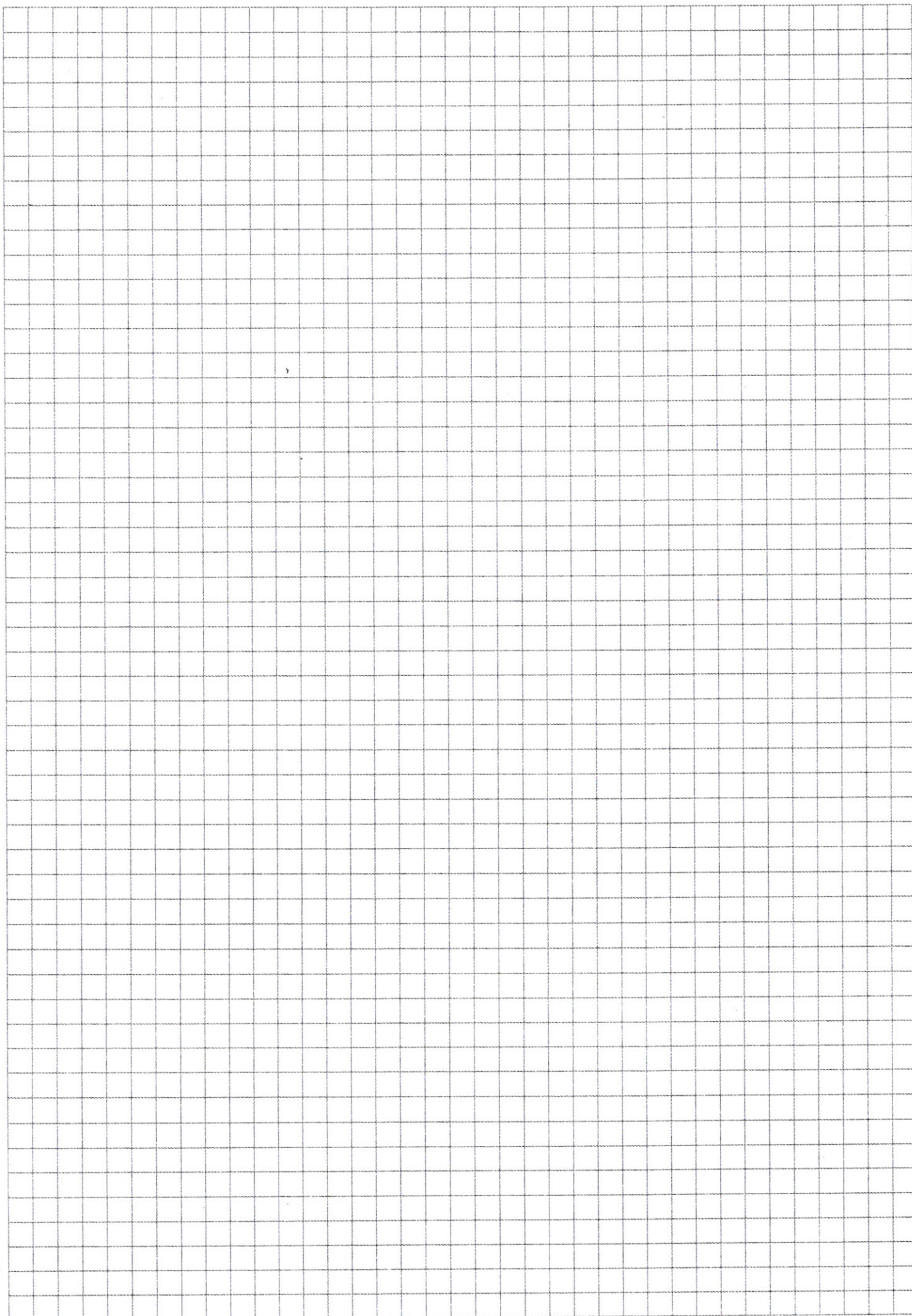
$$(\cos x + \sin x)(\cos^4 x - \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 x + \cos^4 x \sin^4 x + \sin^2 x)$$

Здесь корней нет
по т. Безу, тогда

~~$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 x - \cos^4 x \sin^4 x - \sin^2 x)$$~~

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Sigma = 81 \cdot 85 + 44 \cdot 81 (3^{81} - 1) - 4 \cdot 81 \cdot 3^{81} + 40 - \frac{3^{25} - 1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 85 \\ + 81 \\ \hline 166 \\ + 81 \\ \hline 247 \\ + 81 \\ \hline 328 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 44 \\ + 81 \\ \hline 125 \\ + 81 \\ \hline 206 \\ + 81 \\ \hline 287 \\ + 81 \\ \hline 368 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ + 40 \\ \hline 121 \\ + 81 \\ \hline 202 \\ + 81 \\ \hline 283 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \cdot 85 \\ 6885 \\ + 44 \cdot 81 \cdot 3^{81} \\ - 4 \cdot 81 \cdot 3^{81} \\ + 40 - \frac{27}{2} \cdot 3^{81} + \frac{1}{2} = \end{array}$$

$$\begin{aligned} &= 81 \cdot 85 - 81 \cdot 44 + 40 + \frac{1}{2} + \\ &+ 3^{81} \left(44 \cdot 81 - 4 \cdot 81 - \frac{27}{2} \right) = \\ &= 81 \cdot 41 + 40 + \frac{1}{2} + 3^{81} \left(40 \cdot 81 - \frac{27}{2} \right) \\ &3361,5 + 3^{81} (3328,5) = \end{aligned}$$

$$= 3361,5 + 3328,5 \cdot 3^{81}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ 27 \\ \hline 54 \end{array} \begin{array}{r} 2 \\ 27 \\ \hline 27 \end{array}$$

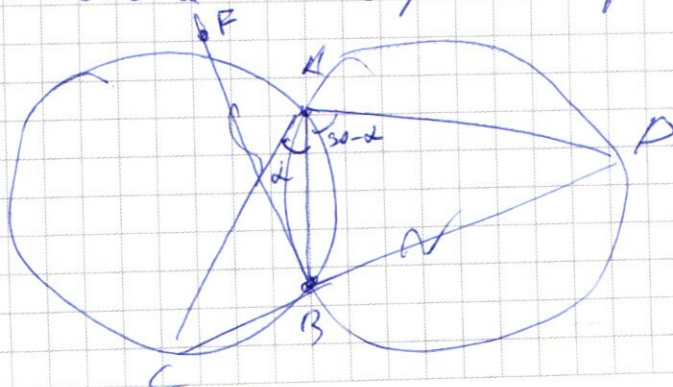
$$\begin{array}{r} 3133 \\ 27 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta =$$

$$= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta =$$

=



$$(\cos x + i \sin x)^7 = \cos 7x + i \sin 7x$$

$$\cos^7 x - \cos^5 x \sin^2 x + \cos^3 x \sin^4 x - \cos x \sin^6 x - \sin^7 x + \cos^2 x \sin^5 x - \cos^4 x \sin^3 x + \cos^6 x \sin x$$

$$\cos^7 x - \cos^5 x (1 - \cos^2 x) + \cos^3 x (1 - \cos^2 x)^2 - \cos x (1 - \cos^2 x)^3$$

$$= \cos^7 x - \cos^5 x + 2 \cos^5 x - 2 \cos^3 x + \cos^3 x - 2 \cos^3 x + 2 \cos x - \cos x = \cos^7 x - 6 \cos^5 x + 4 \cos^3 x - \cos x$$

$$\cos^7 x = 4 \cos^3 x - 6 \cos^5 x + \cos^7 x$$

$$+ \cos^5 x \cdot (-6) + \cos^3 x \cdot 4 - \cos x =$$

$$= \cos^7 x - 6 \cos^5 x + 4 \cos^3 x - \cos x$$

$$\cos^3 x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos^7 x - 6 \cos^5 x + 4 \cos^3 x - 4$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\left(\frac{x}{y} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\cos 2\alpha + \cos 2\beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

$$\sin 2\alpha - \sin 2\beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \beta \cos \beta$$

$$\cos \alpha + \beta = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha - \beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha + \beta = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha - \beta = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) =$$

$$= 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + (\cos^2 \alpha - 1) \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\sin^2 \alpha - 1) \cos^2 \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16875 = 5 \cdot 3375 =$$

$$= 5^2 \cdot 675 =$$

$$= 5^3 \cdot 135 =$$

$$= 5^4 \cdot 27 =$$

$$= 5^5 \cdot 3^3 =$$

$$= 5^5 \cdot 3^3$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 25 & 625 & 3125 & & \end{matrix}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 3025} \\ 15 \overline{) 225} \\ 4150 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 625} \\ 1250 \overline{) 27} \\ 4375 \\ 4375 \\ 0 \end{array}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 =$$

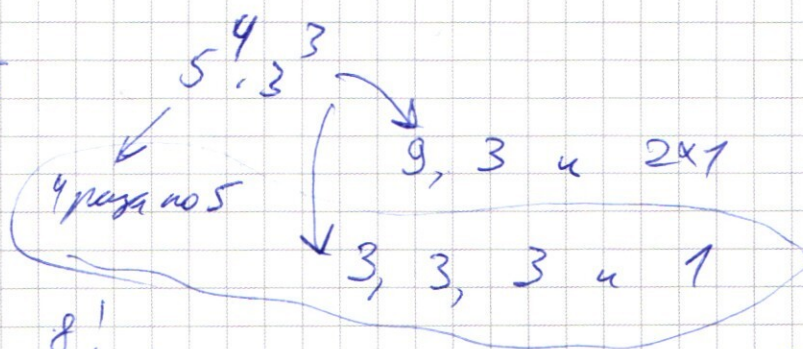
$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 = 40 \cdot 49 = 1960$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 40 \cdot 21 = 840$$

$$16875$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 15 \overline{) 3375} \\ 18 \overline{) 30} \\ 10 \overline{) 675} \\ 37 \overline{) 5} \\ 35 \overline{) 1135} \\ 25 \overline{) 17} \\ 25 \overline{) 15} \\ 25 \overline{) 25} \\ 25 \overline{) 25} \\ 0 \overline{) 25} \\ 0 \overline{) 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ 10 \overline{) 25} \\ 35 \overline{) 25} \\ 35 \overline{) 0} \end{array}$$



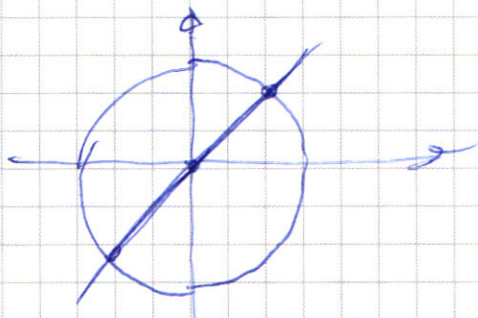
$$\begin{array}{r} 3 \\ 49 \\ 40 \\ 1960 \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos(3x+7x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x$$

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x &= \\ &= \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x \end{aligned}$$



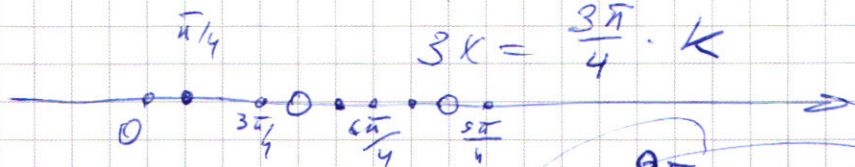
$$3x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$4x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{4} k$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} \cdot k$$



$$x = \frac{9\pi}{4} + 3\pi k$$

$$\frac{3\pi}{4} k = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$3\pi k = \pi + 4\pi n$$

$$3k = 1 + 4n$$

$$k = -1 \quad k = 3$$

$$\frac{9\pi}{4} + \frac{12\pi}{4} = \frac{21\pi}{4}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 1$$

$$(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$= \cos^2 \alpha \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) (1 - \cos^2 \beta) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} 2 \cos 2\alpha + \cos 2\beta &= \frac{1}{k} \cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) = \\ &= \frac{1}{k} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \cdot (\sin \alpha \cos \beta + \\ &+ \cos \alpha \sin \beta) = \end{aligned}$$

$$= \cancel{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \\ + \cos^2 \alpha \cdot \sin \beta \cos \beta - \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) =$$

$$= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) =$$

$$= \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin \beta \cos \beta +$$

$$= \sin^2 \alpha \sin \beta \cos \beta + \sin \alpha \cos \alpha \sin^2 \beta =$$

$$= 0 \cdot \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\beta$$

$$2 \cos 2\alpha + 2 \cos 2\beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) -$$

$$= (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) (\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) =$$

$$= \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) =$$

$$= \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta =$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg a = a$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = x^{\lg y} \cdot y^{-2\lg y}$$

$$(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$|x-6-y| \cdot |x-6+y| = 12$$

$$x' = x - 6$$

$$|x' - y| \cdot |x' + y| = 12$$

$$t = x' - y$$

$$|t| + |t + 2y| = 12$$

$$\begin{cases} x' - y \geq 0 \\ x' + y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x' \\ y \geq -x' \end{cases}$$

$$x' - y + x' + y = 12$$

$$x' = 6$$

$$-6 \leq y \leq 6$$

$$x' - y \leq 0$$

$$x' + y \leq 0$$

$$-x' + y = x' - y = 12$$

$$x' = -6$$

$$y \geq x'$$

$$y \leq -x'$$

$$x' - y \geq 0$$

$$x' + y \leq 0$$

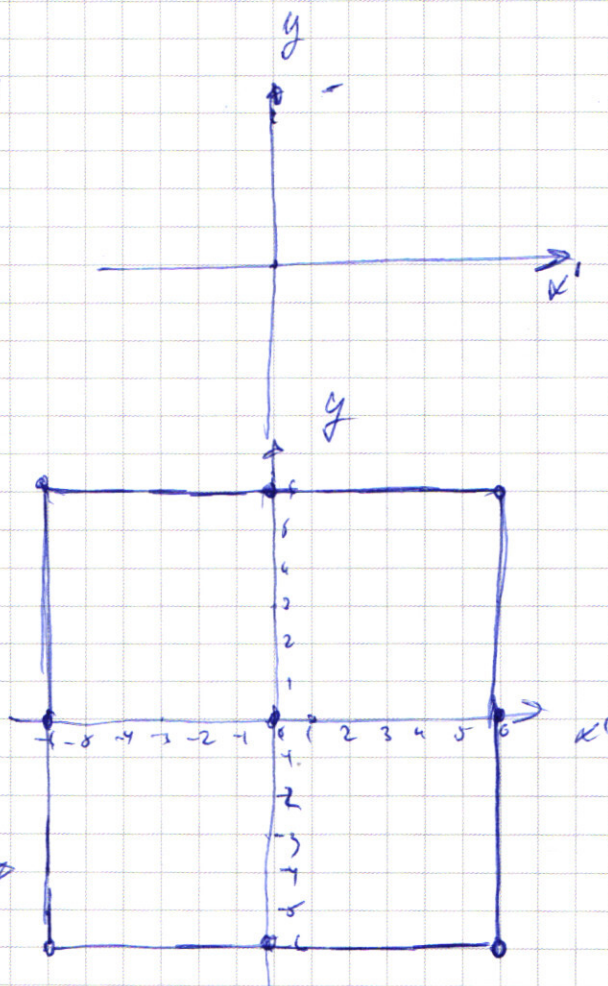
$$y \leq x'$$

$$y \leq -x'$$

$$x' - y - x' - y =$$

$$= -2y = 12$$

$$y = -6$$



$$y^2 - y(4 + \frac{x}{2}) - x^2 - 4x = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4 + \frac{x}{2} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + 4x + 16 + 4x^2 + 16x}}{2} =$$

$$= 2 + \frac{x}{4} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} + 4x + 16 + 4x^2 + 16x}$$

$$x^y \lg y = (-x)^{\lg(-xy)} \cdot y^{2 \lg y}$$

или $y > 0, x < 0$

$$\left(\frac{z^4}{y^2}\right)^{\lg y} = z^{\lg y z} \quad a^{\lg b} \lg a$$

$$z^{4 \lg y} = y^{2 \lg y} \cdot z^{\lg y z}$$

$$z^{4 \lg y - \lg y z} = y^{2 \lg y}$$

$$z^{3 \lg y - \lg z} = y^{2 \lg y}$$

$$y = \left(3^{\lg y - \lg z}\right)^{\frac{1}{2 \lg y}} = 3^{\frac{1}{2} - \frac{\lg z}{2 \lg y}}$$

$$\begin{cases} 2y^2 + yz - z^2 + 4z - 8y = 0 \\ z^{3 \lg y - \lg z} = y^{2 \lg y} \end{cases}$$

$$(2y - z)(y + z) + (2y - z) = 0$$

$$(2y - z)(y + z + 1) = 0$$

$$2y = z \quad y + z = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x =$$

$$= 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) =$$

$$= 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 10x = \cos$$

$$\cos(3x+7x)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x =$$

$$= 2 \sin 5x \cos 2x - \sqrt{2} \sin^2 5x$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) =$$

$$= \sin 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos(3x+7x) =$$

$$= \cos 3x \cos 7x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 3x \cos 7x =$$

$$= \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 3x \sin 7x$$

$$\cos 7x$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2(y^2 - 4y + 4) - 8 - (x^2 + 4x + 4) + 4 - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 = xy + 4$$

$$3 + 5 - 4 + 12 = 15 + 20 = 35$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + 3^{81} \cdot x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x = 1, 2, 3 \quad \times \quad 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 > 3^4 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x = 4 \quad \checkmark$$

⋮

$$x = 81 \quad \checkmark$$

$$x = 82 \quad \checkmark$$

$$x = 83 \quad \checkmark$$

$$x = 84 \quad \checkmark$$

$$x = 85 \quad \times$$

$$4 \quad S(x+1) = 3S(x) + 1$$

$$S(x+1) = S(x) + 3^{x+1}$$

$$3S(x) + 1 = S(x) + 3^{x+1}$$

$$2S(x) = 3^{x+1} - 1$$

$$S(x) = \frac{3^{x+1} - 1}{2}$$

$$y \neq 85$$

$$n(x) = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 85 + x \cdot 3^{81} - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

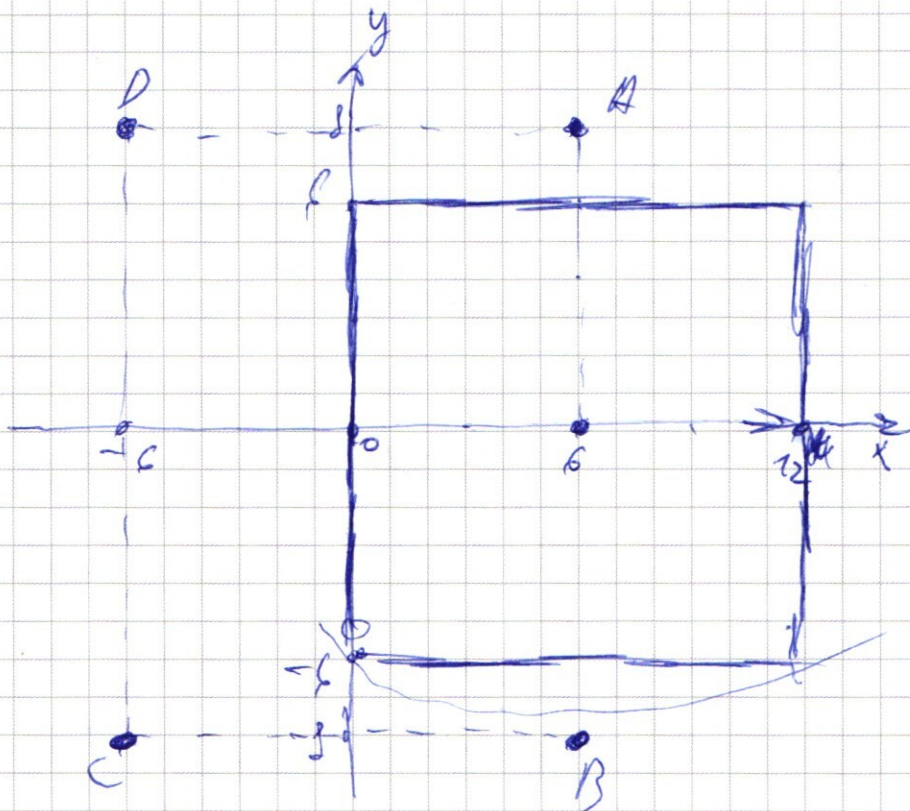
$$\sum_{x=4}^{84} = 81 \cdot 85 + \frac{(4+84) \cdot 81}{2} (3^{81} - 1) - 4 \cdot 3^{81} \cdot 81 - \sum_{x=4}^{84} 3^x =$$

$$= 81 \cdot 85 + 44 \cdot 81 (3^{81} - 1) - 4 \cdot 3^{81} \cdot 81 -$$

$$- \sum_{x=0}^{24} 3^x + 1 + 3 + 9 + 27 =$$

$$< 81 \cdot 85 + 44 \cdot 81 (3^{81} - 1) - 4 \cdot 3^{81} \cdot 81 + 40 - \sum_{x=0}^{84} 3^x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

$$10^2 + 8^2 = 144$$

$$100 + 64 = 164$$

$$164 - 36 = 128$$

$$r = 2 \checkmark$$

$$r = 10 \checkmark$$

AB: $r < 2 \Rightarrow 0$ $\times$

$r = 2 \Rightarrow 1$

$2 < r < 10 \Rightarrow 2$ $\times$

$r = 10 \Rightarrow 2$ $\checkmark$

$16 < r < 3\sqrt{20}$ $\times$