

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

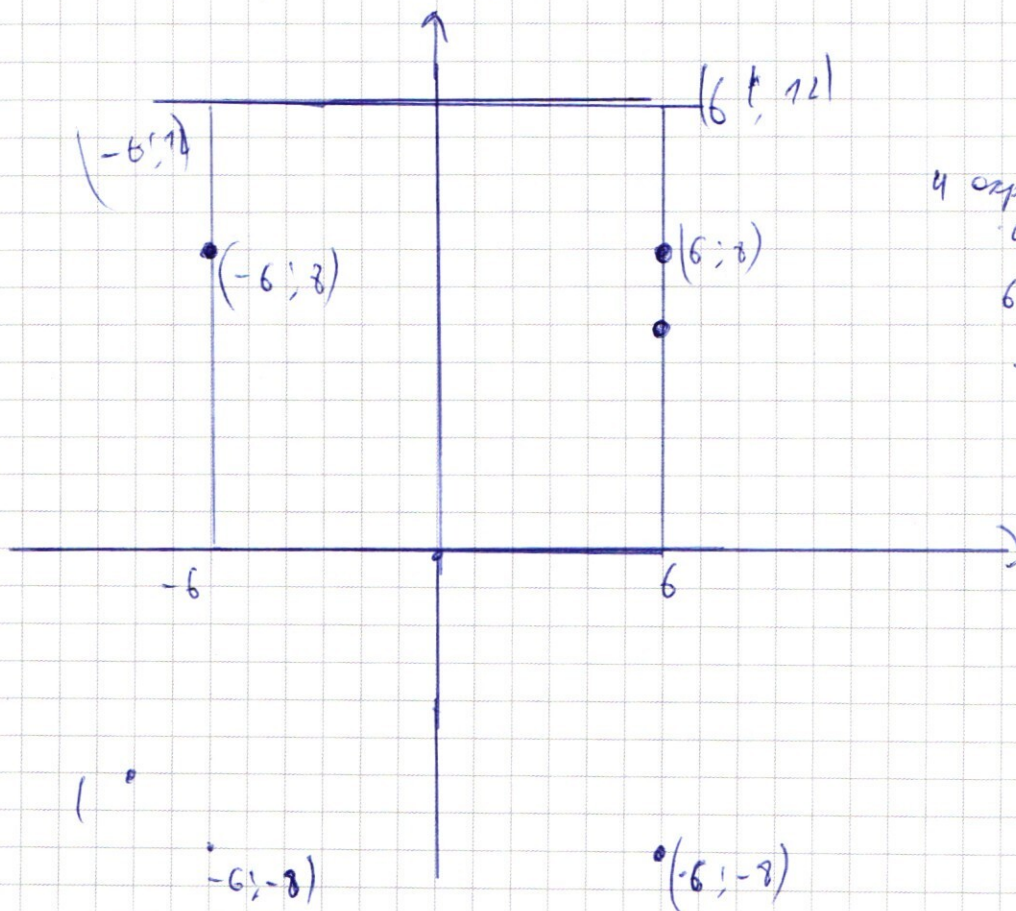
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

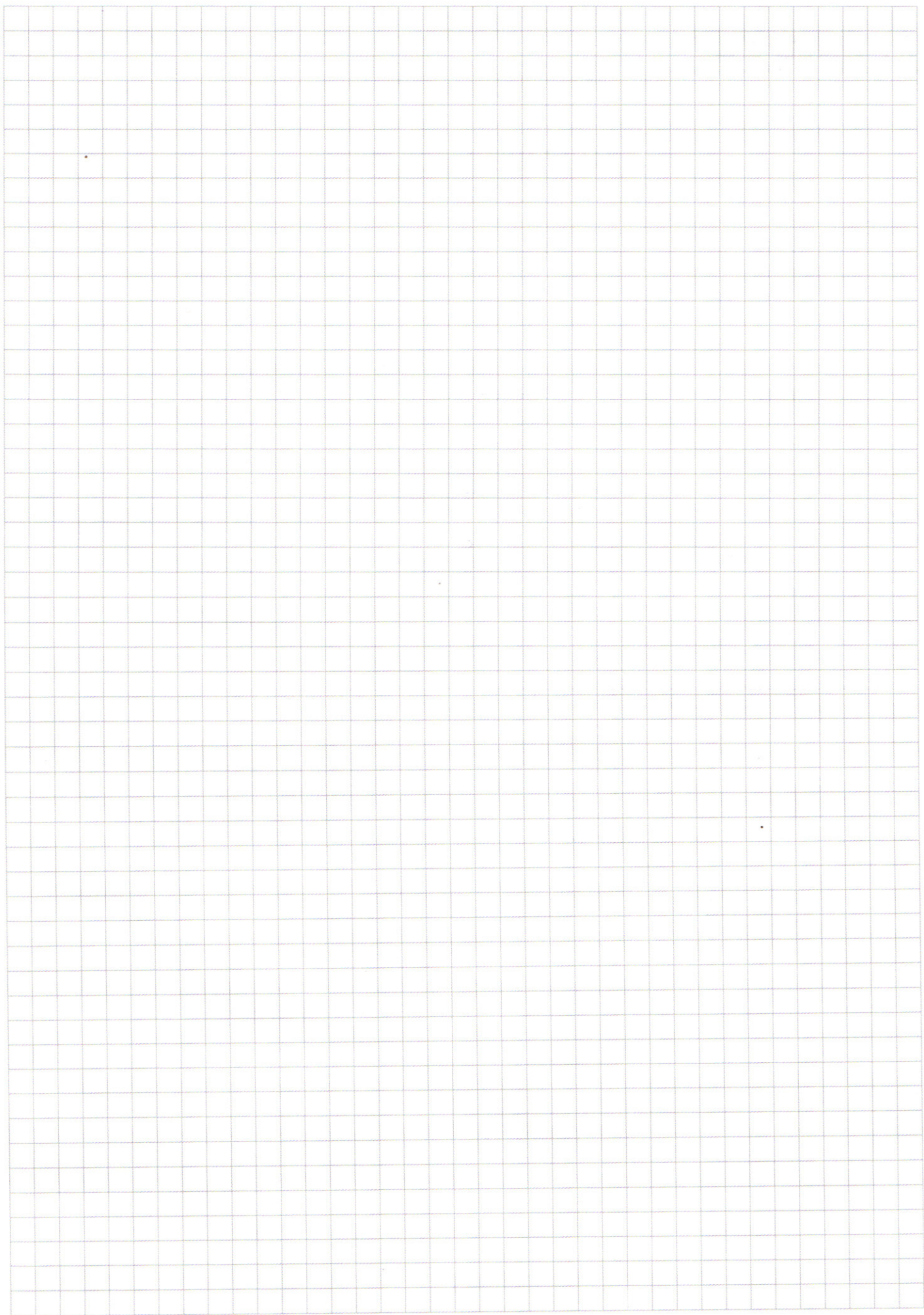
23)

$$\begin{cases} |x-6-4| + |x-6+4| = 12 \\ (x-6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases}$$



4 вер. ст. в
центре

$$\begin{matrix} 6; 8 & -6; -8 \\ -6; 8 & 6; -8 \end{matrix}$$



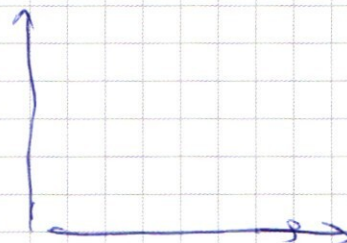
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 7y = 0$$

25) $\sqrt{x-6-y} + \sqrt{x-6+y} = 72$



~~$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$-2 \sin 2x \sin 4x + 2 \sin^2 2x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$~~

~~$$-2 \sin 2x \sin 4x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$~~

~~$$-2 \sin 2x (\sin 2x \cos 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$~~

~~$$-2 \sin^2 2x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$~~

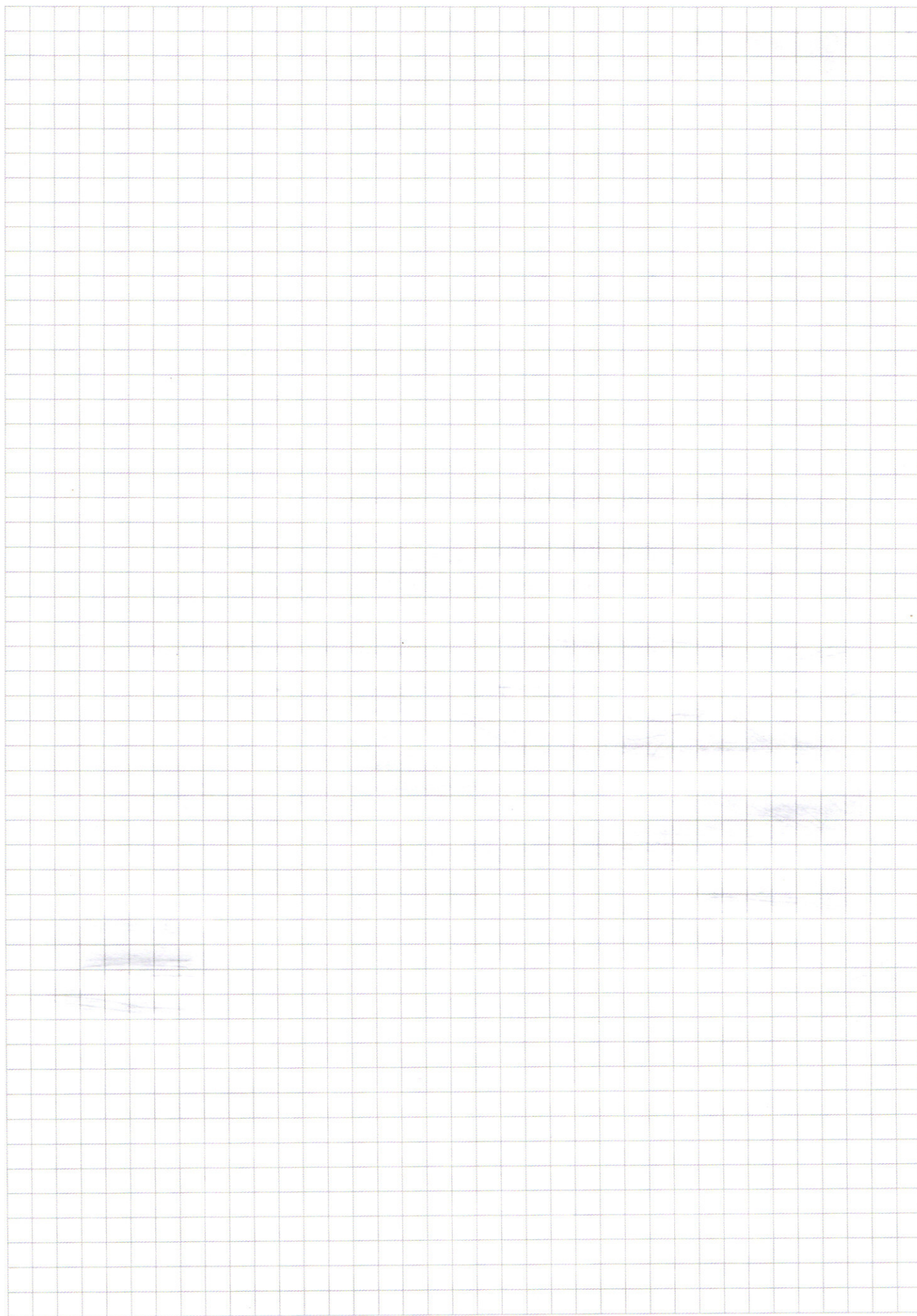
~~$$-2 \sin^2 2x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$~~

~~$$-2 \sin^2 2x \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$~~

~~$$\sin 2x = \sin 2x$$~~

~~$$\sin 4x = \sin(2 \cdot 2x) = \sin(2x)$$~~

26)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 5x = \sin 7x + \sin 3x$$

201

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - 2 \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\cancel{2 \cos 2x} - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - 2 (\sin 5x + \frac{\pi}{4})) = 0 \quad | :2$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - \sin(5x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x - \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad (=) \quad \begin{cases} \sin 5x = \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \\ \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \end{cases} \quad (=)$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n \\ 5x = \pi + 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{10} \\ x \in \mathbb{R} \\ x = \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

Отв: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{10}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{7}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; n, k \in \mathbb{Z}$

13

Для начала разложим число 16875 на пр. множители:

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Тогда у нас есть всего 2 варианта
выбора из 8 чисел, чтобы те впоследствии
в произведении давали ровно 16875: (учитывая
повторы)
1) четыре пятёрки, 3 тройки и 1 единица
2) четыре пятёрки, тройка, девятка и 2 единицы.

$$5, 5, 5, 5, 3, 3, 1$$

$$5, 5, 5, 5, 9, 1, 1$$

$$k_2 = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 840$$

$$\text{Тогда } k_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 280$$

Итого: $280 + 840 = 1120$ Ответ: 1120 чисел

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x) \lg(-xy) & (1) \\ 2y^2 \cdot xy - x^4 - 4x - 1y = 0 & (2) \end{cases}$$

из (1) $\Rightarrow y > 0$ и $x < 0$ т.к. $-xy \geq 0$.

т.к. $x \neq 0$ и $y < 0$, то левая часть не делится на 10.

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-x) (\lg(x) + \lg y)$$

$$\lg y (4 \lg x - 2 \lg y) = \lg(-x) (\lg(x) + \lg y)$$

$$4 \lg y \lg(x) - 2 \lg^2 y = \lg(x) + \lg y \lg(-x)$$

$$4 \lg y \lg(x) - 2 \lg y \cdot \lg y - \lg^2(x) - \lg y \lg(-x) = 0$$

$$3 \lg y \lg(x) - 2 \lg y \cdot \lg y - \lg^2(x) = 0$$

~~$$3 \lg y \lg(x) - 2 \lg y \lg y$$~~

$$3 \lg y \lg(x) - 2 \lg^2 y - \lg^2(x) = 0$$

$$2 \lg y - 2 \lg^2 y + \lg y \lg(x) - \lg^2(-x) = 0$$

~~$$2 \lg y (\lg(x) - \lg y) + (\lg y - \lg(-x)) = 0$$~~

~~$$2 \lg y$$~~
$$3 \lg y \lg(x) - 2 \lg^2 y - \lg^2(x) = 0$$

$$2 \lg y \lg(-x) - 2 \lg^2 y + \lg y \lg(x) - \lg^2(-x) = 0$$

$$2 \lg y (\lg(x) - \lg y) - \lg(x) (\lg(-x) - \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} 2 \lg y = \lg(x) & -x = y^2 \\ \lg(-x) = \lg(y) & \Rightarrow -x = y \end{cases}$$

1). $x = -y$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 16875 \div 3 \\ 3625 \div 5 \\ 725 \div 5 \\ 145 \div 5 \\ 29 \end{array}$$

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5$$

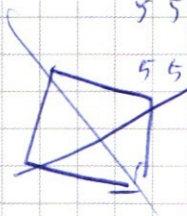
$$5555 \quad 333 \quad 7$$

$$8726$$

8-знач. число

$$5555 \quad 9391$$

$$5555$$



$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$$

$$5555 \cdot 9391 = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 840$$

$$(12) \cos 7x + \cos 5x - \sqrt{2} \cos 70x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 70x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (1 - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x \quad 8\text{-знач.}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \sin^2 5x = \sqrt{2} \cos 2x$$

$$2 (\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 70x$$

$$2 \cos 7x = \sqrt{2} \cos 70x$$

$$\sqrt{2} \cos 7x = \cos 70x \quad (2x)$$

$$\cos 7x = \cos \frac{\pi}{4} \cos 70x$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos 70x = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 3 \\ 3625 \div 5 \\ 725 \div 5 \\ 145 \div 5 \\ 29 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 3 \\ 5625 \div 3 \\ 1875 \div 3 \\ 625 \div 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3225 \div 5 \\ 15 \div 3 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 3 \\ 5625 \div 3 \\ 1875 \div 3 \\ 625 \div 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 3 \\ 5625 \div 3 \\ 1875 \div 3 \\ 625 \div 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{array}$$

$$25 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\begin{array}{r} 5625 \div 3 \\ 1875 \div 3 \\ 625 \div 5 \\ 125 \div 5 \\ 25 \div 5 \\ 5 \end{array}$$

$$\cos x - \sin x = ?$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sin x - \sin y$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x-6-y > 0 \quad x-y > 6$$

$$x-6+y > 0 \quad x+y > 6$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x - 12 = 12 \quad \begin{array}{c} -6-y \\ 6 \end{array} \quad |6-y| + |6+y| = 12$$

$$x/6 \geq 12$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 + 3^{2x} \\ 6 < 85 + 3^{2x} - 7^x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \leq y < 85 + 3^{2x} \quad x = x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{2x} \leq y < 3^x + 4 - 3^{2x} \quad x = 1$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x + \sqrt{2} \sin^2 5x - \sqrt{2} \cos^2 5x - 2 \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$-\sqrt{2} \sin 5x (\sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x) - \sqrt{2} \cos 5x (\cos 5x - \sqrt{2} \sin 2x)$$

$$y > 0 \quad x < 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg 4} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

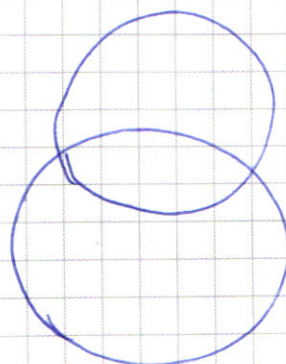
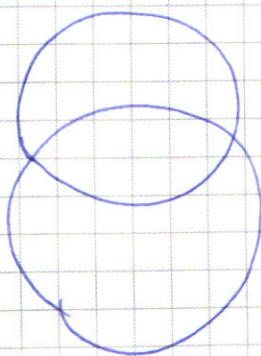
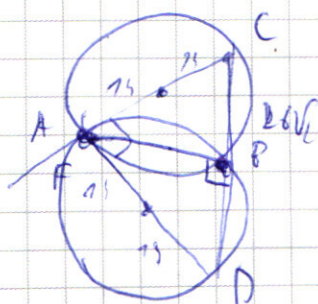
$$y > 0 \quad -xy > 0 \quad \text{II} \quad x < 0$$

$$2y^2 - 2y + 8$$

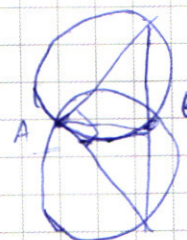
$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 2y = 0$$

$$y/x$$

$$2y^2 - 2xy - x^2 - 4x - 2y = 0$$



$$y/2y = \frac{2y(y-4)}{-x}$$



$$(\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x) \sin 5x + 3 \sin 3x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Дано:

$$\omega_1(O_1; R) \quad R = 13$$

$$\omega_2(O_2; R)$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = A; B$$

$$D \in \omega_1, C \in \omega_2$$

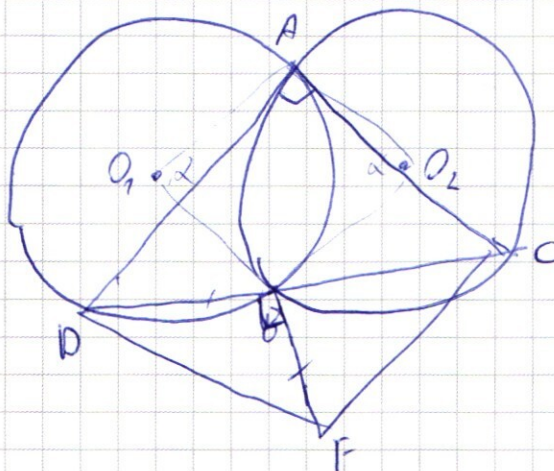
$$B \in CD$$

$$FB \perp CD$$

$$DB = BF$$

$$a) CF = ?$$

$$d) BC = 10 \quad \angle ACF = ?$$



Решение:

- a) Заметим, что т.к. радиусы ω_1 и ω_2 равны, то дуги, заключенные между Γ_{AB} и Γ_{AC} одной стороны равны:



$$\angle O_1 = \angle O_2$$

$$\text{Пусть } \widehat{AB} = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 45^\circ \Rightarrow \angle APB = \alpha = \angle ACB$$

$$\text{Пусть } \angle BAD = \gamma \text{ и } \angle BAC = \rho$$

$$\text{тогда } \gamma + \rho = 90^\circ = \angle DAC.$$

$$\text{Так как } \triangle BFC - \text{пря}$$

$$\Rightarrow FC = \sqrt{PB^2 + BC^2} = \sqrt{DB^2 + BC^2} \text{ по теор. Пиф.$$

$$\text{Получим из теоремы синусов } \triangle APB \text{ и } \triangle ACB:$$

$$\frac{DB}{\sin \gamma} = 2R = 26$$

$$DB = \sin \gamma \cdot 26$$

$$\frac{CB}{\sin \rho} = 2R = 26$$

$$CB = \sin \rho \cdot 26$$

$$FC = \sqrt{DB^2 + CB^2} = \sqrt{26^2 (\sin^2 \gamma + \sin^2 \rho)} = \sqrt{26^2} = 26$$

$$\angle F = 26^\circ$$

$$\rightarrow \text{т.к. } \sin \rho = \cos \gamma, \text{ т.к. } \gamma + \rho = 90^\circ$$

a) Or bet: $CF = 26$

д. Так как $\Delta A DC$ - рт и прямой:

$$AC = \frac{7}{\sqrt{2}} \quad DC$$

$$DB = FB = \sqrt{FC^2 - CB^2} = \sqrt{67^2 - 100} = \sqrt{578} = 24,1 \Delta FBC$$

~~A~~ ~~B~~ ~~F~~ $DC = DB + BC = 24 + 10 = 34$

$\angle FCB = 45^\circ$. Тогда по н.к. в $\triangle FCB$:

$$\sin \varphi = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}, \quad \cos \varphi = \frac{5}{13}$$

S, AFC:

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} AC \cdot FC \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot \sin(45^\circ)$$

$$= 13 \cdot 17 \sqrt{2} \cdot (\sin 45^\circ \cdot \cos 4^\circ + \cos 4^\circ \cdot \sin 4^\circ) = 13 \cdot 17 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

$$= 17 \cdot 17 = 289$$

d. OTBET: $S_{DAEF} = 289$

(v4)



Плоск. Σ_0 пересекает сферу в 2-х точках P_1 и P_2 , т.е. P_1 лежит внутри Σ_0 .

Тогда рассмотрим касательные к сфере:

5

касательн. из, отн $\perp$ прямой, вед. точку касания и т.д. Тогда из упр-я касательные к сфере, перпендикулярные GO , касаются сферы в т. P_1 и P_2 , и площади сечений их равны, и h и g соответственно.

Также заметим, что площадь параллелограмма

Тогда они сделают вычитание (различение) в точке S,
которая переносит $\Gamma.F_1$ в $\Gamma.F_2$ с коэф. $K \left(\frac{SP_2}{SP_1} = K \right)$, $T = 2\pi$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.4) - 100%

Тогда площадь, площадь которой по площади равно 4, перейдет
в площадь, площадь которой равно 9, т.к. $P_1 \in L_1$, а
 $P_2 \in L_2$ (первой и второй площади). Тогда отношение
площадей равно $k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

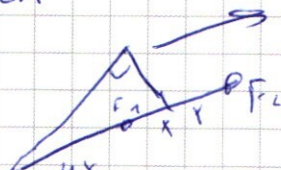
$\frac{SP_2}{SP_1} = k = \frac{3}{2} \Rightarrow SP_2 = 1,5 SP_1$. Тогда, т.к. P_1, O и P_2
на прямой, F_1, F_2 - диаметр = $SP_2 - SP_1 = \frac{1}{2} SP_1$

Тогда KO, P_1O - равны радиусу сферы то есть $\frac{1}{2} SP_1$

В таком случае KO, F_1O - радиус сферы

вита. чертёж

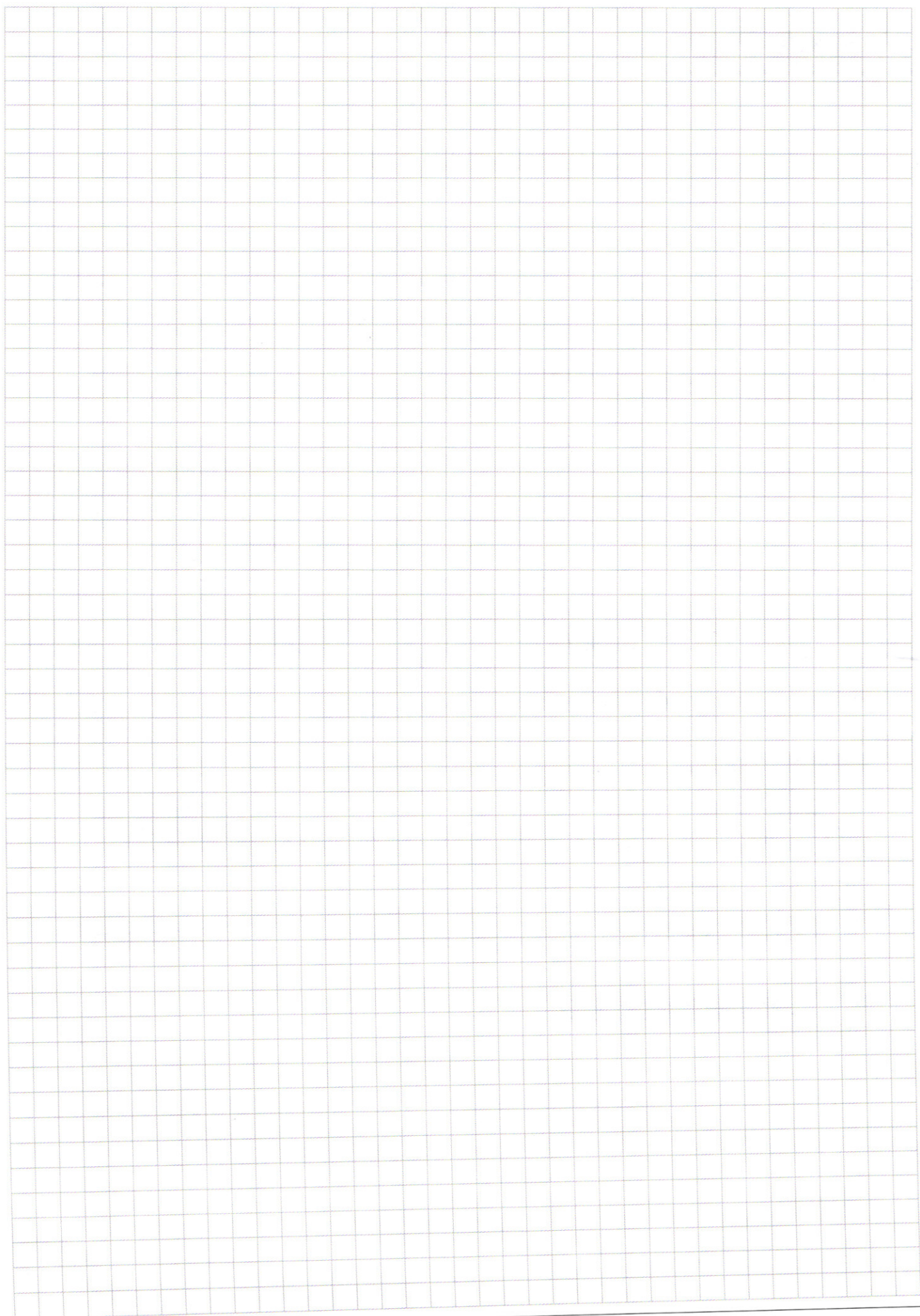
$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$



Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$

~~Примечание: КР не требуется.~~

~~$KO = KO \cdot \cos \angle KSO$~~



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y^2 = -x$. подставим вместо $x \rightarrow -y^2$ в (2):

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y = 1 \text{ корень}$$

$$y(y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 1; 2; -\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \quad | y - 2 \\ \underline{-(y^3 - 2y^2)} \quad \quad \quad y^2 - 6y + 8 \\ \underline{-(y^2 - 2y)} \quad \quad \quad -4y + 8 \\ \underline{-(-4y + 8)} \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

по Ю ОДЗ, т.к. $y > 0$ тогда только $y = 1; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } x &= -4; -\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = \\ &= -\frac{18-2\sqrt{17}}{4} = -\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

2) $y = -x$. подставим вместо $x \rightarrow -y$ в (2):

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$y(2y - 4) = 0$$

$$y = 2 \Rightarrow$$

$$x = -2$$

0. не по Ю ОДЗ.

Ответ:

$$x = -2; y = 2$$

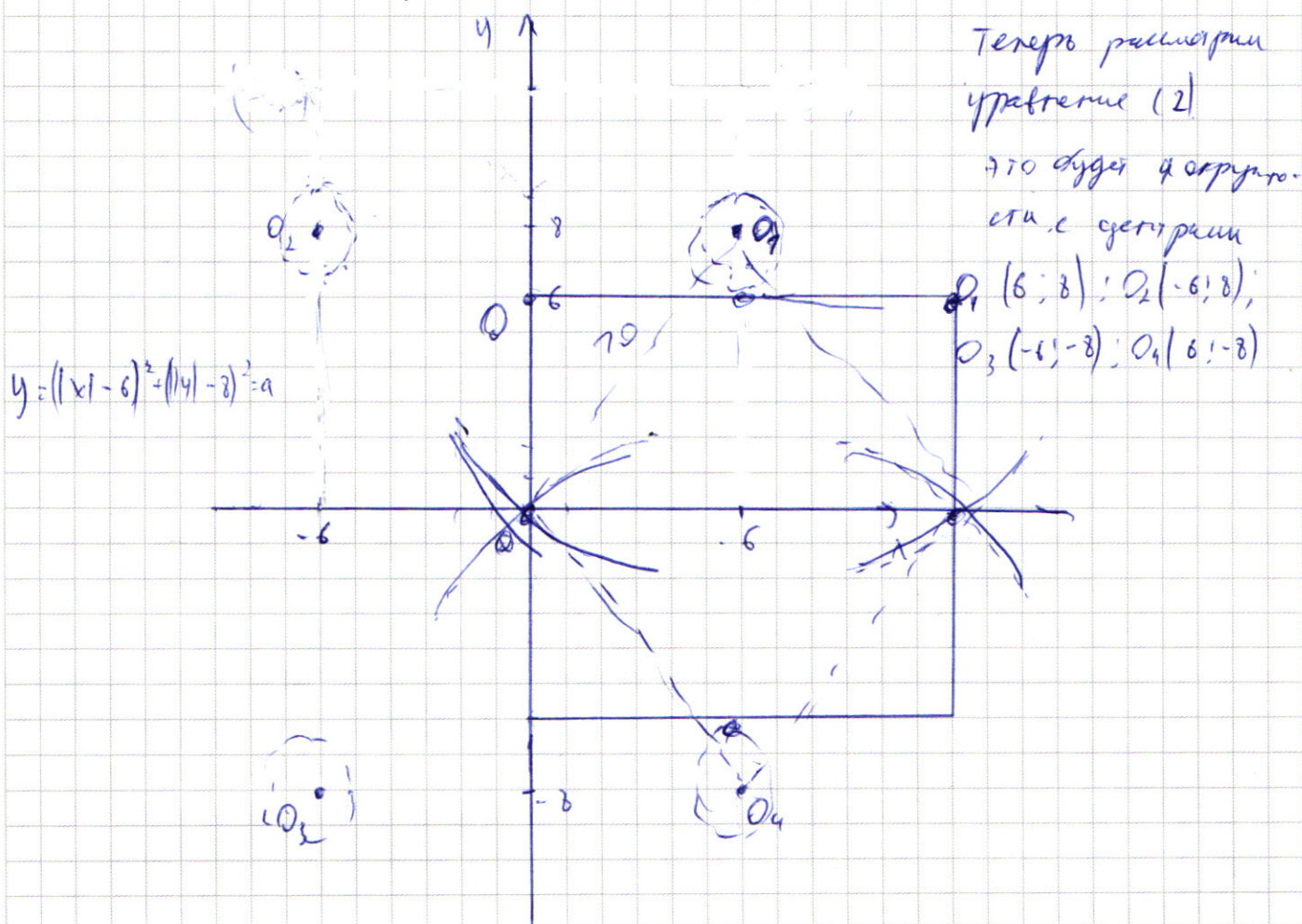
$$x = -4; y = 2$$

$$x = -\frac{9+\sqrt{17}}{2}; y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

поработаем с р-вом (1). Если рассмотреть 4 случая, когда подмодульные a и b имеют разные знаки, (1. $a > 0 \quad b > 0$ 2. $a > 0 \quad b < 0$ 3) $a < 0 \quad b > 0$ 4) $a < 0 \quad b < 0$)

то мы получаем 4 прямые $x=0; 2$ и $y=6; -6$ соответ-
ственно. Таким образом, графиком данного уравнения
является квадрат со стороной, равной $6-(-6)=12$ и центром в
т. $O(6; 0)$. Нарисуем его на графике:



Из графика видно, что точки O_1 и O_2 симметричны
оси Ox и лежат на пр-ой $y=6$ (1), который тоже
в свою очередь симметричен оси Ox . Тогда мы
видим, что одно решение достигается только при $a=4$
(тогда радиусы будут равны 1). Тогда окружности с ц. в т. O_1 и O_2
касаются пр-ой (1) $\Rightarrow$ каждая из них имеет по 1 точку.
Тогда $\Rightarrow$ всего 2 решения. Также 2 решения достиг
при $\sqrt{a} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 10 \Rightarrow a=100$ (тогда это 10 пр-ых $y=6$ и $y=-6$,
но они совпадают. (на пр-ой пунктирной) Ответ: при $a=4; 100$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 70x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

второй вариант:

$$(2 \cos 2x - 2 (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x)) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$(2 \cos 2x - 2 \sin(5x + \frac{\pi}{4})) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin(5x + \frac{\pi}{4}) \\ \cos 5x = \sin 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \\ \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 5x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 5x = \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \\ \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi n \\ 5x = \pi - \frac{\pi}{2} + 5x + 2\pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{10} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{10} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{10}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \quad n, k \in \mathbb{Z}$

21

Для числа разности число 16875 на произведение.

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Итак, $16875 = 5^4 \cdot 3^3$

Поскольку нам нужно чтобы произведение чисел было равно 16875, мы можем выбрать только 2 таких набора цифр:

1) 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

2) 5, 5, 5, 5, 3, 9, 1, 1

(2 тройки превращаются в 9 и мы добавим 1, чтобы произведение было то же)

1) K_1 для четырех цифр пять, трех цифр три и единички равно:

$$K_1 = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot 6} = 280.$$

по формуле

K_1 - кол-во чисел из 8 цифр

2) K_2 для четырех цифрок, десятков, сотен и 2-х единиц равно:

$$K_2 = \frac{8!}{4! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 42 \cdot 20 = 840$$

K_2 - кол-во чисел, составленных из 8 цифр

Итак, всего получилось

$$K = K_1 + K_2 = 840 + 280 = 1120 \text{ чисел.}$$

Ответ: 1120 чисел

23

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Начнем сначала с равенства 1:

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = -x^{\lg(-xy)}$$

т.к. $y > 0$ по ОДЗ, то $-xy > 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow x < 0$.

Тогда мы можем приравнять степени обеих частей по основанию 10:

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \cdot \lg \left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y (4 \lg x - 2 \lg y) = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$4 \lg y \lg x - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) - \lg(-x) \lg(y) = 0$$

$$3 \lg y \lg(-x) - 2 \lg^2 y - \lg^2(-x) = 0$$

$$2 \lg y \lg(-x) - 2 \lg^2 y + \lg y \lg(-x) - \lg^2(-x) = 0$$

$$2 \lg y (\lg(-x) - \lg y) - \lg(-x) (\lg(-x) - \lg y) = 0$$

$$(2 \lg y - \lg(-x)) (\lg(-x) - \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} 2 \lg y = \lg(-x) \\ \lg(-x) = \lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -x & 1) \\ y = -x & 2) \end{cases}$$