

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $16875 \cdot 5^4 \cdot 3^3$

⇒ необход. как восьмизначные числа должны содержать либо а) ~~а~~ 4 пятерки, и 3 тройки, и одну единицу, либо б) 4 пятерки, и одну 9, и одну 3, и две единицы. Других вариантов нет ^{только} т.к. нет других цифр, имеющих делителей 5 или 3 (число 6 не год-т т.к. ~~есть~~ есть еще один делитель кроме 3-это делитель 2).

Рассмотрим каждую группу отдельно:

а) У нас есть группа цифр 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, из которых можно сост. восьм-ри. числа удовл. условиям. Посчитаем их кол-во:

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 40 \cdot 7 = 280 - \text{чисел.}$$

б) Группа ~~из~~ цифр 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5, 5, из которых можно сост. восьм-ри. числа удовл. условиям. Их кол-во:

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 40 \cdot 21 = 840 - \text{чисел.}$$

⇒ Всего восьм-ри. чисел $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120

2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

Рассмотрим отдельно $\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \right) =$
 $= \sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$

$$\Rightarrow (\cos 5x - \sin 5x) \left(2 \cos 2x - 2 \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 5x = \sin 5x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right)$$

$$\Rightarrow (\cos 5x - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right)) \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) \\ \cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi m \\ 5x = 5x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi h \\ 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \\ 0 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi h \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} m \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} h \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} k \end{cases}$$

n, m, h, k - целые числа.

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} m$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} h$,
 $x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} k$; $m, h, k \in \mathbb{Z}$.

3. см. на след. странице

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \begin{cases} 1) \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2) 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y \leq 0 \end{cases}$$

$$ODZ: \begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

Прологарифмируем 1) $\Rightarrow \lg \frac{x^4}{y^2} \lg y = \lg(-xy) \lg(-x)$

$$\lg y \cdot \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

Разберемся с правой и левой частями отдельно

$$\begin{aligned} \text{I. } \lg y \cdot \lg \left(\frac{x^4}{y^2}\right) &= 2 \lg y \cdot \lg \frac{x^2}{y} = 2 \lg y (\lg x^2 - \lg y) = \\ &= 2 \lg y (2 \lg(-x) - \lg y) = 4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y \end{aligned}$$

по ODZ ставим сразу $-x$, а не $|x|$

$$\text{II. } \lg(-xy) \cdot \lg(-x) = (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x) = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$$

$$\Rightarrow 4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg y \cdot \lg(-x) + 2 \lg^2 y = 0$$

Сделаем замену $\lg(-x) = t$, $\lg y = u \Rightarrow$

$$t^2 - 3ut + 2u^2 = 0 \Rightarrow D = 9u^2 - 8u^2 = u^2$$

$$t = \frac{3u - u}{2} \leq u \Rightarrow \lg(-x) \leq \lg(y) \Rightarrow -x \leq y \Rightarrow x \geq -y$$

$$t = \frac{3u + u}{2} \geq 2u \Rightarrow \lg(-x) = 2 \lg y \Rightarrow \lg(-x) = \lg y^2 \Rightarrow -x = y^2 \Rightarrow x = -y^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y (*) \\ x = -y^2 (**) \end{cases} \text{ Подставим в 2)}$$

$$(*) \ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y - 8y \leq 0 \Rightarrow 2y^2 - 4y \leq 0 \Rightarrow 2y(y - 2) \leq 0$$

корни $y = 0$ и $y = 2$ ODZ показывает только $y \leq 2 \Rightarrow x \leq -2$

$$(**) \ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y \leq 0 \Rightarrow y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) \leq 0$ $y = 0$; $y = 2$ корни см. на след. стр.

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \mid y - 2 \\ \underline{y^3 - 2y^2} \\ y^2 - 6y \\ \underline{y^2 - 2y} \\ -4y + 8 \\ \underline{-4y + 8} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} y^2 + y - 4 &= 0 \\ D &= 1 + 16 = 17 \\ y_0 &= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

⇒ ~~корни~~ корни $y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$

ОДЗ пог-то только

$$\begin{aligned} y_1 &= 2, y_2 = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ \Rightarrow y &= x_1 = -4, x_2 = -\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = -\frac{1 + 17 - 2\sqrt{17}}{4} = -\frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \\ &= -\frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

⇒ Решением сист. ур-ний будут:

$$x = -2, y = 2; x = -4, y = 2; x = -\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

Все корни подходят по ОДЗ.

Ответ: $x = -2, y = 2$

$$\begin{aligned} x &= -4, y = 2 \\ x &= -\frac{9 - \sqrt{17}}{2}, y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{aligned}$$

5. $|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$

$$(1) (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a$$

1) Рассмотрим различные случаи.

$$\text{I. } \begin{cases} x - 6 - y \geq 0 \\ x - 6 + y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x - 6 \\ y \geq -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 6 - y + x - 6 + y &= 12 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\text{II. } \begin{cases} y \leq x - 6 \\ y < -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - 6 - y - x + 6 - y &= 12 \\ -2y &= 12 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

$$\text{III. } \begin{cases} y > x - 6 \\ y \geq -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x + 6 + y + x - 6 + y &= 12 \\ 2y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{IV. } \begin{cases} y > x - 6 \\ y < -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -x + 6 + y - x + 6 - y &= 12 \\ -2x + 12 &= 12 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ан. ка след етракир.

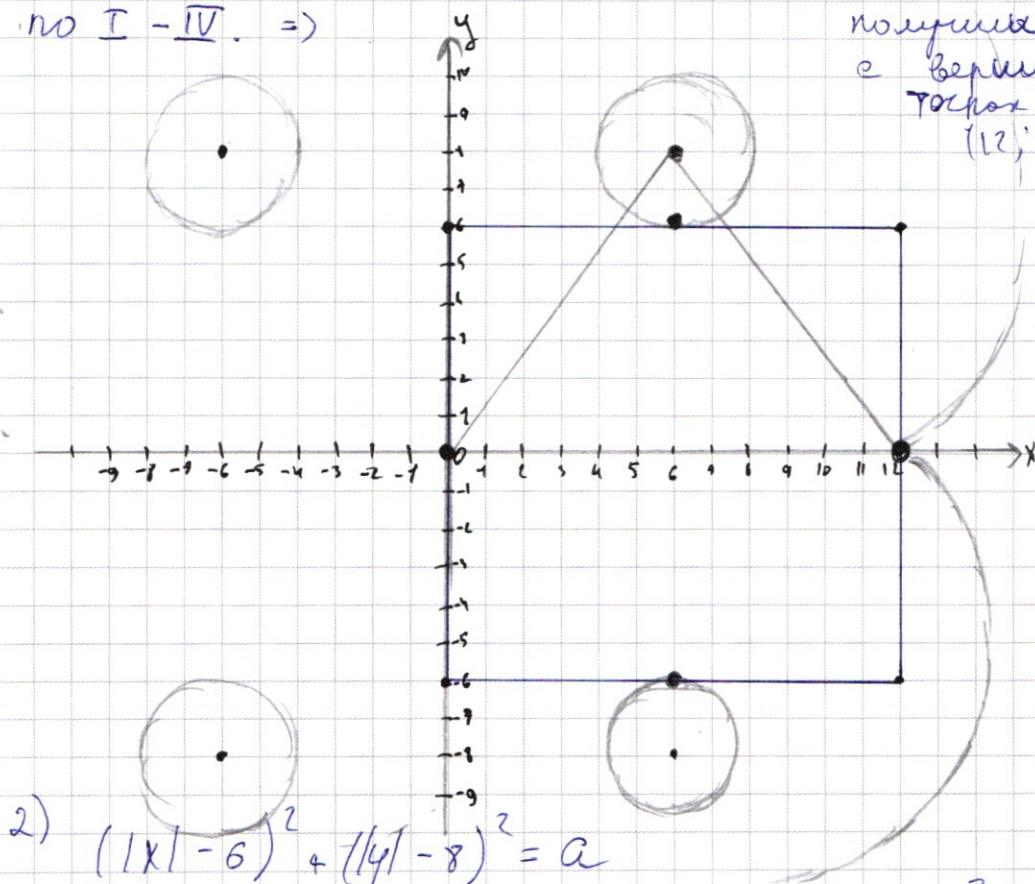
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение задачи 5.

Построим график $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

по I - IV. $\Rightarrow$

получим график - x
с вершинами в
точках $(0,6); (0,-6);$
 $(12,6); (12,-6)$.



2) $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$

Решая квадратное уравнение получим $(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$

только с учетом симметрии части $x \geq 0$ и $y \geq 0$
отн-ко оси y и оси x .

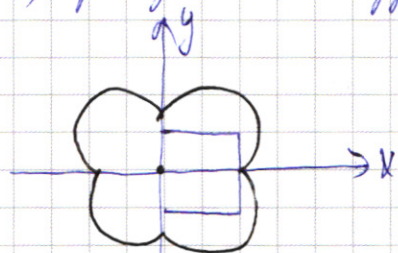
При небольшом a это будут 4 окр. т. с центрами
 $(6,8); (-6,8); (6,-8); (-6,-8)$.

Заметим когда $R \leq 2$, то система будет
иметь ровно 2 решения. Как показано на верхнем
рисунке.
При меньшем радиусе решений нет.
см. на след. стр.

⇒ рисунок будет выглядеть где-то так:

Такое будет при $R \leq 10$.

(показ. на основ. рис. на прошлой стр.)



при дальнейшем увеличении радиуса решения не будут

Tonga $a \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow 1) R=2 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^2$

2) $R = 10 \text{ s}$ $a = 100$

(Определ. а очевидно не пов-т).

Ombeni: $a \leq 4$; $a \leq 100$

6.

1) $\angle AEB \leq \angle ADC$ т.к. равные радиусы и
опир. на одну хорду.

5) $\angle ACD = \angle ACB = \angle ADC = 45^\circ$ т.к.
 $\triangle ACD$ равноб.

$\Delta FBD - \text{пр. и равноб.} \Rightarrow \angle BFD = 45^\circ$
 $\angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle FHD = 90^\circ$

напрест. лесн. упр. равн.

10) $\text{Hypotenuse } FD \text{ и } \text{отр. } \gamma_b = K \Rightarrow \angle KDA = 90^\circ$
 $\angle A // FD \Rightarrow CF \perp KA \Rightarrow KA : CF = 2G$ (т.к. KA медиана)

2) $BC \leq 10 \Rightarrow FB \leq \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24 = BD \Rightarrow$

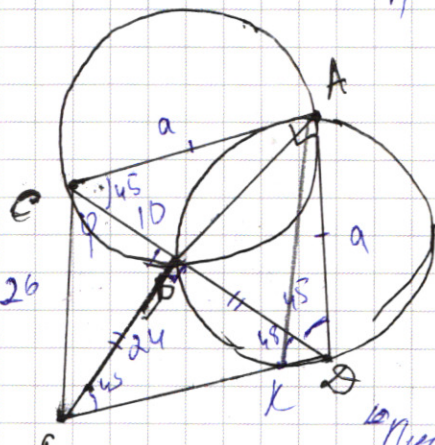
$CD \subseteq 10 + 24 \subseteq 34 \Rightarrow CA \circ \text{из пред. гр. } \Delta ACD \Rightarrow 2a^7 \subseteq 34^2$

$$a = \sqrt{578}$$

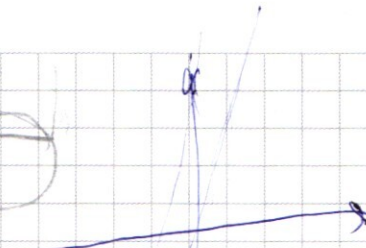
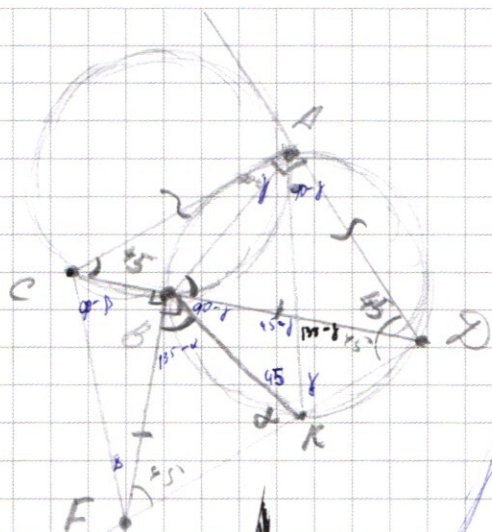
grace FCB = given φ . $\sin \varphi = \frac{34}{36} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{10}{36}$

$$\sin \angle FCA = \sin (45^\circ) = \sin 45^\circ \text{ and } \cos 45^\circ =$$
$$= \frac{24}{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{10}{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{24}{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{10}{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{26} \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{578}}{\sqrt{2} \cdot 26} (0.34) \approx 17 \sqrt{\frac{578}{2}}$$
$$S = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot CA \sin \angle FCA = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \sqrt{289} \cdot \frac{1}{17} = 289$$

$\text{OmbemiceF} = 26; S = 289.$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



7. $\int y \geq 3^x$ and 3^{81}
 $\int y < 85 + (3^{81} - 1)x$

$$3^{44} \cdot 3^{87} = 85^4 (3^{81} - 1) \times$$

$$3^x \cdot 4 \cdot 3^{87} = 85 \cdot 3^{87} \cdot x - x$$

[illegible]

$\textcircled{5} \text{---} 5 \text{---} 3^{81} \text{---} 4 \text{---} 4 \text{---} 3^{91} \text{---} 8 \text{---}$

$$3^4 + 4 \cdot 3^8 = 81 + 3^9 \cdot 4, \quad \text{с) } 8 \leq 9$$

$$3^{243} + 4 \cdot 3^{81} = -162 \cdot 3^{86}$$

$$CA \otimes DA = \frac{\sin \angle C}{\sin A} CA \leq \sin(\angle A + 45^\circ) \cdot \frac{\sqrt{10}}{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{10}{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{10} + 10}{13}$$

QF-26

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R$$

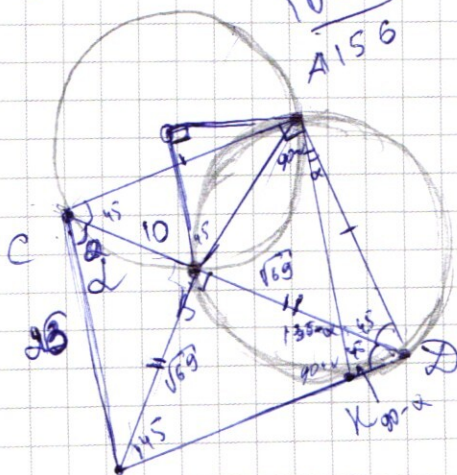
$$AB = 2 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$$

c FCB

$$a^2 = 5 + \frac{1}{2}\sqrt{69}$$

$$a = \sqrt{54} \pm \sqrt{69}$$

$$S_s = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot \frac{\sqrt{104 \cdot 69}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{69} \cdot 10}{13}$$



$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$11122$$

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

$$21211 \quad \text{---} \quad 1112$$

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

1) нет 9.

$$55553331$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 280$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ 40 \\ \hline 840 \\ 210 \\ \hline 1120 \end{array}$$

2) есть 9.

$$55559311$$

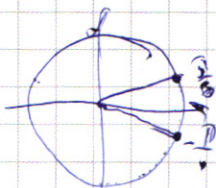
$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840$$

$$\Sigma = 280 + 840 + 280 = 1400$$

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ < 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

$$\sin 30^\circ + \sin 30^\circ = 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$$

$$\frac{1}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 1. \quad 16875 \overline{) 125} \\ \underline{125} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ \underline{10} \\ 35 \end{array}$$

$$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3$$

~~100~~

$$\begin{array}{r} 3! \\ 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1122 \\ 1212 \\ 1221 \\ 2112 \\ 2121 \\ 2211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13355 \overline{) 121} \\ \underline{31355} \\ 211 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 33155 \\ 33551 \\ 33515 \\ 13553 \\ 13535 \\ 155 \end{array}$$

1122

1) только есть 4-перем.

а) не 9 и не 6

5 есть 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1

$$13335555$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 8 \\ \underline{192} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4! \\ \underline{2!2!} \end{array}$$

112

$$13355$$

$$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$$

$$24 \cdot 8$$

б) есть 9 1 перемена

$$55559113$$

$$3 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \underline{4!3!} \end{array}$$

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 280 \overline{) 280} \\ \underline{280} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8! \\ \underline{4! \cdot 2!} \end{array}$$

$$40 \cdot 21 = 840$$

в) есть 20, только 6

$$55556$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ 840 \\ \underline{1120} \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 10x) - \sqrt{2} \cos 10x = \frac{1}{2}$$

$$2 \cos \frac{10}{2} x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 2x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos (5x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 2x \cdot \cos (5x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 5x + \sin 5x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \cos (5x - \frac{\pi}{4})$$

$$2 \cos 2x = 2 \cos (5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \cos (5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\cos 5x = \cos (\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$1) x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} n$$

$$2) 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} n$$

$$3) 10x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{10} n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{10} n$$

$$\frac{x}{y^2} \lg y = -x \lg(-xy)$$

$$OD 3) y > 0$$

$$-xy > 0$$

$$x < 0$$

$$-x > 0$$

$$x < 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 + 4x + 4$$

$$y^2 - xy + 16$$

$$y^2 - xy$$

$$2y^2 - xy - 8y + x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$$2 \lg(\frac{x^2}{y}) \lg y = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$2(\lg x^2 - \lg y) \lg y = (\lg -x + \lg y) \lg(-x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2y - x + \frac{x^2}{y} - 4\frac{x}{y} - 8 \leq 0$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\frac{(\lg(-x) + \lg y) \lg(-x)}{\lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y}$$

$$\lg y \lg\left(\frac{x^2}{y}\right) =$$

$$2 \lg y (\lg x^2 - \lg y) =$$

$$= 2 \lg y (2 \lg x - \lg y) =$$

$$4 \lg y \cdot \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(-x) \lg y$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg y \lg(-x) + 2 \lg^2 y = 0$$

$$t^2 - 3ut + 2u^2 = 0$$

$$D = 9u^2 - 8u^2 = u^2$$

$$t_1 = \frac{3u - u}{2} = \frac{2u}{2} = u$$

$$t_2 = 2u$$

$$\lg(-x) = \lg y \Rightarrow$$

$$-x = y \Rightarrow x = -y$$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y - 2) = 0$$

$$y = 2 \quad \text{на ОДЗ.} \Rightarrow x = 2$$

$$\lg(-x) = 2 \lg y$$

$$\lg(-x) = \lg y^2 \Rightarrow -x = y^2 \Rightarrow x = -y^2$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^2 - y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$1 - 1 - 6 + 8 \neq 0$$

$$-1 - 1 + 6 + 8 = 0$$

$$8 - 4 - 6 + 8 = 0$$

$$\text{корни } y = 0, y = 2 \quad \text{на ОДЗ}$$

$$y = -\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = 2 \quad y = -\frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow x = 4$$

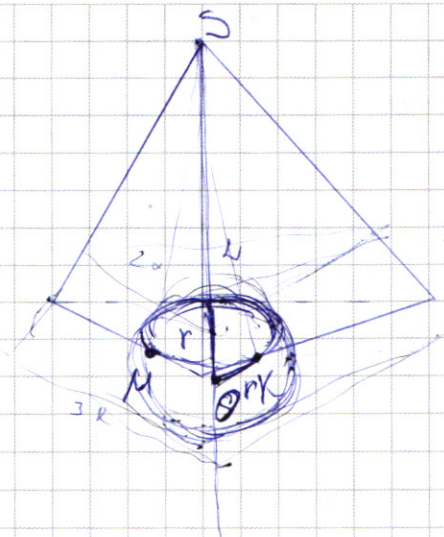
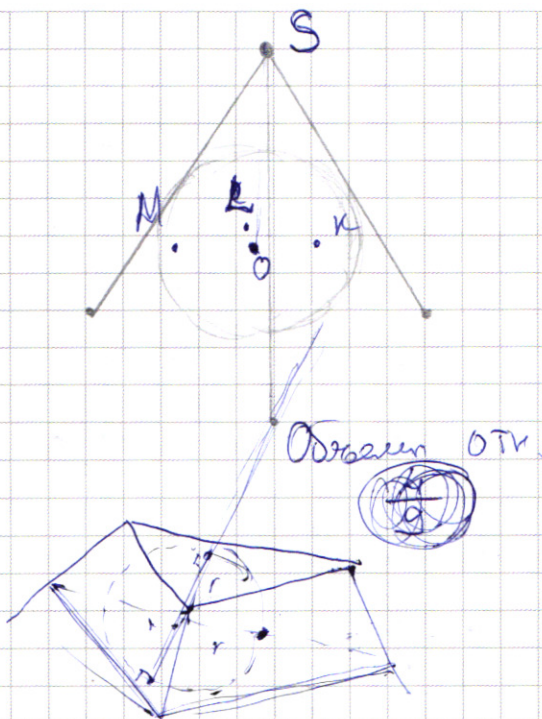
$$\frac{y^3 - y^2 - 6y + 8}{y^2 - 2y - 4} = \frac{y - 2}{y^2 - 2y - 4}$$

$$D = 17 \Rightarrow \sqrt{17}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{17} - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\boxed{\frac{9 - \sqrt{17}}{2}}$$



$\angle OKS = 90^\circ$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x-6-y + x-6+y &= 12 \\ 2x-12 &= 12 \\ 2x &\geq 24 \\ x &\geq 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \\ x-6+y < 0 \Rightarrow y < -x+6 \end{cases} \\ x-6-y - x+6-y &\leq 12 \\ -2y &\leq 12 \\ y &\geq -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \begin{cases} y > x-6 \\ y < -x+6 \end{cases} \\ x-6-y - x+6-y &\leq 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2y &\leq 12 & -x+6+y - x+6-y &= 12 \\ y &\geq -6 & -2x+12 &= 12 \\ & & -2x &\leq 0 \\ & & x &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \begin{cases} y > x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases} \\ -x+6+y + x-6+y &\leq 12 \\ 2y &\leq 12 \\ y &\leq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (|x|+6)^2 + (|y|+8)^2 &\leq a \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 &\leq a \end{aligned}$$

при $R=2$ 2 рен.
при $R=5$ 2 рен.

