

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
- ✓3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

- ✓4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
- ✓5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 1

$$16875 = 9 \cdot 1875 = 27 \cdot 625 = 27 \cdot 25 \cdot 25 = 3^3 \cdot 5^4$$

1) Цифр: 5 всего одна* 5 $\Rightarrow$ 4 из 8 цифр - это 5-ки.

2) Оставшиеся 4 цифры в произведении дают $3^3 \Rightarrow$ эти цифры либо (1, 1, 3, 9), либо (1, 3, 3, 3) в каком-то порядке.

* Цифры 0 быть не может, т.к. иначе произв-е было бы равно нулю.

3) Всего вариантов выбрать ~~какие~~ 4 цифры из 5-ки: C_8^4

Всего вариантов выбрать оставшиеся 4 циф-ры:

$$C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1$$

выберем место из 1, остальные займем 3-ами выберем место для 9-ки выберем место для 3-ки
остальные цифры будут 1-ами

4) По п. 3) всего вариантов таких чисел:

$$C_8^4 (C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (4 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 16 =$$

$$= 10 \cdot 112 = 1120 \quad \text{Ответ: } 1120$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \sim 3$$

Рассмотрим первое ур-ие:

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad | \lg$$

$$\lg(y) \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) \Rightarrow$$

$$\lg(y) \cdot (\lg(x^4) - \lg(y^2)) = (\lg(-x) + \lg(y)) \lg(-x)$$

Обозначим
 $\lg(-x)$ за a , $(=)$
 $\lg(y)$ за b

$$b(4a - 2b) = (a + b)a \Rightarrow$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab \Rightarrow$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(a - b)(a - 2b) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a - b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg(-x) - \lg(y) = 0 \\ \lg(-x) - 2\lg(y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg(-x) - \lg(y) = 0 \\ \lg(-x) - \lg(y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg(-x) - \lg(y) = 0 \\ \lg(-x) - \lg(y^2) = 0 \end{cases}$$

м.к.
 $\lg t - \log x$
 $\log - \log \log t$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ -x - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = -y^2 \end{cases}$$

При этом, $(-x)$ и y - отриц. логарифм.
 $\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$1) \begin{cases} x = -y \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ 2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

м.к. $y \neq 0$

$$2) \begin{cases} x = -y^2 \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ -y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y^2 \\ y(y-2)(y^2 - y - 4) = 0 \end{cases}$$

м.к. $y > 0$

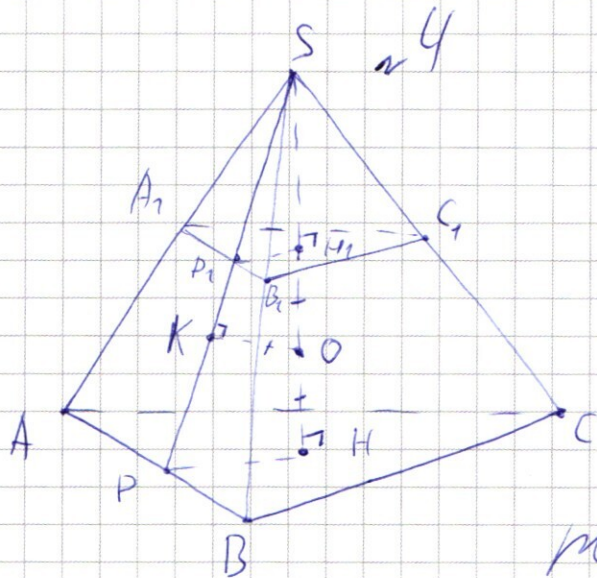
$$\begin{cases} x = -y^2 \\ (y-2)(y-y_1)(y-y_2) = 0 \end{cases}, y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = -\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 \\ y = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ x = -\frac{9-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$$

нельзя, т.к. $y > 0$

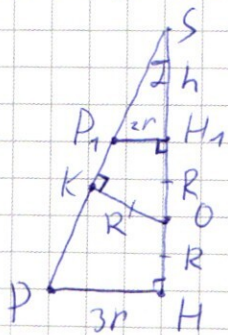
Ответ: $(-2; 2), (-4; 2),$
 $\left(-\frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Рассмотрим тетраэдр $SABC$,
расположенный на высоте SH
($SH \perp ABC$), у
которого O — центр впис. сфе-
ры, причем $O \in SH$. Плоскости

касания сферы и граней ABS , BCS , ACS за-
даются точками K, L, M соотв. Заметим, что если впис. сфера кас.
 $A_1B_1C_1$, то эта конфигурация — искомого. Действи-
тельно, сфера, касающаяся SH в O , кас. трёх граней
угла с верш. в S , K, L, M — точки кас-ия, KL — ABC и
 $A_1B_1C_1$ кас. сферы и $\perp SO$. Значит, искомого угла
входит в зад. конфигурацию ($P = KS \cap AB$,



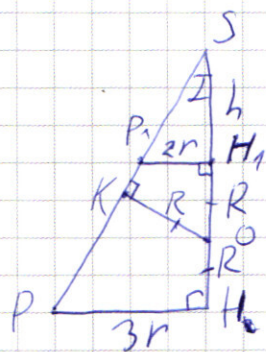
$P_1 = KS \cap A_1B_1$;
обозначим радиус сферы за R .

Обозначим P_1H_1 за $2r$. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow P_1H = P_1H_1 \cdot k$, где k — коэф. подобия $\Rightarrow$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \frac{3}{2} \Rightarrow PH = P_1H_1 \cdot \frac{3}{2} = 3r$$

Прочие углы на картинке обусловлены тем, что
 H_1, H и K — точки касания сферы с SH -м, и, соот-
ветственно.



~ 4 (проп-ца)
 Пусть $SH_1 = h$.

$\triangle SH_1P_1 \sim \triangle SKO \sim \triangle SH_1P$ по 2 углам

$$\Rightarrow \frac{h}{2r} = \frac{h+2R}{3r} \Rightarrow (\triangle SP_1H_1 \text{ и } \triangle SPH)$$

$$3h = 2h + 4R \Rightarrow h = 4R$$

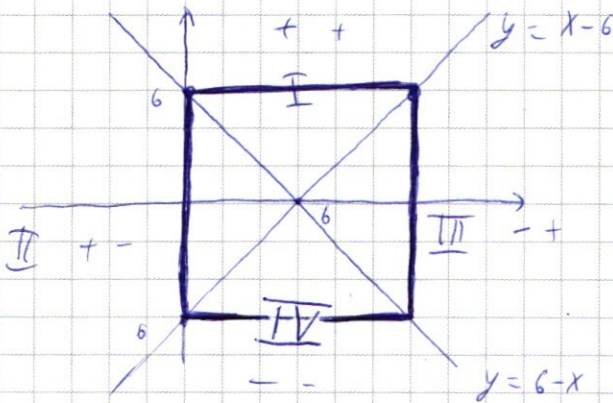
$$\text{из } \triangle SKO \quad \sin \angle = \frac{R}{R+R} = \frac{R}{4R+R} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\angle = \arcsin \frac{1}{5}} \quad \text{Ответ: } \arcsin \frac{1}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ ((x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |y-(x-6)| + |y-(6-x)| = 12 (*) \\ ((x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 \end{cases}$$

1.) Изобразим первое ур-е на коорд. пл-ти:



Заметим, что при $y \geq (x-6)$ первый модуль ~~раскрывается~~ ^{раскрывается} с +-ом, а при $y < (x-6)$ - с --ом. Аналогично при $y \geq (6-x)$ второй модуль раскрывается с +-ом, а при $y < (6-x)$ - с минусом.

а) Изобразим пл-ти

на 4 сектора, в каждом из которых мы знаем, как раскр-ся модули и раскроем их по случаям:

I) ++, $y \geq x-6$ и $y \geq 6-x$:

$$(*) \Leftrightarrow y - (x-6) + y + (6-x) = 12 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

IV) --, $y < x-6$ и $y < 6-x$:

$$(*) \Leftrightarrow -y + (x-6) - y + (6-x) = 12 \Rightarrow -2y = 12 \Rightarrow y = -6$$

II) +-, $y \geq (x-6)$ и $y < (6-x)$:

$$(*) \Leftrightarrow y - (x-6) - y + (6-x) = 12 \Rightarrow -2x + 12 = 12 \Rightarrow x = 0$$

III) -+, $y < (x-6)$ и $y \geq (6-x)$:

$$(*) \Leftrightarrow -y + (x-6) + y - (6-x) = 12 \Rightarrow 2x - 12 = 12 \Rightarrow x = 12$$

Как видно, в (*) задан квадрат с вершинами в точках:

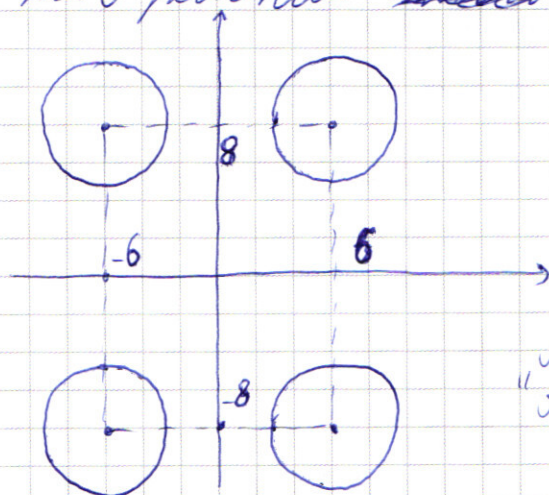
~ 5 (прод)

$(0; -6), (0; 6), (12; 6), (12; -6)$.

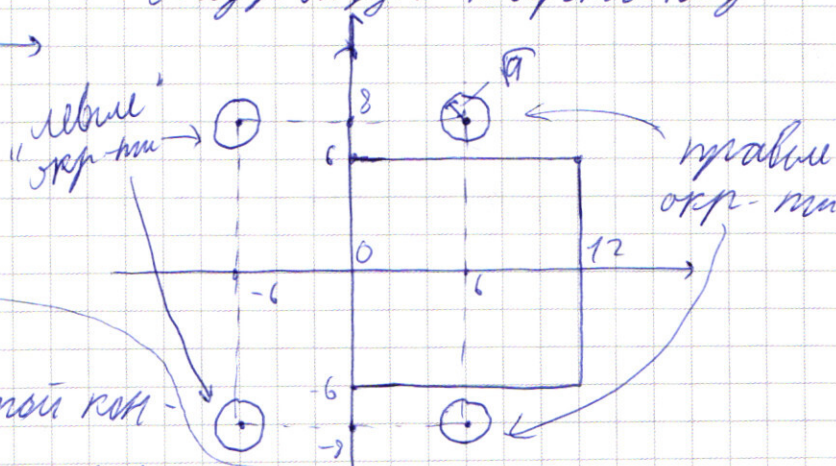
2) Теперь рассмотрим второе соотношение:

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \Rightarrow a \geq 0$$

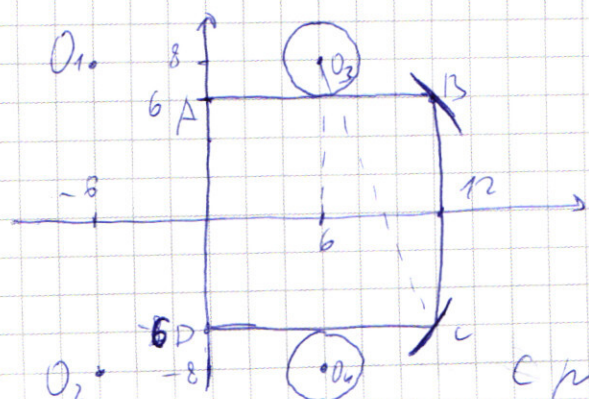
Заметим, что оно симметрично ~~по~~ относительно замены x на $-x$ и y на $-y \Rightarrow$ задает 4-х точек, симм.-е относ. осей x и $y \Rightarrow$ для его построения достаточно рассм. x и $y \geq 0$, а потом отразить отн-но осей 2 раза. При $x, y \geq 0$ имеем $(x-6)^2 + (y-8)^2 = (a)^2$ — уравн. окр-ти с ц. в т. $(6; 8)$ и радиусом $\sqrt{a}$, множество решений ~~этого~~ ~~этого~~ соотношения $\forall x, y$:



3.) Значит, ^{мат.} система задает следующую картинку:



4.) ~~Варианты~~ Варианты этой конфигурации с 2 пересечениями:



Либо квадрат пересекают две, левые окр-ти, либо две, правые, т.к. картинка симметрична отн. оси x (две дуги обозначают ~~на~~ левые окр-ти с радиусами равно O_2 в дуге)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и 5 (прод)

тогда окр-ты сц. в O_3 и O_4 не будут пересе-
каться квадрат, т.к. $O_3C = \sqrt{(8-(-6))^2 + (12-0)^2} = \sqrt{14^2 + 6^2}$,
а $O_2B = \sqrt{(12-(-6))^2 + (6-(-8))^2} = \sqrt{18^2 + 14^2} > O_3C = \sqrt{6^2 + 14^2}$.

а) Правые окр-ты кас. сторон квадрата = 1

$\Rightarrow r$ окружностей = $8-6 = 2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 \Rightarrow \boxed{a=4}$

2) r окружностей = $O_2B = \sqrt{18^2 + 14^2} = \sqrt{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 18^2 + 14^2 = 324 + 196 = \boxed{520}$

$$\begin{array}{r} 18 \\ 18 \\ + 144 \\ \hline 18 \\ 324 \end{array}$$

$14 \cdot 14 = 196$

Ответ: 4 ; 520.

и 2

$$\cos 2x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 2x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1) \sin 5x = \cos 3x \end{cases}$$



$$2) \sqrt{2} \cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x + \sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x) = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos 2x (\cos 3x + \sin 3x) + \sin 2x (\cos 3x - \sin 3x)) = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos 2x (4 \cos^3 x - 3 \cos x + 3 \sin x - 4 \sin^3 x) + \sin 2x (4 \cos^3 x - 3 \cos x - 3 \sin x + 4 \sin^3 x)) = 0$$

~ 2 (прог)

$$(\sin x + \cos x) \left(\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)^2 (4 \sin x \cos x + 1) - \sin 2x (1 - 4 \sin x \cos x) \right) = 0$$

2.1) $\sin x = -\cos x$

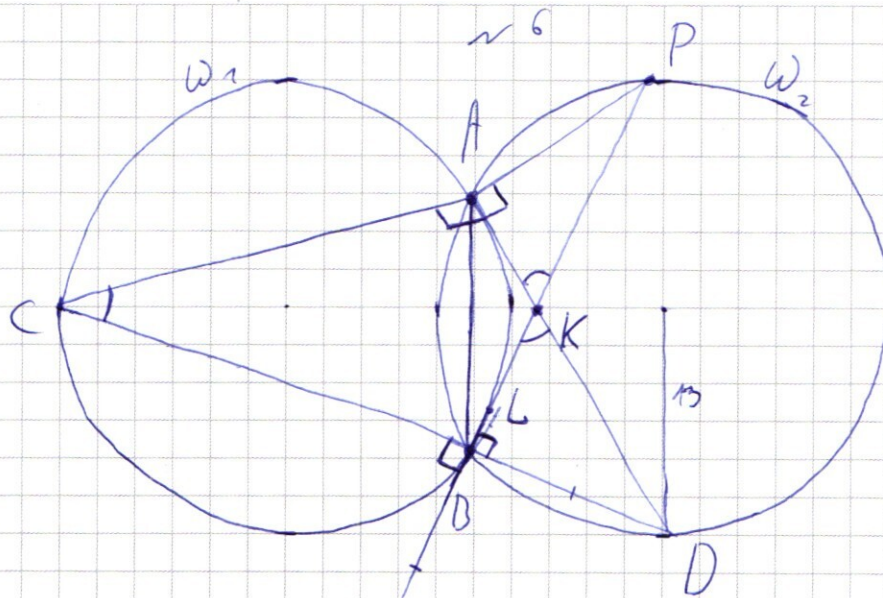
$x = -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$



2.2) $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) - (\sin x - \cos x)^2 (4 \sin x \cos x + 1) - 2 \sin x \cos x (1 - 4 \sin x \cos x) = 0$
~~не решается~~

← не решается

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

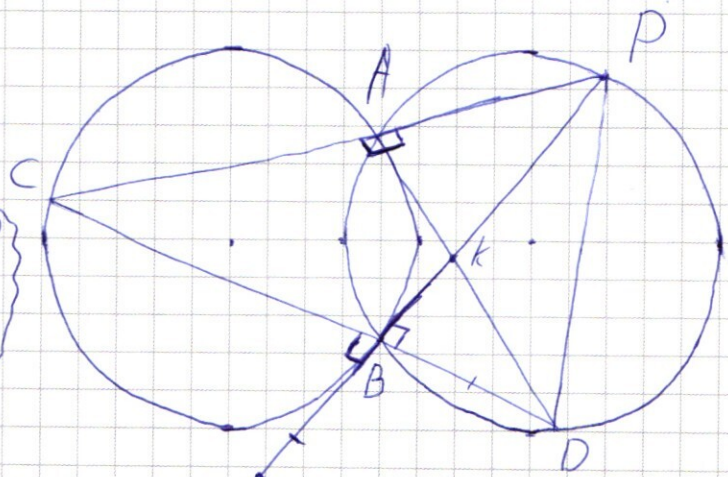
 ~~$\angle ABD \sim \angle CAD$~~

$$1) \angle KBD = \angle KAP = 90^\circ, \angle A, P \in l_{\text{m.}}$$

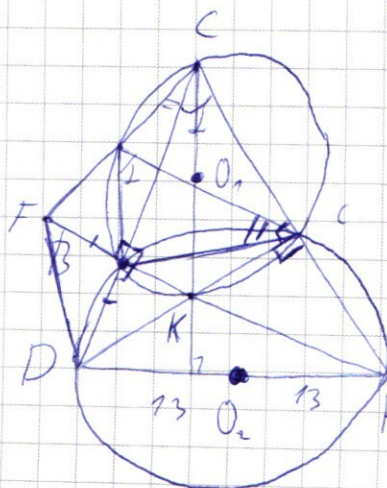
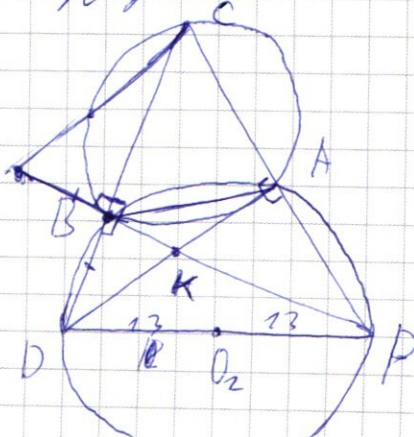
Объём - 10

$$BF \cap AD = K, BF \cap \omega_2 = P$$

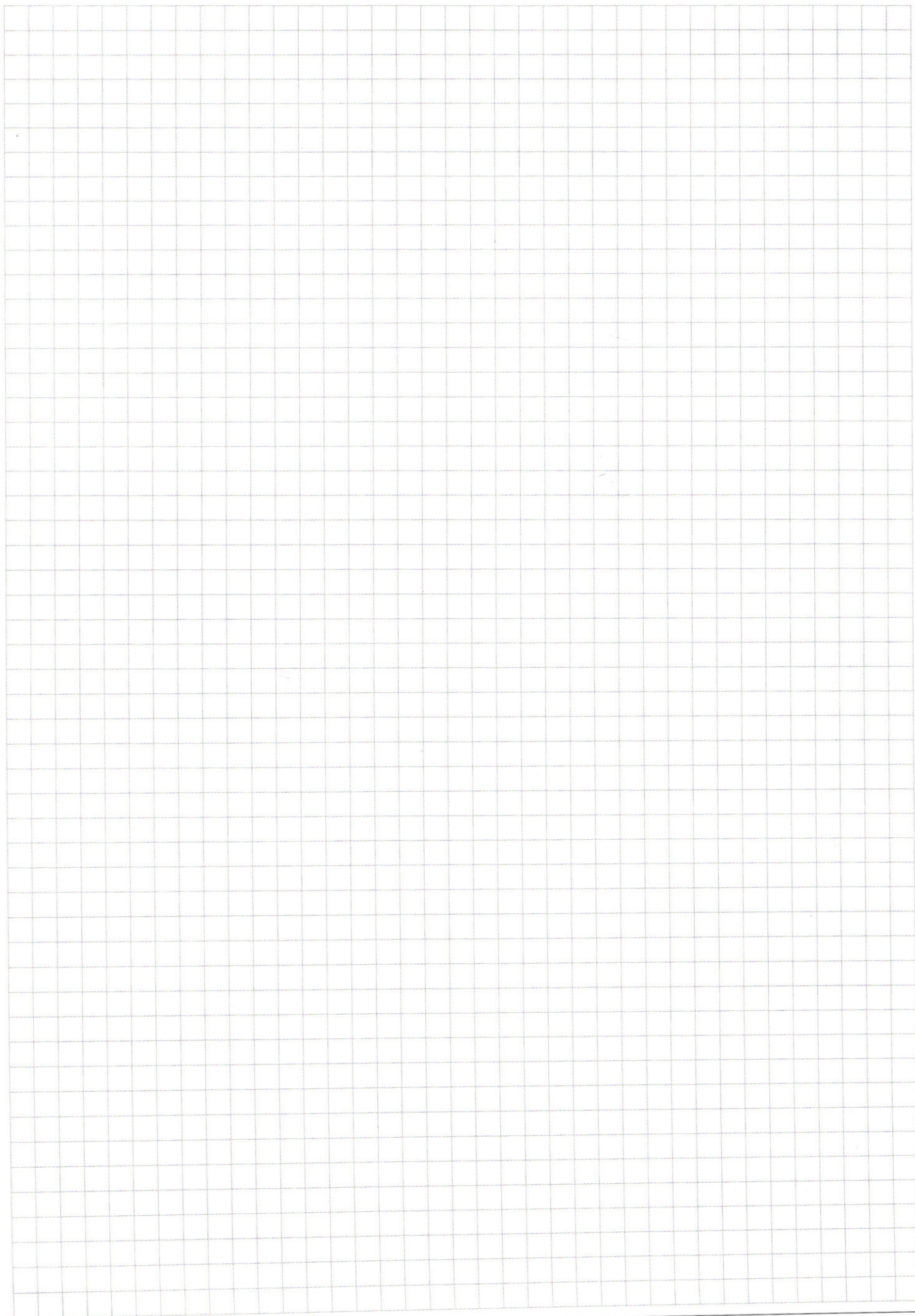
ω_1 и ω_2 — 1 и 2 окр-ти.



2) $A, B, P, D \in \omega_2$ и $\angle DAP = \angle DBP = 90^\circ = 1 O_2$ —
середина PD .



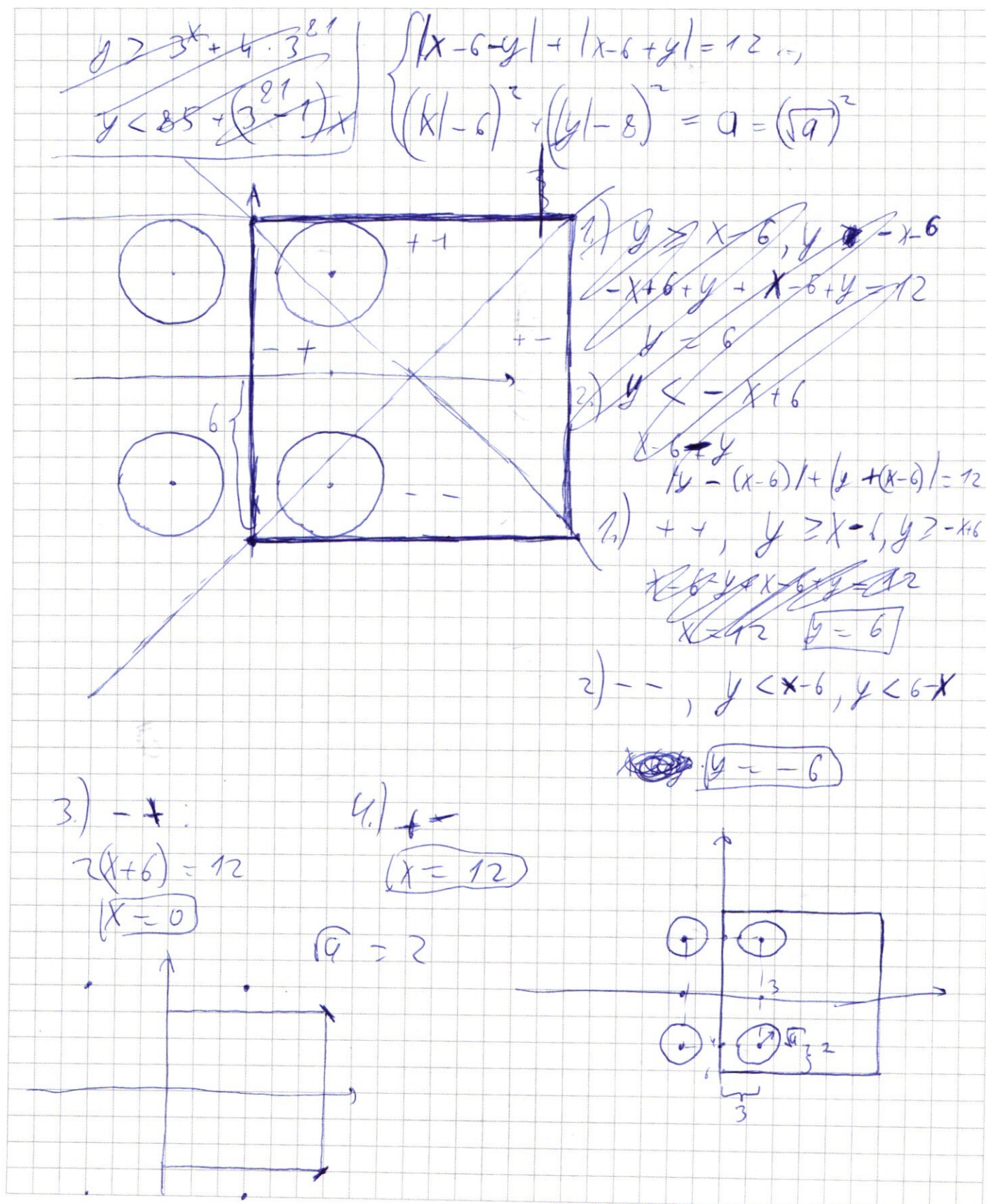
$K \in \text{пр. окр-ности}$
 $ABC \text{ и } K, \angle CAK =$
 $\angle CBK = 90^\circ$
 $K - \text{проект. центр}$
 $BC = 26 \cdot \cos \angle$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = -x^{\lg(-x)} \cdot x^{\lg y} \\ 4y^2 - 2xy - 2x^2 - 8x - 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{(x-y)^2}{x^4 y^2} + 3y^2 - 16y - 3x^2 - 8x = 0$$

$$\lg y \cdot \lg \frac{(x-y)^2}{x^4 y^2} = \lg(-xy) \cdot \lg(-x) \Leftrightarrow \lg(y) (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x) \mid \lg(-x) = a$$

4ab

$$b(4a - 2b) = (a+b)a$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab \Leftrightarrow$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$\lg(x) - \lg(y) = 0$$

$$\lg(-x) - \lg y^2 = 0 \quad \begin{matrix} \text{н.к.} \\ \lg(-x) = \lg y^2 \\ \text{not} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x = -y \\ x = -y^2 \end{cases}, \quad \begin{matrix} x > 0 & x < 0 \\ y > 0 & y > 0 \end{matrix}$$

1) $x = -y$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0 \Rightarrow 2y^2 - 4y = 0 \Rightarrow y(y-2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \text{н.к.} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0; 0 \\ -2; 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

2) $x = -y^2$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 = y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

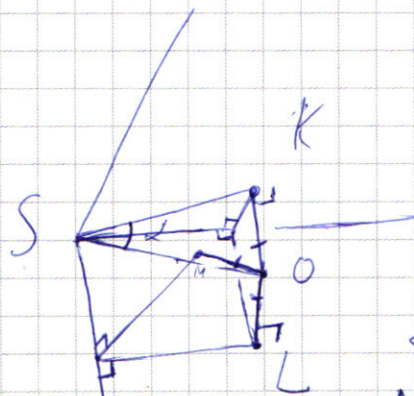
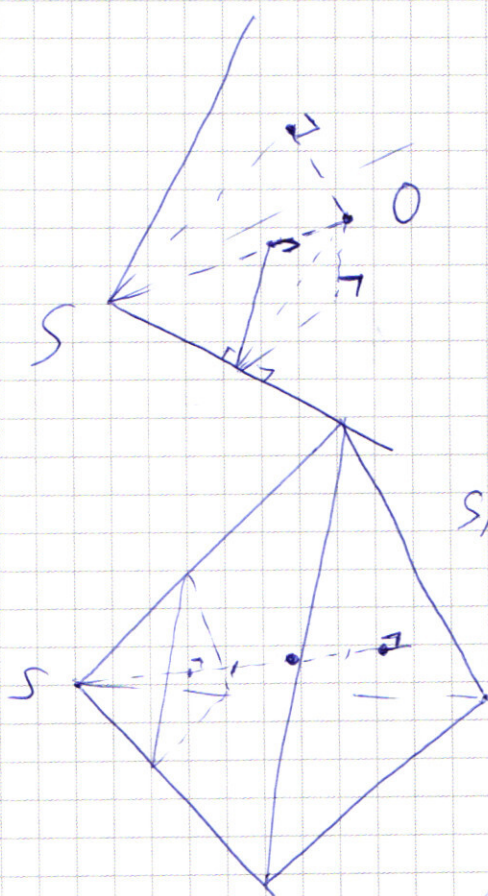
$$y = 2 \Rightarrow 8 - 4 - 12 + 8 = 0$$

$$y(y-2)(y^2+y-4) = 0$$

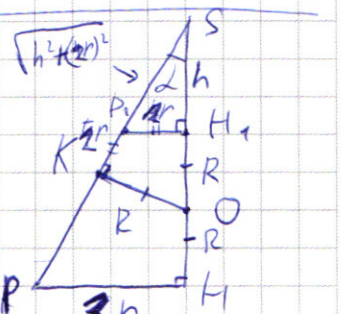
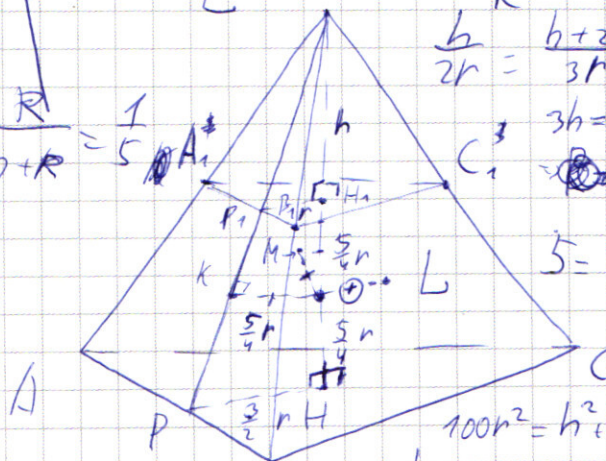
$$y = 2, x = -4$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{1+16}}{2}, x = -\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = -\frac{1+2\sqrt{17}+17}{4} = -\frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, x = -\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = -\frac{9-\sqrt{17}}{2}$$



$$\sin \alpha = \frac{R}{h+R} = \frac{1}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin \frac{1}{5}$$



$$\frac{h+R}{R} = \frac{\sqrt{h^2 + 4r^2}}{2r}$$

$$\frac{h}{2r} = \frac{h+2R}{3r} \Rightarrow$$

$$3h = 2h + 4R \Rightarrow$$

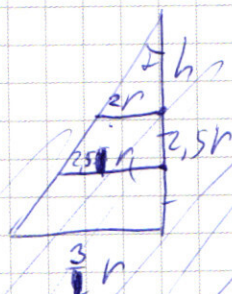
$$h = 4R$$

$$5 = \frac{\sqrt{h^2 + 4r^2}}{2h}$$

$$100r^2 = h^2 + 4r^2$$

$$h = r \sqrt{96} = 4R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = 4\sqrt{6}r, R = \sqrt{6}r$$



$$\frac{h}{2r} = \frac{h+2.5r}{2.5r} = \frac{h}{2.5r} + 1 \Rightarrow 5r$$

$$2.5h = 2h + 5r$$

$$h = 10r = \text{ctg} \alpha \Rightarrow \frac{h}{r} = 10$$

$$\alpha = \arccos 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sim 1$$

$$16875 = 25 \cdot 675 = 25 \cdot 25 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$\text{так } 9 \cdot 1875 = 27 \cdot 625$$

4 цифры = 5

4 цифры: 27: (1, 3, 3, 3); (1, 1, 9, 3);

$$C_8^4 \left(C_4^1 + C_4^1 \cdot C_3^1 \right) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (4 + 4 \cdot 3) =$$

↑ выбираем 4 места под 5-ку ↑ выбираем место для 9 ↑ выбираем место для 3

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 40 \cdot 4 \cdot 7 = 280 \cdot 4 = 1120$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \quad \sim$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0 \quad \Leftarrow$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0 \quad \Leftarrow$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos(3x+2x) + \sin(3x+2x)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 3x \cos 2x - \sin 3x \sin 2x + \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x$$

$$\sqrt{2} (2 \cos^2 x - 1) = (4 \cos^3 x - 3 \cos x) (2 \cos^2 x - 1) - (3 \sin x - 4 \sin^3 x) \sin x \cos x +$$

$$+ (3 \sin x - 4 \sin^3 x) (2 \cos^2 x - 1) + (4 \cos^3 x - 3 \cos x) \cdot 2 \sin x \cos x$$

$$\sin 3x = \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x = \sin x (1 - 2\sin^2 x + 2\cos^2 x) =$$

$$= \sin x (3 - 4\sin^2 x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = \cos x \cos 2x - \sin x \sin 2x = \cos (2\cos^2 x - 1 - 2\sin^2 x) =$$

$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\cos 3x - \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x - 3\sin x + 4\sin^3 x =$$

$$= (\cos x + \sin x)(4\cos^2 x - 4\sin x \cos x + 4\sin^2 x - 3) =$$

$$\cos 3x + \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x =$$

$$= (\cos x - \sin x)(4\cos^2 x + 4\sin x \cos x + 4\sin^2 x - 3) =$$

$$= (\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x \cos x)$$

* :

$$\sqrt{2}(\cos 2x) = \cos 2x(\cos 3x + \sin 3x) + \sin 2x(\cos 3x - \sin 3x)$$

$$\sqrt{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x - \sin x)(1 + 4\sin x \cos x) + 2\sin x \cos x \cdot (\cos x + \sin x)(1 - 4\sin x \cos x)$$

$$(\cos x + \sin x) \left(\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x - (\cos x - \sin x)^2 (1 + 4\sin x \cos x) - 2\sin x \cos x (1 - 4\sin x \cos x) \right) = 0$$

$$(\cos x + \sin x) \left(\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x - \cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x - 4\sin x \cos x (\cos x + \sin x) - 2\sin x \cos x (\cos x - \sin x)^2 + 4\sin^2 x \cos^2 x \right) = 0$$

$$(\cos x + \sin x) \left(\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x + 2\sin x \cos x - 1 - 6\sin x \cos x + 4\sin^2 x \cos^2 x + 4\sin^2 x \cos^2 x \right) = 0$$

$$(\cos x + \sin x) \left(16\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin x \cos x - 1 + \sqrt{2}(\sin x + \cos x) \right) = 0$$