

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

Только цифры 1, 1, 3, 5, 5, 5, 5, 9 или 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5
в восьмизначном числе дают такое произве-
дение

1) количество способов составить восьмизначное
число из цифр 1, 1, 3, 5, 5, 5, 5, 9 равно

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 2! = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$$

2) количество способов составить восьмизначное
число из цифр 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5 равно

$$C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 5 = 280$$

Всего чисел будет $280 + 840 = 1120$ чисел

Ответ: 1120 чисел

N 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\vee 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0$$

$$\vee \cos 2x = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\vee \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, n, k, m \in \mathbb{Z}$

№ 3

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \left(\frac{-x}{y}\right) \lg(-xy)$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \cdot \lg y = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$$

$$\lg y \cdot \lg x^4 - \lg y \cdot \lg y^2 = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$$

$$4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \cdot \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$\lg^2(-x) - \lg(-x) \cdot \lg y - 2 \lg(-x) \cdot \lg y + 2 \lg^2 y$$

$$\lg(-x) (\lg(-x) - \lg y) - 2 \lg y (\lg(-x) - \lg y) = 0$$

$$\lg(-x) = +2 \lg y$$

$$-x = y^2$$

$$\vee \quad \lg(-x) = \lg y$$

$$\vee \quad -x = y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ y(y-2)(y^2+y-4) = 0 \end{cases}$$

~~$$\begin{cases} x = y^2 \\ y(y-2) \left(y - \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right) \left(y - \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) = 0 \end{cases}$$~~

$$\begin{cases} x=0, y=0 \\ x=-4, y=2 \\ x=\frac{\sqrt{17}+9}{2}, y=\frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\frac{-9+\sqrt{17}}{2}, y=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

с учётом ОДЗ: $(-4; 2), (-2; 2), \left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right)$

Ответ: $(-4; 2), (-2; 2), \left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right)$

№ 4

Пусть сферы, которые касаются сферы S и перпендикулярны $SO \triangle ABC$ и A_1, B_1, C_1 ; $SO \cap A_1, B_1, C_1 = S_1$
 $SO \cap ABC = S_2$

$$= \frac{\frac{SS_2 - SS_1}{2}}{\frac{SS_2 - SS_1}{2} + SS_1} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}$$

Omben: $\arcsin(\frac{2}{5})$; $\frac{144}{25}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ - 75 \\ \hline 78 \\ - 75 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ - 30 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 23 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ - 5 \\ \hline 77 \\ - 75 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 735 \overline{) 5} \\ - 70 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$3^3 \cdot 5^4$$

$$abcdefgh = 3^3 \cdot 5^4$$

$$9 \cdot 3 \cdot 3$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$7) 9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$$

$$2) 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 24 \\ \hline 120 \\ 42 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot 1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{1! \cdot 1!} =$$

$$= \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5$$

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^2 \cdot C_4^4 = \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 4!} =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{2! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5$$

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 280 \\ \hline 840 \\ 1120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 35 \\ \hline 280 \end{array}$$

12

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cdot \cos(5x) \cos(2x) - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

~~$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 5x - \cos 10x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$~~

~~$$\sqrt{2} \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - x)$$~~

~~$$2 \sqrt{2} \cos 2x \cdot \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) - \sqrt{2} \cos 10x$$~~

$$2 \cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad \vee \quad 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \quad \frac{3\pi}{8}$$

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) + \sin(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$2 \sin$$

$$\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7}$$

$$\frac{\pi \cdot 2}{8} \quad \frac{\pi}{12}$$

$$2 \cdot \cos$$

$$0 \leq \frac{\pi}{8} \quad y \neq 0$$

$$y > 0$$

$$-x \geq 0$$

$$x < 0$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -x > 0 \\ -xy > 0 \end{cases}$$

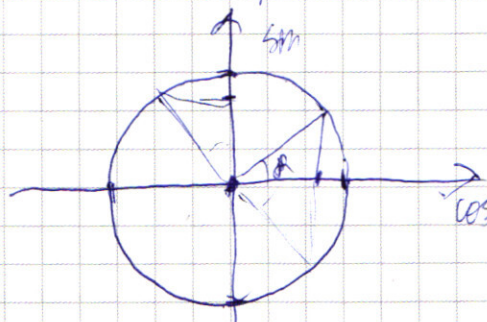
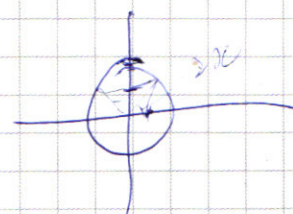
$$0 \leq \pi \quad y \neq 0$$

$$y > 0$$

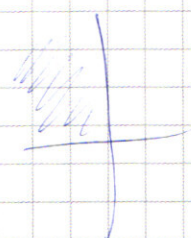
$$x < 0$$

$$y > 0$$

$$x < 0$$

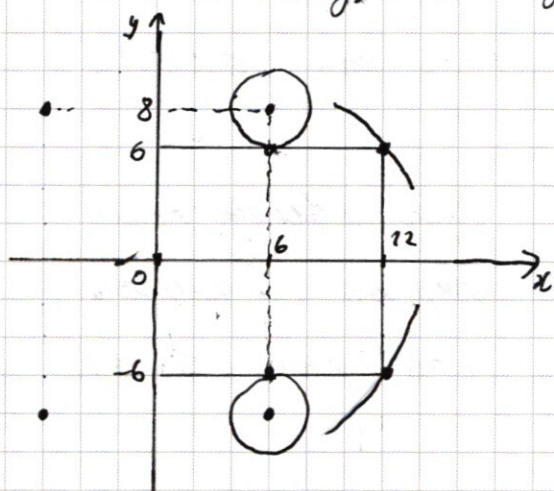


$$\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4})$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $a = 0$ система не имеет решений и поэтому
она будет иметь решения тогда и только тогда,
когда хотя бы одна из окружностей будет пересекаться
или касаться квадрата, т.е. рисунок ниже -
примечательно относительно $y=0$, то касаться или
пересекаться квадрат будут хотя бы 2 окружности



Из рисунка видно, что при
 $a^2 < 2^2$ пересечений нет

при $a^2 = 2^2$ есть 2 решения

при $2 < a^2 < 2^2 + 6^2$ 4 решения

при $a^2 = 2^2 + 6^2$ 6 решений
и т.д.

при $a^2 = 18^2 + 14^2$ 2 решения

Итого 2 решения при $a = 2^2$ и $a = 18^2 + 14^2$ т.е.

при $a = 4$, $a = 520$

Ответ: 4; 520

№ 5

Рассмотрим уравнение $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

1 случай

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \\ x=12 \end{cases}$$

представляет собой отрезок на прямой $x=12$

при $-6 \leq y \leq 6$.

2 случай

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \\ y=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq 6-x \\ y=-6 \end{cases}$$

представляет собой отрезок на прямой $y=-6$ при $0 \leq x \leq 12$

3 случай

$$\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq 6-x \\ y=6 \end{cases}$$

представляет собой отрезок на прямой $y=6$ при $0 \leq x \leq 12$

4 случай

$$\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq 6-x \\ x=0 \end{cases}$$

представляет собой отрезок на прямой $x=0$ при $-6 \leq y \leq 6$

итого ~~уравнение~~ $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$ имеет

~~четыре решения~~

квадрата со стороной 12

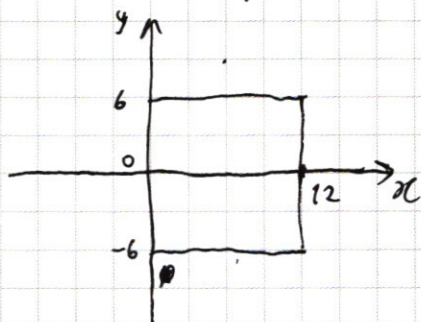
уравнение $(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$

представляет собой 4 окружности

с центрами в точках $(6; 8), (-6; 8)$

$(6; -8)$ и $(-6; -8)$ и с радиусом $\sqrt{a}$

если $a \geq 0$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{ОДЗ: } y > 0 \\ x < 0$$

$$\frac{1+17-2\sqrt{17}}{4} \quad \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{13+20+12}{45}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{1+17+2\sqrt{17}}{5} \quad \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \cdot \lg y = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$$

$$\lg y \cdot \lg(x^4) - \lg y \cdot \lg(y^2) = \lg^2(-x) + \lg(y) \cdot \lg(-x)$$

$\Rightarrow x$

$$\lg y \cdot \lg x^4 - \lg^2 y = \lg^2(-x)$$

$\Rightarrow x$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg y \cdot \lg(-x) + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg(-x)(\lg(-x) - \lg y) = 2 \lg y (-\lg y + \lg(-x))$$

$$\lg(-x) - 2 \lg y = 0 \vee \lg(-x) = \lg y$$

$$-x = y^2$$

$$-x = y$$

$$D = 1+16 \quad 17$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + y^4 - 8y = 0$$

$$\frac{24}{18}$$

$$y^3 - y^4 + 6y^2 - 8y$$

$$\frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + 8 & y-2 \\ \hline y^3 - 2y^2 & \\ \hline y^2 - 6y & \\ y^2 - 2y & \\ \hline -4y + 8 & \end{array}$$

$$-1 \quad -1 \quad +6 \quad +8$$

$$1 \quad -1 \quad -6 \quad +8$$

$$-8 \quad -4 \quad +12$$

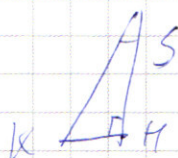
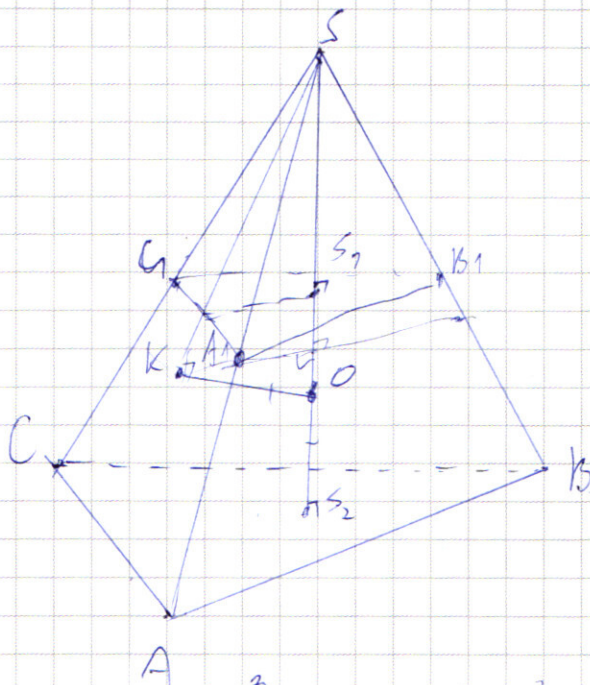
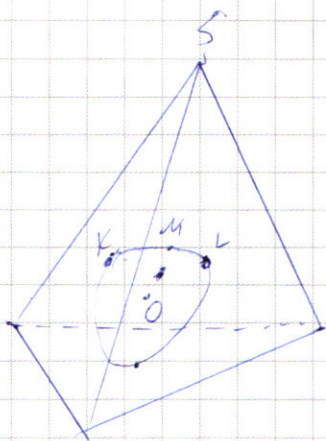
$$8 \quad -4 \quad -12 \quad +8$$

$$y(y-2)(y^2+y-8)$$

$$(y^2-2y)$$

$$y^4 + y^3 - 8y^2 - 2y^3 - 2y^2 - 16y$$

24



$$\frac{720}{24} = 30$$

$$\frac{s_1 H_1}{3 H_1} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{KH}{SK} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{24 \cdot 5}{25} = \frac{6}{5}$$

$$\sin(\angle KSO) = \frac{R}{SO} =$$

$$= \frac{s_2 - s_1}{2} = \frac{\frac{2}{5} s_1}{\frac{5}{7} s_1} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{AKO}}{S_{A,B,C}} = \left(\frac{s_2}{s_1}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$s_2 = \frac{3}{2} s_1$$

$$\cos \angle KSO = \frac{s_1}{SK}$$

$$\cos = \frac{SK}{SK}$$

$$\frac{s_1 H_1}{3 H_1} = \frac{2}{5}$$

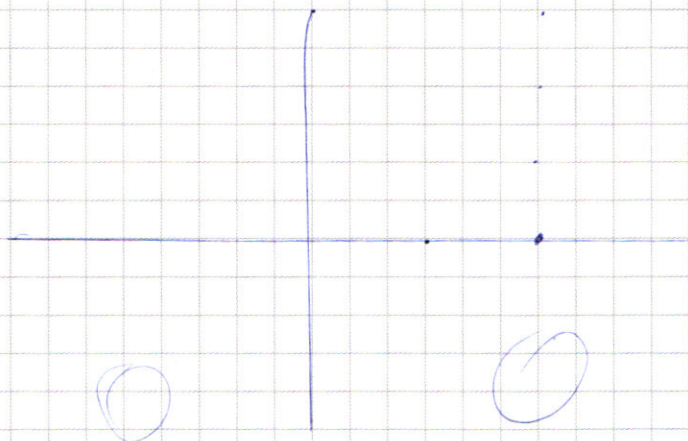
$$\frac{KH}{SK} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{KH}{H_1 s_1} = \frac{SK}{s_1}$$

2/5

1) x=0

$$2b - y < 0 \quad -b + y < 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

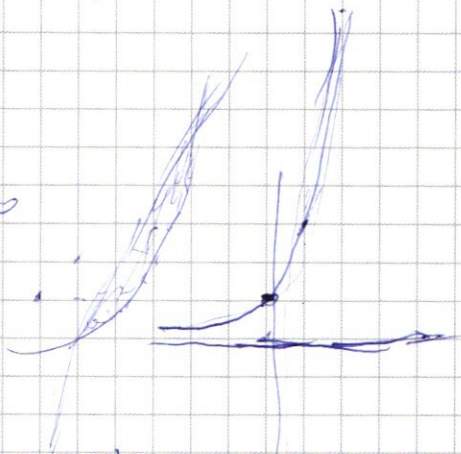
17

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x - (3^{81} - 1)x + 4 \cdot 3^{81} - 85 < 0$$

$$3^x (1 - 4 \cdot 3^{81-x})$$



15

1) $x - 6 - y \geq 0$

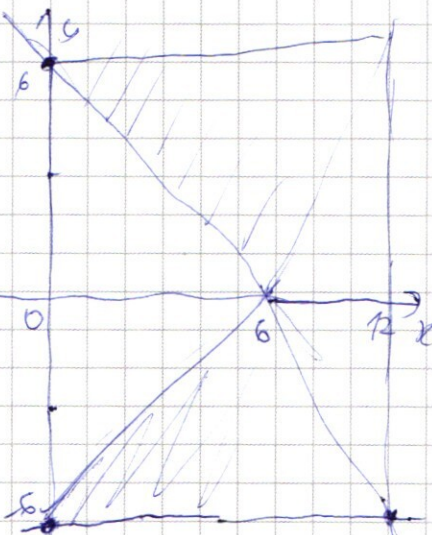
$$y \leq x - 6$$

$$x = 72$$

$$\begin{array}{r} 98 \\ \times 78 \\ \hline 784 \\ 780 \\ \hline 324 \\ \times 77 \\ \hline 324 \\ 196 \\ \hline 520 \end{array}$$

2) $x - 6 + y \geq 0$

$$y \geq 6 - x$$



2) $x - 6 - y \geq 0$ $x - 6 + y \leq 0$

$$y \leq x - 6$$

$$y = -6$$

3) $x - 6 - y \leq 0$ $x - 6 + y \geq 0$

$$y \geq x - 6$$

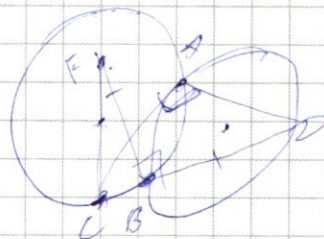
$$y = 6$$

4) $x - 6 - y \leq 0$ $x - 6 + y \leq 0$

$$y \geq x - 6$$

$$x = 0$$

$$85 \quad 17.5$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

