

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) Разложим число 16875 на простое множители

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

Итак, $16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

2) Значит произведение ~~цифры~~ цифр
числа: 5

Есть всего 2 цифры, которые могут обеспечить
делимость на 5: это "0" и "5"

Однако если хотя одна цифра "0", то произведение
цифр $0 \rightarrow$ этот вариант не подходит

Значит обязательно будет хотя одна цифра "5"

3) Если цифра "5" будет более 4, то произведение цифр при разложении
на простое множители будет иметь ~~5~~ множитель 5 ~~более~~
в степени более 4, т.е. число будет отличным от 16875

4) Если цифра "5" будет менее 4, то произведение цифр при
разложении на простое множители будет иметь множитель
5 в степени менее 4, т.е. число будет отличным от 16875

5) Если цифра "5" будет равно 4, то ~~число~~ ~~можно~~ произв. цифр
может равняться 16875

6) Произведение оставшихся 3-х цифр $\equiv 27$, т.е. 3 и не кратно
оставшим простым факторам)
 $27 = 3^3$, поэтому можно использовать только те цифры, которые
которые не нарушают условия кратности произведения этих
4-х цифр тройке. Подходят цифры "3", "3", "3" (т.к. $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$) и "1" (т.к. при умно-
жении на 1 число все еще $\equiv 3$)

N 3

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{1/3} = (-x)^{1/3}(-xy)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ +x < 0 \end{cases}$$

Если значение равно 0

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

2 ур-ние:

$$2 + 1 - 1 - 4 - 8 = 0$$

нев. рав.

Если значение равно 1

$$\begin{cases} y = 10 \\ -xy = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 10 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$200 + 10 - 1 + 4 - 80 = 0$$

$$133 = 0 \text{ не в. рав.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если использованы одни „3“, то произв. цифр $81 \neq 27$

Если использованы одни „9“, то произв. цифр $9^4 = 3^8 \neq 3^3$

Значит в любом числе будут „1“

Если одна „1“, то все остальные „3“ (т.к. если заменить хоть одну „3“ на „9“, то произведение $\uparrow$ в 3 раза и не будет равно 27)

Если 2 „1“, то есть 3 случая: „3“ и „3“ $\rightarrow$ произв. $9 \neq 27$

„3“ и „9“ — произв. $27 = 27$

„9“ и „9“ — произв. $81 \neq 27$

Т.е. если 2 „1“, то остальные „3“ и „9“

Если 3 единицы — противоречие, т.к. нет цифр, равной 27.

Если 4 единицы — произв. $1 \neq 27$

7) Итак, остальные 4 цифры можно выбрать 2 способами:

„3“, „3“, „3“ и „1“ (1) или „9“, „3“, „1“ и „1“ (2)

8) Будем составлять 8-значное число

Для начала выберем 4 разряда для „5“. Их можно выбрать 8⁴

способами. Если 4 оставшихся разряда заполним (1) способом,

то последние единицы выбираются 4 способами, а остальные

автоматически заполняются „3“. Если (2) способом, то последние

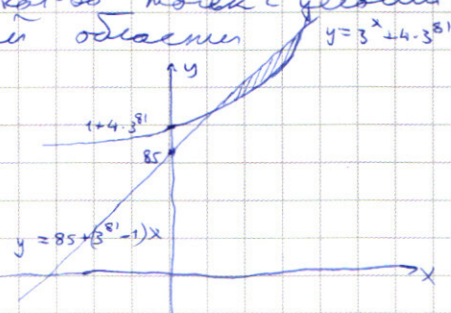
„9“ выбирается 4 способами, „3“ — 3 способами, остальные

автоматически заполняются „1“. Т.е. в (1) случае 4 способа, а в (2)-м

$4 \cdot 3 = 12$ способов. Всего заполнить 4 оставшихся разряда можно

№7

Можно представить кр-во пар как кр-во точек с условиями координатами в заштрихованной области



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16 способами. Итого $16 \cdot C_8^4$ способов

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$70 - 10 = 1120$ способов. Значит таких чисел 1120

Ответ: 1120

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\uparrow$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\uparrow$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x & (1) \\ \sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x & (2) \end{cases}$$

Решим (1) ур-ние

$$\cos 5x = \sin 5x$$

Если $\cos 5x = 0$, то $\sin 5x = \pm 1$, поэтому равенство неверно
Значит можно обе части : $\cos 5x$ без потери корней

$$\tan 5x = 1$$

$$\downarrow$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

Решим (2) ур-ние

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x = \cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x$$

$$\uparrow$$

$$\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

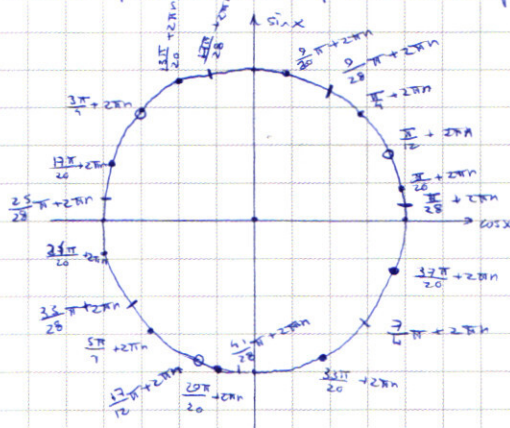
$$\uparrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ 5x + \frac{\pi}{4} - 2x = 2\pi m & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases}$$

Визуализация корней на комплексной плоскости



Как видно, корни не совпадают, поэтому

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5} & n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} & k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3} & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

N 5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Решим (1) у-ные графически. Нанесем график в ось x y(x), соотв. значения у-ных

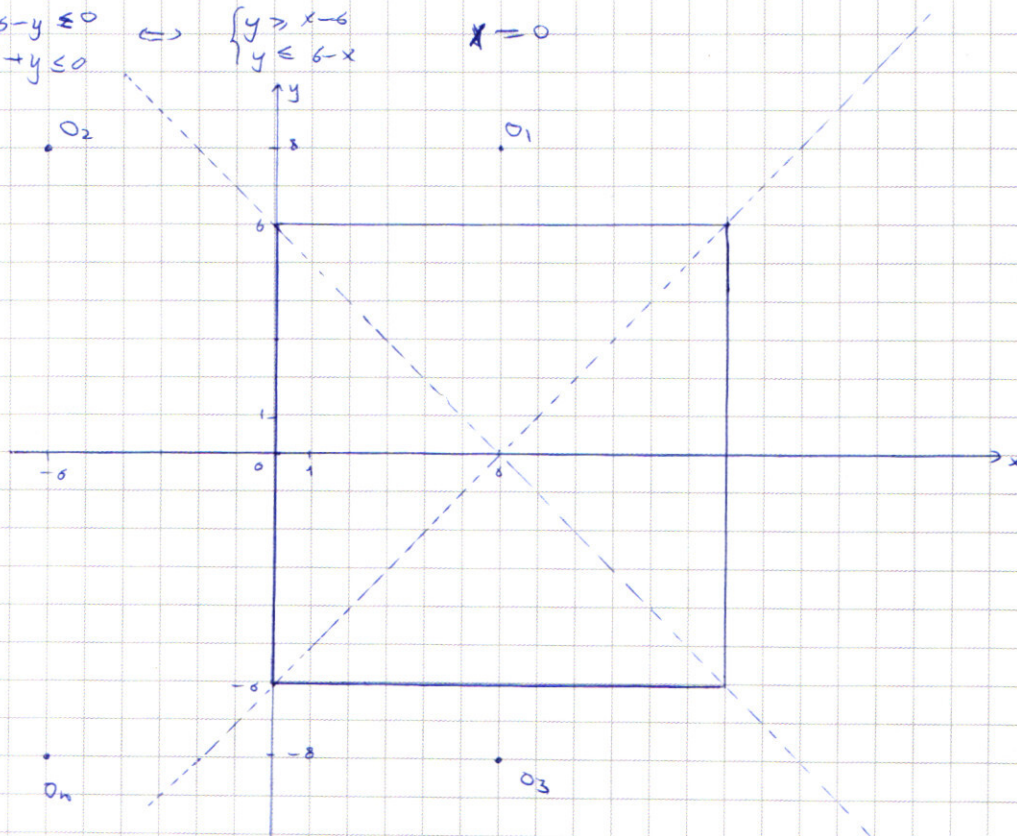
I случай $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} \quad x=12$

II сл. $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq 6-x \end{cases} \quad y=-6$

III сл. $\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} \quad y=6$

IV сл. $\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq 6-x \end{cases} \quad x=0$

Проведем прямые
 $y = x-6$
 $y = 6-x$
 и разобьем
 плоскость
 на соотв. четыре
 части



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Решим (2) ур-ние графически. Запишем, что оно имеет реш. только при $a \geq 0$ (т.к. имеем $a = \sum 2 \times$ квадратов, поэтому ур-ние не им. реш.)
при $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x-6)^2 + (y-8)^2 = a$ — окружность радиуса $\sqrt{a}$ с центром в т. $(6; 8)$ (т. O_1)

при $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (x+6)^2 + (y-8)^2 = a$ — окр-сть радиуса $\sqrt{a}$ с центром в т. $(-6; 8)$ (т. O_2)

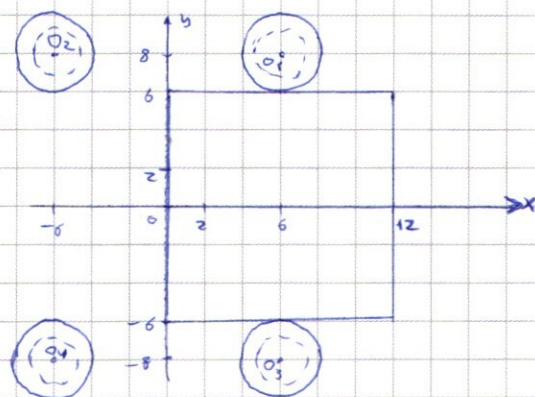
при $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad (x-6)^2 + (y+8)^2 = a$ — окр-сть радиуса $\sqrt{a}$ с центром в т. $(6; -8)$ (т. O_3)

при $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad (x+6)^2 + (y+8)^2 = a$ — окр-сть радиуса $\sqrt{a}$ с центром в т. $(-6; -8)$ (т. O_4)

Обозначим 1-ю окр-сть — окр-сть с центром в т. O_1 ;
Рассмотрим все случаи по мере $\uparrow a$

при $a \in [0; 4)$ окр-сти не имеют общих точек с квадратом

при $a = 4$ ~~окр-сти~~ 1 и 3 окр-сти касаются квадрата, 2 точки
всего $\rightarrow$ 2 решения, т.е. $a = 4$ подходит.



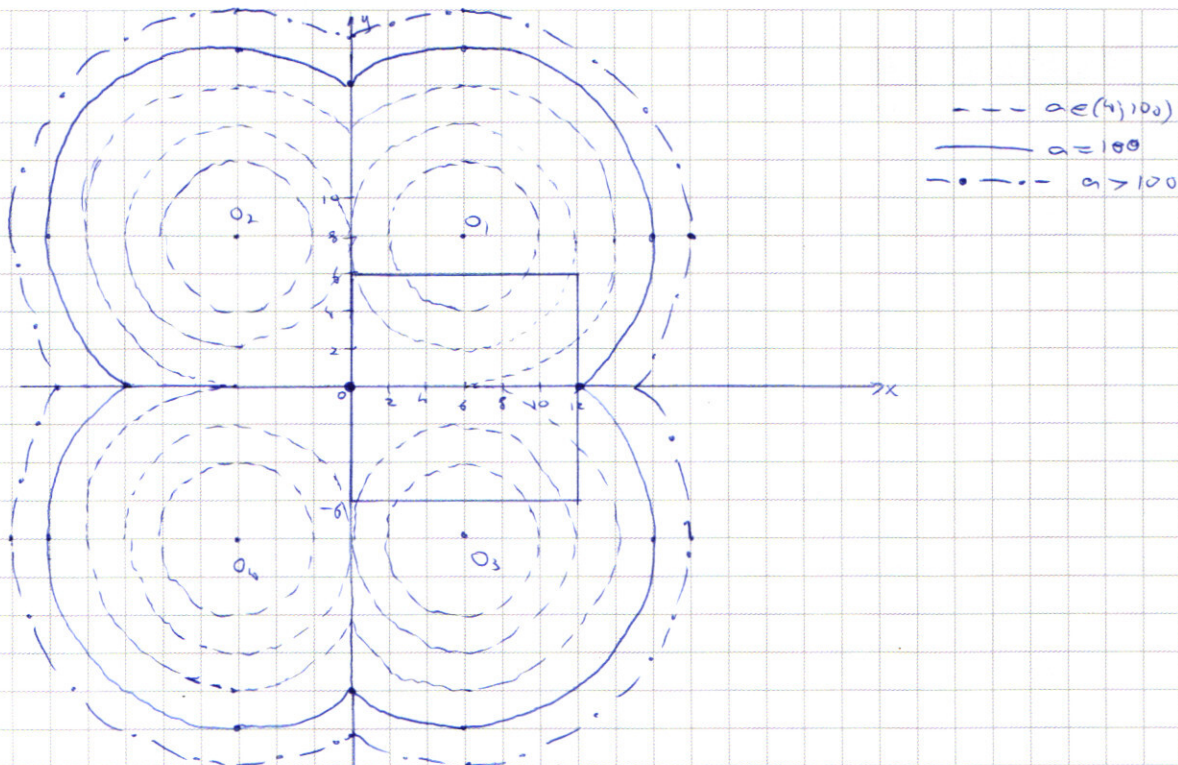
--- $a \in [0; 4)$

— $a \geq 4$

при дальнейшем увеличении a 1 и 3 окр-сти будут иметь по 2 точки пересечения $\rightarrow$ много 4 точки ~~пересечения~~ минимум. Этот случай не подходит

Тогда будет, пока $a \in (4; 100)$ при $a = 10$ окр-сти 1 и 3 будут пересекать квадрат в точке $(12; 0)$ и в точке $(0; 0)$. ~~Тогда~~ Окр-сти 3 и 4 будут пересек. в точке $(0; 0)$

Точка $(0; 0)$ будет принадлежать каждой из окр-стей, а т. $(12; 0)$ — 1 и 3-ей.
Всего 2 точки пересечения $\rightarrow a = 100$ подходит.



при дальнейшем увеличении a нет точек пересечения, т.е. $a > 100$ не подходит

Ответ: $\begin{cases} a = 4 \\ a = 100 \end{cases}$

НЧ

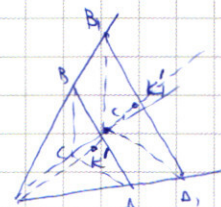
Дано
 $Ср. (O; O_1)$
 K, L, M — т. кас.
 S — верш. 3-хгр. угла
 $\angle KSO = ?$
 $S_{\text{сеч}} = ?$
 $S_1 = 4$
 $S_2 = 9$

Решение:

1) Т.к. оба сечения $\perp$ SO , то они $\parallel$. Значит параллельны и отрезки, явл. пересеч. плоскостей 3-хгранного угла и сечений (параллельных малому отрезку, лежащие в одной плоскости 3-хгранного угла). Обозн. ~~...~~ точки пересеч. сечений $\perp$ SO с ребрами 3-хгранного угла SA, SB, SC и A_1B_1, A_1C_1 соотв.

Т.е. $AB \parallel A_1B_1$; $AC \parallel A_1C_1$; $BC \parallel B_1C_1$

Обозн K' и K'' — точки пересечения сечений и прямой SO



$\triangle ABS \sim \triangle A_1B_1S$ по 3 углам ($\angle ASB$ — общий, $\angle SA_1B_1 = \angle SAB$ т.к. $AB \parallel A_1B_1$, $\angle SBA = \angle SB_1A_1$ т.к. $AB \parallel A_1B_1$)

Аналогично $\triangle ACS \sim \triangle A_1C_1S$ по 3 углам и $\triangle BCS \sim \triangle B_1C_1S$ по 3 углам

тогда: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AS}{A_1S} = \frac{BS}{B_1S} = \frac{CS}{C_1S} = \frac{1}{k}$ k — коэффициент подобия

т.е. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по 3 проп. сторонам

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = k^2 = \frac{9}{4}$$

$$\downarrow$$

$$k = \frac{3}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

через точки K, L и M находится в ходе применения той же самой закономерности отн. м. S с коэф. $\frac{6}{5}$ к сечению ABS

$$\frac{S_{\text{сеч}}}{S_1} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Rightarrow S_{\text{сеч}} = 4 - \frac{36}{25} = \frac{144}{25}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$
 $S_{\text{сеч}} = \frac{144}{25}$

№ 6

Дано:

$O_{\text{кр}}(O_1; 13)$

$O_{\text{кр}}(O_2; 13)$

$O_{\text{кр}}(O_1; 13) \cap O_{\text{кр}}(O_2; 13) = \{A, B\}$

$C \in O_{\text{кр}}(O_1; 13)$

$D \in O_{\text{кр}}(O_2; 13)$

$B \in CD$

$\angle CAD = 90^\circ$

$BF = BD$

$BF \perp CD$

$CF = ?$

$BC = 10$

$S_{\triangle CBF} = ?$

Решение:

а) Возьмем 2 окружности O_1 и O_2 — $O_1 \cap O_2 = \{A, B\}$

1) Возм. $AD \cap O_{\text{кр}}(O_1; 13) = T$

2) $\angle CAT = 90^\circ \Rightarrow CT$ — диаметр

$\angle CBT = 90^\circ$

3) Возм. $\angle BCT = \alpha$

$\angle TAB = \alpha$ (отн. к CT)

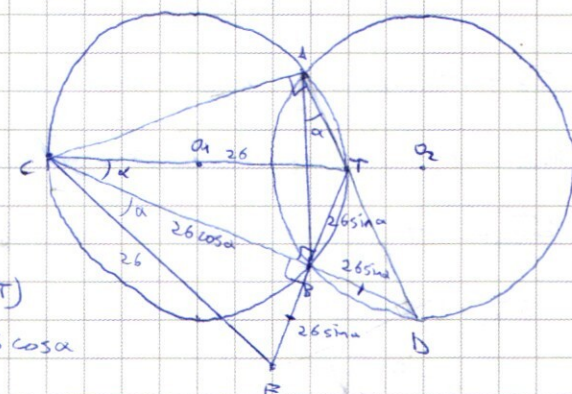
4) $\triangle CBT$ $CB = CT \cos \alpha = 26 \cos \alpha$

5) По теореме синусов $\triangle ABD$

$$2 \cdot 13 = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow BD = 26 \sin \alpha \Rightarrow BF = 26 \sin \alpha$$

6) $\triangle CBF$ — прямоугольн. По теореме Пифагора: $CF^2 = BC^2 + BF^2 = 26^2 \cos^2 \alpha + 26^2 \sin^2 \alpha = 26^2$

$$\Rightarrow CF = 26$$

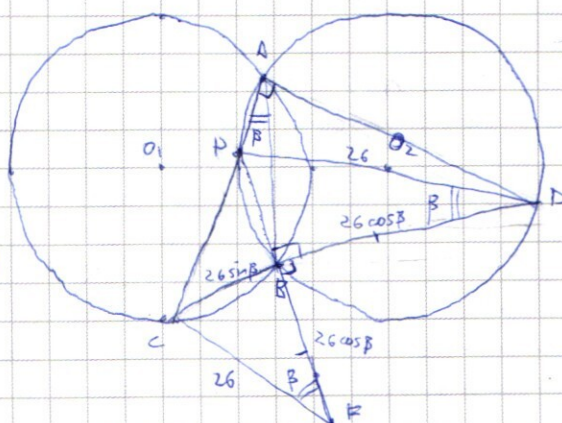


2 окружн. — $AD \cap O_{\text{кр}}(O_1; 13) = \emptyset$

1) В точке A окружн. $AC \cap O_{\text{кр}}(O_2; 13)$
(можно просто провести диаметр BO_2 , тогда угол, отн. к диаметру будет $\leq 90^\circ$)
 $AC \cap O_{\text{кр}}(O_2; 13) = P$

2) $\angle PAD = 90^\circ \Rightarrow PD$ — диаметр $\Rightarrow \angle PBD = 90^\circ$
(отн. к диаметру)

3) Возм. $\angle BDP = \beta \Rightarrow \angle PAB = \beta$ (отн. к PD)
В прямоугольн. $\triangle PBD$ $BD = 26 \cos \beta$



$\triangle K'SA \sim \triangle K'SA$, но $\angle K'SA$ — общий. Т.к. $SK' \perp (ABC)$ и $SK' \perp (A_1B_1C_1)$, то $SK' \perp AK'$ и $SK' \perp A_1K'_1$. Тогда углы $\angle SK'A$ и $\angle SK'_1A_1$ равны, но если $\angle SAK = \angle SA_1K'_1 = \frac{\pi}{2} - \angle SAK'$, значит соотв. углы в $\triangle K'SA$ и $\triangle K'_1SA_1$ равны)

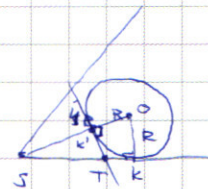
$$\frac{SK'_1}{SK'} = k = \frac{SA_1}{SA}$$

Заметим, что (ABC) касается сфер ω и $(A_1B_1C_1)$ касается сфер, но $OK' = R$, $OK'_1 = R$, $O \in KK'_1$ т.е. R — радиус сфер
 $SK'_1 = SK' + 2R$

$$\frac{SK' + 2R}{SK'} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{2R}{SK'} = \frac{1}{2} \Rightarrow SK' = 4R \Rightarrow SO = SR$$

2) Теперь рассмотрим ситуацию в (SOK)
 $OK \perp$ плоскости 3-хгранного угла, в которой лежит т.к. $\Rightarrow OK \perp SK$
 $OK = R$



$$\sin \angle KSO = \frac{R}{SR} = \frac{1}{5}$$

т.к. $\angle KSO$ острый, то $\angle KSO = \arcsin(\frac{1}{5})$

3) По Тн Пифагора $SK = \sqrt{SR^2 - R^2} = \sqrt{4R^2} = 2R\sqrt{6}$

т.к. SK, SL и SM — касательные к сфере из т. S , то они все равны $2R\sqrt{6}$

4) Обозн. $T = (ABC) \cap SK$ $SK' = 4R$ ~~Обозн. $K'T = x$~~

т.к. $(ABC) \perp SO$, то $K'T \perp SO \Rightarrow K'T$ — кас. к $\text{окр}(O; OK)$

$$\text{Обозн. } K'T = x \text{ (равно как отпр. кас.)} \Rightarrow ST = 2\sqrt{6}R - x$$

По Тн Пифагора в $\triangle SK'T$

$$x^2 + 16R^2 = (2\sqrt{6}R - x)^2 = 24R^2 - 4\sqrt{6}Rx + x^2$$

$$\uparrow$$

$$4\sqrt{6}Rx = 8R^2 \Rightarrow x = \frac{2R}{\sqrt{6}} = \frac{2R\sqrt{6}}{6} = \frac{R}{3}\sqrt{6}$$

$$ST = 2R\sqrt{6} - \frac{R}{3}\sqrt{6} = \frac{5R}{3}\sqrt{6}$$

$\Sigma_{\text{ли}}(ABC) \cap SL = P$

$(ABC) \cap SM = F$, но аналогично $SP = SF = ST = \frac{5R}{3}\sqrt{6}$

$$\frac{SK}{ST} = \frac{SL}{SP} = \frac{SM}{SF} = \frac{2R\sqrt{6}}{\frac{5R}{3}\sqrt{6}} = \frac{6}{5}$$

Значит точки K, L и M лежат на одной прямой в ходе применения замещения отн. т. S коэффициент $\frac{6}{5}$. При этом при замещении плоскость переходит в плоскость. Значит сечение, проходящее

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) По Th cos $\angle CAB$ ~~сб~~ $\frac{CB}{\sin \beta} = 2 \cdot 13 \Rightarrow CB = 26 \sin \beta$

$\triangle CBF$ — прямоугольн. по Th Пифагора в $\triangle CBF$:

$$CF^2 = 26^2 \cos^2 \beta + 26^2 \sin^2 \beta \Rightarrow CF = 26$$

Итак, в обоих случаях $CF = 26$

8) $\sum BC = 10$

1 случай — $AB \perp OK(O_1; B)$

$$26 \cos \alpha = 10 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{12}{13} \Rightarrow BF = BD = 24$$

$$BT = 26 \sin \alpha = 24$$

Заметим, что $BF = 26 \sin \alpha = CF \sin \angle BCF = 26 \sin \angle BCF$

$$\sin \alpha = \angle BCF$$

Th — угол смежные, то $\alpha = \angle BCF$

$$TB = 26 \sin \alpha = 24$$

$\triangle FBD$ — прямоугольн. по Th Пифагора

$$BF = 24\sqrt{2}$$

Аналогично $TD = 24\sqrt{2}$

$\triangle TBD$ — равноб. и прямоугольн.

$$\angle TBD = 45^\circ \Rightarrow \angle ATB = 135^\circ$$

$$\angle ACT + \alpha + \angle ATB = 180^\circ \text{ (т.к. } ACBT \text{ — впис. в } \odot_{K(O_1; F)})$$

$$\angle ACT = 45^\circ - \alpha$$

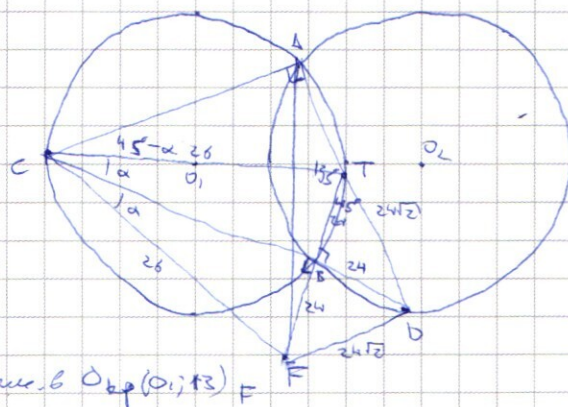
$$AC = 26 \cos(45^\circ - \alpha)$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \overbrace{CF}^{26} \cdot \overbrace{AC}^{26 \cos(45^\circ - \alpha)} \cdot \overbrace{\sin \angle ACF}^{\sin(45^\circ + \alpha)} = 13 \cdot 26 \cdot \cos(45^\circ - \alpha) \sin(45^\circ + \alpha) =$$

$$= 13 \cdot 26 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{13} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{12}{13} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{13} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{12}{13} \right) = 13 \cdot 13 \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) =$$

$$= 13 \cdot 13 \cdot \frac{17^2}{13^2} = 289$$

$$S_{ACF} = 289$$



2 игрой - AD $\cap O_{KP}(O_r; 13) = \emptyset$

$$1) \quad 26 \sin \beta = 10$$

9

$$ST \wedge B = \frac{5}{13}$$

$$\Rightarrow \cos \beta = \frac{12}{13}$$

↓

$$BD = 24 = BF$$

$$BD = 26 \sin B = 10$$

2) ΔCBD - равност. и прямоуг.

↓

$$\angle DCB = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 135^\circ$$

To the singes $\triangle ACB$:

$$\frac{AC}{\sin(435^\circ - B)} = \frac{10}{\sin B} = 26$$

$$AC = 26 \sin(135^\circ - B) = 26 \sin(180^\circ - 135^\circ + B) = 26 \sin(45^\circ + B)$$

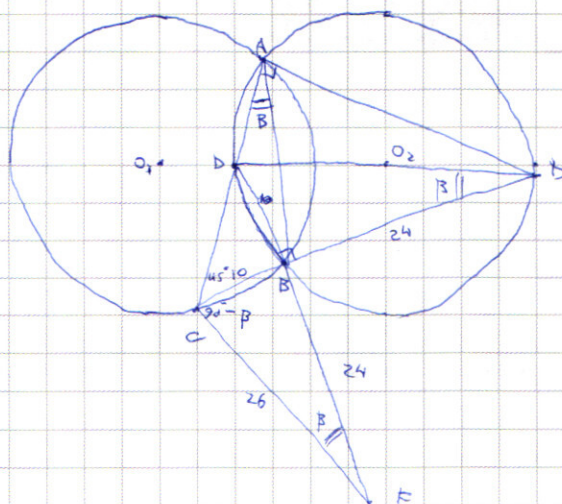
$$\int_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{FC}{26} \cdot \frac{AC}{26} \cdot \sin(45^\circ + \beta) - \sin(45^\circ + 90^\circ - \beta) = 13.26 \sin^2(45^\circ + \beta) =$$

$$= 13 \cdot 26 \left(\frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \frac{12}{13} + \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \frac{5}{13} \right)^2 = 13 \cdot \cancel{26} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{13^2} \cdot 17^2 = 289$$

Quibus:

$$F = 26$$

$$S_{ACE} = 289$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

$$x-6-y \geq 0$$

$$y \leq x-6$$

$$x-6+y \geq 0$$

$$y \geq 6-x$$

$$\text{I} \quad 1 \geq 0 \quad 2 \geq 0$$

$$\text{II} \quad 1 \geq 0 \quad 2 \leq 0$$

$$\text{III} \quad 1 \leq 0 \quad 2 \geq 0$$

$$\text{IV} \quad 1 \leq 0 \quad 2 \leq 0$$

$$\text{I} \quad x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x-12=12$$

$$2x=24$$

$$x=12$$

$$\text{II} \quad x-6-y - x+6-y = 12$$

$$y = -6$$

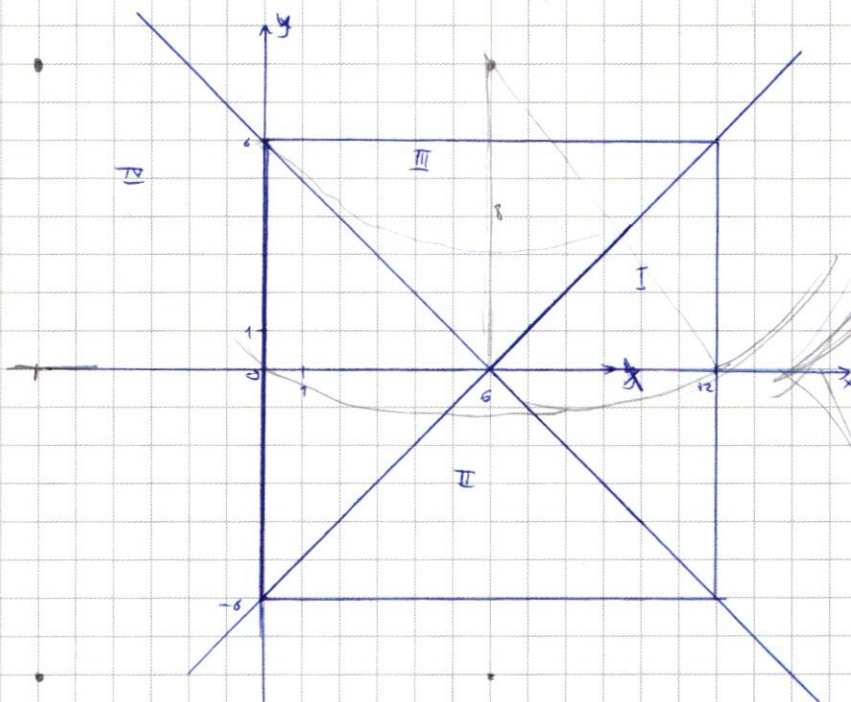
III

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$y = 6$$

$$\text{IV} \quad -x+6+y - x+6-y = 12$$

$$x \geq 0$$



$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

$$\begin{cases} a=4 \\ a=100 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 36 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$BD \cdot CD = DK \cdot AD$$

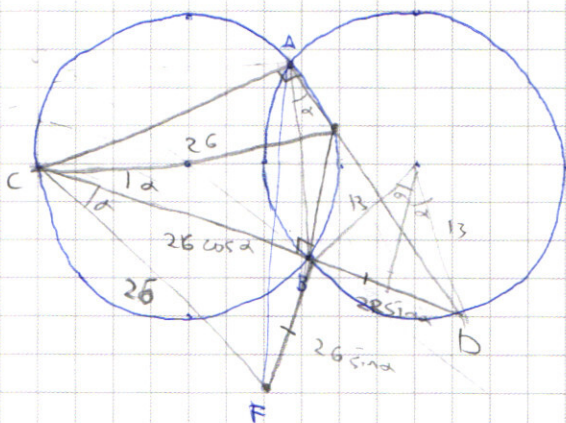
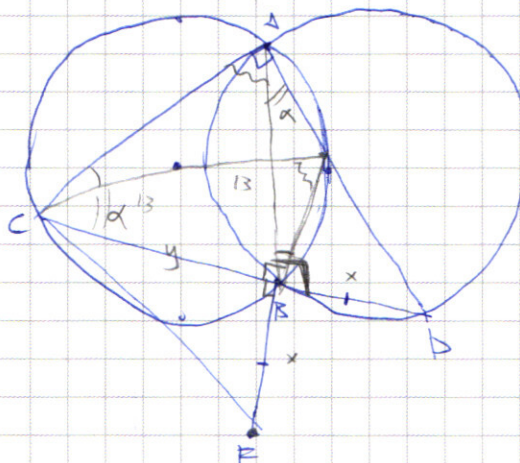
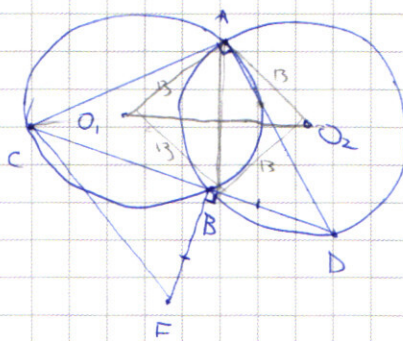
$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 287 \end{array}$$

$$y = 26 \cos \alpha$$

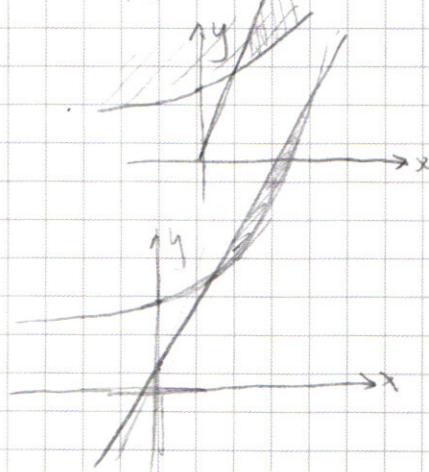
$$x = \frac{AB}{26} \sin \alpha$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 26$$

$$R = R_1 = R_2 = 13$$



$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

16	8	7	5	5
3	3	7	5	5
6	7	5		5
1	3	5		5
2	7			3
9				3
3				3
1				

5 5 5 5

3 3 3 1
9 3 1 1

$$C_8^4 \cdot \left(\frac{4+4 \cdot 3}{16 \cdot 2} \right) = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 16 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 16 = 16 \cdot 70 = 1120$$

$$\frac{16 \cdot 70}{1120}$$

$$\frac{16 \cdot 70}{1120} = 16 \cdot 70 = 1120$$

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 3x \cos 7x - \sin 3x \sin 7x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$$

$$2 - \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

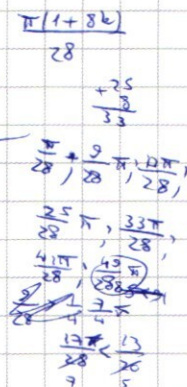
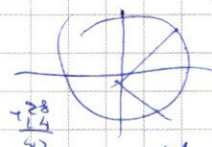
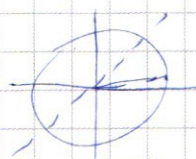
$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

$$\begin{cases} 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{12}\pi n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{8}{28}\pi k \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{8\pi n}{12} = \frac{\pi(1+8n)}{12}$$

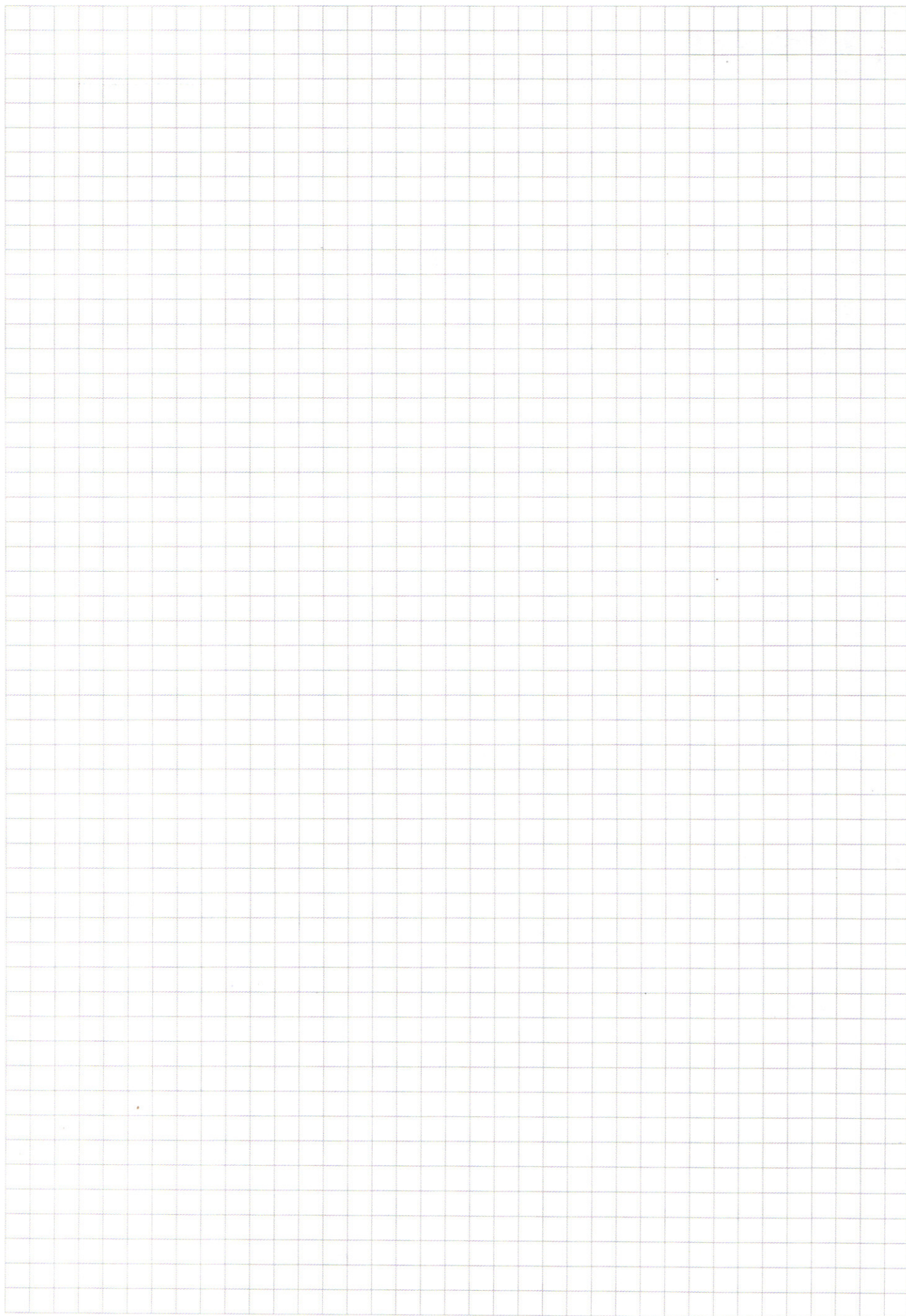


$$\frac{17}{20} \cdot \frac{29}{20} = \frac{491}{400}$$

$$\frac{\pi}{20} + \frac{4\pi n}{20} = \frac{\pi(1+4n)}{20}$$

$$\frac{\pi}{20} + \frac{4\pi n}{20} = \frac{\pi(1+4n)}{20}$$

$$\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{4}, \frac{9}{20}, \frac{13\pi}{20}, \frac{17\pi}{20}, \frac{21\pi}{20}, \frac{25\pi}{20}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

если $x=0$
 $\lg(-xy)$ — не определено

$\frac{x^4}{y^2} > 0$, не определено — 1

$$-x > 0$$

$y > 0 \quad -xy > 0 \quad xy < 0 \quad x < 0$
если определено, то $x=0$ или -1
$$\begin{cases} x^4 = y^2 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 1$$

 $\varphi = 1^\circ$ в пр.
 $2 + 1 - 1 + 4 - 8 = -2$ не в пр.

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\begin{aligned} (x^2 + xy + 4x + 8y - 2y^2) &= 0 \\ \left(\frac{x^2 + xy + 4x}{2} + \frac{8y - 2y^2}{2}\right) &= \left(\frac{x^2}{2} + 4x + 8 - 8\right) + y^2 \end{aligned}$$

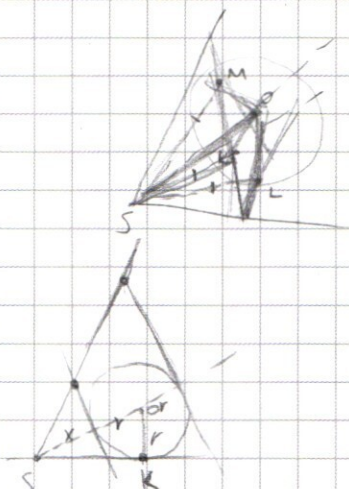
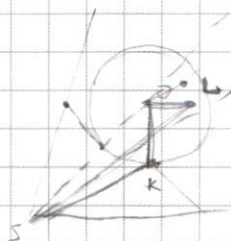
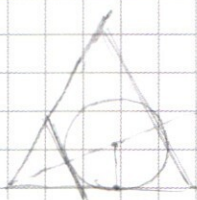
$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = \left(\frac{-x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg(y)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg(y)}$$

$$x' = -x$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = x'^{\lg x'} \cdot x'^{\lg y}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

~~2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0~~



$$\frac{9}{4} = \left(\frac{2r+x}{x}\right)^2$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2r+x}{x} = \frac{2r}{x} + 1$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2r}{x}$$

$$x = 4r$$

$$\sin \angle KSO = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

А-ОМНОЖИТЬ ГЛАГОЛ
Т-ОДНОУСЛОВИЕ?

