

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. ~~[3 балла]~~ Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. ~~[5 баллов]~~ Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. ~~[5 баллов]~~ Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. ~~[5 баллов]~~ Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. ~~[5 баллов]~~ Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. ~~[6 баллов]~~ а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. ~~[6 баллов]~~ Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разложим 16875 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Каждая из цифр будет
равна либо 1, либо одному из
простых множителей 16875, либо
произведению нескольких
из них, но т.к. цифры $\in \{0; 1; 2; \dots; 9\}$

то возможны лишь 2 варианта:

I вариант: 5; 5; 5; 5; 3; 3; 3; 1; т.к. 0 не,
то все цифры могут стоять на
всех местах, тогда всего вариантов
их размещения:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!};$$

II вариант: 5; 5; 5; 5; 9; 3; 1; 1. Аналогично;

I вар-ту, кол-во: $\frac{8!}{4! \cdot 2!};$

Всего кол-во вариантов:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{3 \cdot 8!}{4! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 8!}{4! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 20.56 = 1020 \text{ вольтов}$$

Ответ: 1120.

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cdot (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n$$

$$(2): x \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right)$$

$$\cos 2x = \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Т.к. $\cos x$ — четная, период 2π ,
 $\Leftrightarrow$) ф-ва.

$$\begin{cases} 2x + 2\pi k = 5x - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ 2x + 2\pi m = \frac{\pi}{4} - 5x, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} m \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вернемся к системе совокупности:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} m \end{cases}, n, m, k \in \mathbb{Z}$$

и проверка на совпадение
этих корней:

$$\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n, n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} k, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} m, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)'_{yy} = (-x)'_{yy} (-xy) & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Из (1) запишем условие: $\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$$(2): 2y^2 - 2xy - 8y - (x^2 + 4x - xy) = 0$$

$$2y(y - x - 4) - x(x + 4 - y) = 0$$

$$(2y + x)(y - x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y - x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y & (4) \\ x = y - 4 & (5) \end{cases}$$

$$(1): \left(\frac{(-x)^2}{y}\right)^2 \lg y = (-x) \lg((-x)y), \text{ по ОДЗ:}$$

$$\left(\frac{(-x)^2}{y}\right)^2 \lg y = (-x) \lg(-x) + \lg y \quad \left[\begin{array}{l} \lg(-x) = 4; \\ \lg y = 8; \end{array} \right.$$

Т.е. $-x = 10^4$
 $y = 10^8$, тогда: $\left(\frac{(10^4)^2}{10^8}\right)^2 \lg 10^8 = 10^{u(u+v)}$

$$10^{(2u-v)2v} = 10^{u(u+v)}$$

$$10^{4uv-2v^2} - 10^{u^2+uv} = 0 \quad ; \text{ упростим:}$$

$$(10-1)(4uv-2v^2-u^2-uv)=0$$

$$2v^2-3uv+u^2=0$$

$$(u-2v)(u-v)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} u=2v \\ u=v \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg(-x) = 2 \lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg y^2 - \lg(-x) = 0 \\ \lg y - \lg(-x) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (10-1)(y^2+x)=0 \\ (10-1)(y+x)=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2+x=0 \\ y+x=0 \end{array} \right. ; \text{ из (4): } x = -2y,$$

вернёмся к началу:

$$\left[\begin{array}{l} y^2+x=0 \\ y+x=0 \\ x=-2y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2y \\ y^2-2y=0 \\ y-2y=0 \\ x=y-4 \\ y^2+y-4=0 \\ y+y-4=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = -2y \\ y = 0 \text{ - не подст. по условию (3)} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ - не подст. по ум. (3)} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

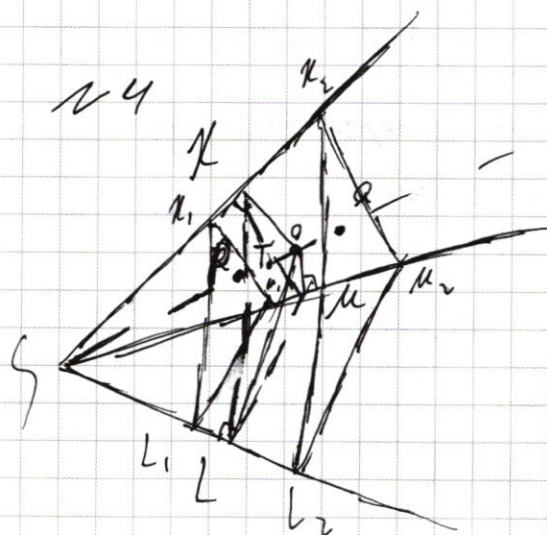
$$(z) \begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \\ x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \\ x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$(6): y^2 - y - 4 = 0 \\ D = 1 + 16 = 17 \\ y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Проверим $x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$;
по условию (3): $x < 0$;
 $\frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$

$$\sqrt{17} < 9 \\ 17 < 81 \Rightarrow \frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$$

Ответ: $(-2; 2); (-4; 2); (\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2})$.



Qua T-и пересеч.
сферы и SO.

Риски [R-радиус сферы.
 $\triangle SKO, \triangle SMO$ и $\triangle SLO$.

$$\begin{cases} OK = OM = OL = R \\ OS - \text{общ.} \\ \angle OKS = \angle OMS = \angle OLS = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \text{о-и равны по катету и гипотенузе}$$

Тогда: $\begin{cases} SK = SL = SM \\ \angle KSO = \angle MSO = \angle LSO \end{cases}$

$\angle$ и $\angle_2$ - м-ти касающиеся от той же окружности

в T и Q соотв. (данные по условию задачи)

Т.к. OP и OQ - радиусы окружности, а м-ти касательные, то $\angle_1 \perp OP$, т.е.

$$\angle_2 \perp OQ$$

$\angle_1$ и $\angle_2$ совпадают с данными условиями задачи.

$$\begin{cases} \angle_1 \cap SK \equiv K_1; & \angle_2 \cap SK \equiv K_2 \\ \angle_1 \cap SM \equiv M_1; & \angle_2 \cap SM \equiv M_2 \\ \angle_1 \cap SL \equiv L_1; & \angle_2 \cap SL \equiv L_2 \end{cases}$$

Покажем, что опр. прямые $\perp$ м-ти: все прямые с м-ти также будут $\perp$ этой прямой, т.е.:

$$\begin{cases} QK_2 \perp SO \\ QM_2 \perp SO \\ QL_2 \perp SO \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} PK_1 \perp SO \\ PM_1 \perp SO \\ PL_1 \perp SO \end{cases}$$

Далее $\triangle SK_1P$, $\triangle SM_1P$ и $\triangle SL_1P$:

$$\begin{cases} SP - \text{общ} \\ \angle KSO = \angle MSO = \angle LSO \end{cases} \text{ тогда } \triangle SK_1P = \triangle SM_1P = \triangle SL_1P$$

Тогда: $SK_1 = SM_1 = SL_1$

Аналогично для $\triangle$ -ов: $\triangle SK_2Q$, $\triangle SM_2Q$ и $\triangle SL_2Q$: $SK_2 = SM_2 = SL_2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Даны ΔSK_1L_1 ; ΔSK_2L_2 и ΔSK_3L_3 ;

по подоб. Γ найти в (SK_1L_1) : K_1L_1 , $(K_1L_1)K_2L_2$,

аналогично: $\{ K_1M_1, (K_1M_1)K_2M_2 \in (SK_1M_1)$, тогда
 $\{ M_1L_1, (M_1L_1)M_2L_2 \in (SK_1M_1)$

$L_1, (L_1L_2)K_2L_2$, по L_1, L_2SO , тогда $(K_1L_1)SO$,

~~$IT = (K_1M_1)SO$, тогда: TK_1SO~~

также из параллельности при подобии Δ -ов: $\Delta SK_1L_1 \sim \Delta SK_2L_2$, с коэффициентом подобия k_1 ; $\Delta SK_1M_1 \sim \Delta SK_2M_2$; с коэффициентом подобия k_2 ; и $\Delta SK_1L_1 \sim \Delta SK_2L_2$; с коэффициентом подобия k_3 ; но т.к. все стороны Δ -ов равны (с ребрами эвклидова угла), то $k_1 = k_2 = k_3$; тогда: $\Delta K_1M_1L_1 \sim \Delta K_2M_2L_2$ по 3-ем пропорциональным сторонам, с коэффициентом k_1 ;

Тогда: $\frac{SK_1M_1L_1}{SK_2M_2L_2} = k_1^2$, где $k_1 = \frac{SK_1}{SK_2}$,

а из Δ -ов: ΔSK_1P и ΔSK_2Q : $\frac{SK_1}{SK_2} = \frac{SP}{SQ}$,

т.е. $\left(\frac{SP}{SQ}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{SP}{SQ} = \frac{1}{3} \Rightarrow SP = \frac{1}{3} SQ$;

По $OP = OQ = R$, т.е. $PQ = 2R$, тогда:

$$\begin{cases} SQ = 6R; \\ SP = 4R; \end{cases}$$

тогда: уг. при ΔSKO

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SQ} = \frac{R}{4R+R} = \frac{1}{5}; \text{ тогда}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right);$$

тогда ΔSKO :

По Т. Пиф.: $SK^2 = SQ^2 - OK^2 = 24R^2$

$\Delta SKP \sim \Delta SKT$ по углам

уг. и 2-ми уг.;

тогда:

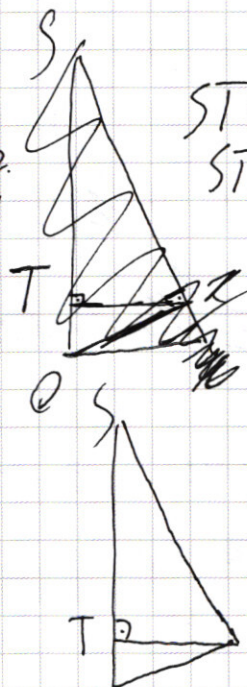
$$k = \frac{SP}{SK} = \frac{4R \cdot 5}{624R} = \frac{5}{6};$$

тогда аналогично считаем ΔKOL и ΔKTL ,
для сч. S_{KML} и S_{KLL} ;

$$\frac{S_{KML}}{S_{KLL}} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \Rightarrow S_{KML} = \frac{36}{25} \cdot 4 = 5,76$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$

$$S_{KML} = 5,76.$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1)$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 4 \quad (2)$$

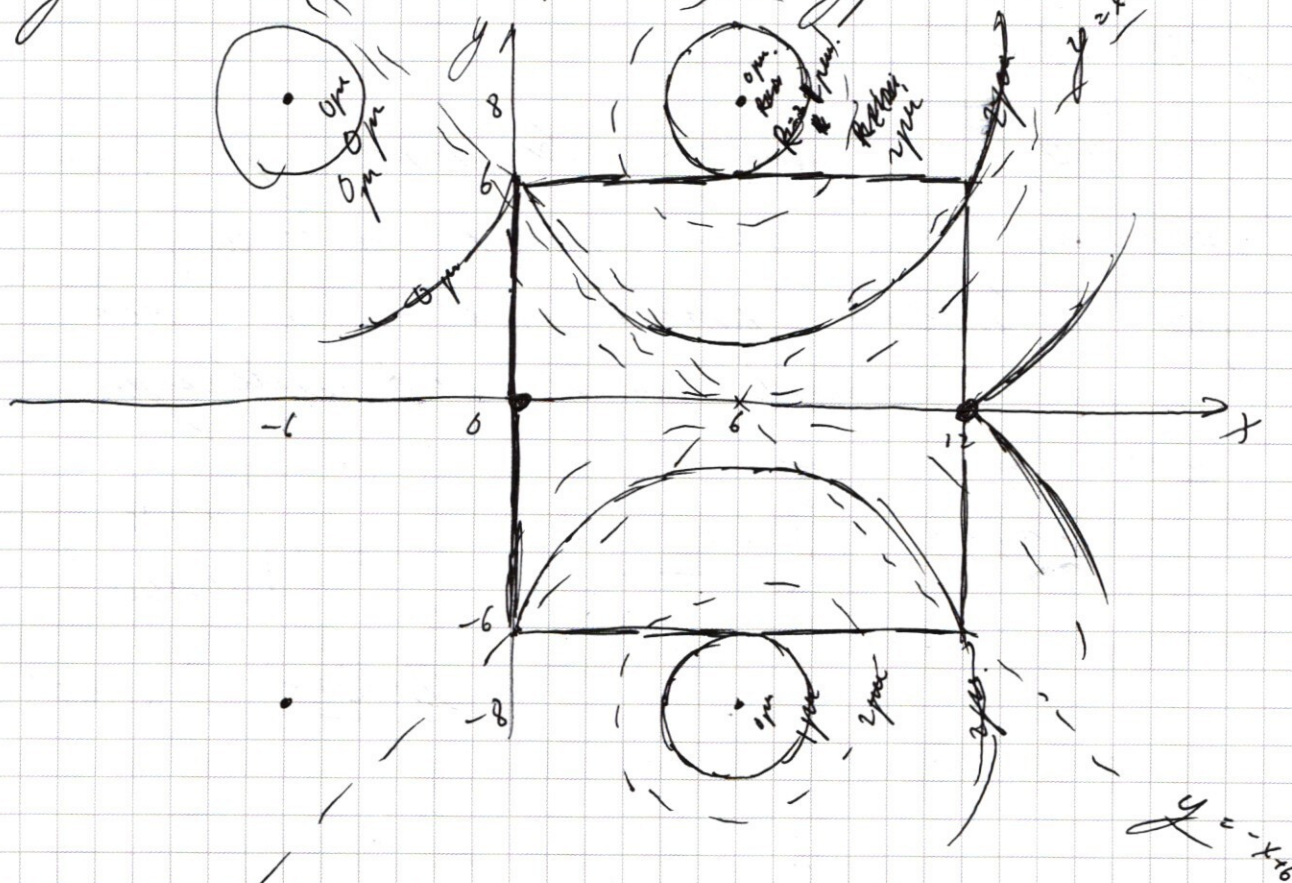
(1): Нули модулей: $x-6-y=0$ и $x-6+y=0$
 $y=x-6$ и $y=-x+6$

Нули модулей: $x-6+y=0$; $y=-x+6$
Внешние точки выше обеих прямых:

$y \geq 6$; ниже: $y \leq -6$; выше $y = -x+6$ и

ниже $y = x-6$: $x \geq 12$; выше $y = x-6$ и ниже:

$y = -x+6$: $x \leq 0$, т.е. квадрат.



$$(2): \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} : (x-6)^2 + (y-8)^2 = a - \text{центр ок-ва. в } (6; 8) \\ \text{и } R = \sqrt{a}; \text{ , лежащий в I четверти:}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} (x-6)^2 + (y+8)^2 = a - \text{центр ок-ва в } (6; -8), \\ \text{и } R = \sqrt{a}, \text{ , лежащий в IV четверти.}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (x+6)^2 + (y-8)^2 = a - \text{центр ок-ва в } (-6; 8), \\ R = \sqrt{a}, \text{ , лежащий в II четверти:}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} (x+6)^2 + (y+8)^2 = a - \text{центр ок-ва в } (-6; -8) \\ \text{и } R = \sqrt{a}, \text{ , лежащий в III четверти.}$$

так ок-та в II и III четверти не могут иметь общую Т-ю. Квадраты радиусов (или все можно раскрывать не нужно, но эти Т-и будут совпадать в силу симметрии Т-пересек-ти и ок-ов из I и IV четверти).

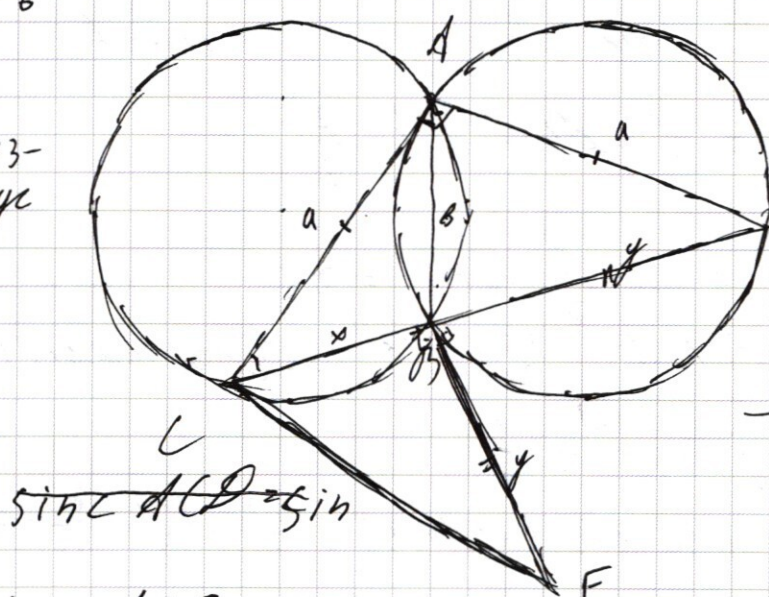
Тогда в решении достаточно при 1-ом касании (или упрощ. ок-та из Т-и), и при совпадении корней, т.е. при прох. т.з Т-и лежащей на ОХ или симметричной для этих ок-ов.

$$\text{Тогда: } \begin{cases} R = 2 \\ R = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ a = 100 \end{cases}$$

Ответ: $\{4; 100\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6
a)
] R=13-
радиус
ок-цы



Плободу. Т. Умел.
для $\triangle ACB$:

$$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R, \text{ а}$$

для $\triangle ADB$:

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = 2R, \text{ тогда}$$

$$\sin \angle ACB = \sin \angle ADB$$

$\sin \angle ACB = \sin \angle ADB$, но они вписаны, и т. ч. $\angle C$ и $\angle D$ лежат на одной дуге ок-цы (или $\angle C$ и $\angle D$ — вписанные углы, то B будет принадлежать (CD) , но $\notin [CD]$). , то $\angle ACB$ и $\angle ADB$ — смежные, тогда: $\angle ACB = \angle ADB$, но т.к. $\triangle ACD$ — равнобедренный, то $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$; Тогда $\triangle ACD$ — равнобедренный по признаку, тогда по отрезкам: $AC = AD = a$

$AB = b$; тогда по т. Пифагора для $\triangle ADB$.

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 - b^2 = 0$$

$$b^2 = a^2 + y^2 - 2ay \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad y^2 - \sqrt{2}ay + a^2 - b^2 = 0$$

тогда xy — корни уравнения $x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 - b^2 = 0$

По т. Пифагора-гу $\triangle CBF$: $CF = \sqrt{x^2 + y^2} =$
 $= \sqrt{(x+y)^2 - 2xy}$, по т. Вьет: $x+y = \sqrt{2}a$; $xy = a^2 - b^2$
 т.е.: $CF = \sqrt{2a^2 - 2a^2 + 2b^2} = b\sqrt{2}$.

Уз $\triangle ACB$ по ободу. Т. имеет:
 $\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R \Rightarrow b = AB = 2b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$CF = b\sqrt{2} = 2b \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 2b$

Уз $\triangle BCF$: $\cos \angle BCF = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$; тогда т.е. $\triangle BCF$ -остр;
 то: $\sin \angle BCF = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$;

$\sin \angle ACF = \sin(\angle BCF + \angle ACB) = \frac{12}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$
 $= \frac{17\sqrt{2}}{26}$; Тогда:

Уз $\triangle BCF$ по т. Пифагора: $y = \sqrt{13^2 - 10^2} =$
 $= \sqrt{69}$, тогда: $CD = 10 + \sqrt{69}$; А из р/б катетов
 $\triangle ACD$: $AC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{10 + \sqrt{69}}{\sqrt{2}}$.

$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot \frac{(10 + \sqrt{69})}{\sqrt{2}} \cdot 2b \cdot \frac{17\sqrt{2}}{26}$
 $= \frac{17(10 + \sqrt{69})}{2}$

Ответ: $CF = 26$;
 $S_{ACF} = \frac{17(10 + \sqrt{69})}{2}$.

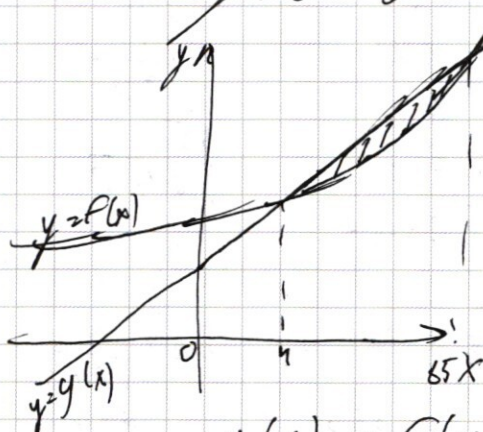
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$\left[\begin{aligned} 3^x + 4 \cdot 3^{81} &= f(x) \text{ и } 85 + (3^{81} - 1)x = g(x). \end{aligned} \right.$

$\begin{cases} y \geq f(x) \\ y < g(x) \end{cases}$

Кинематически изобразим
гр-ки ф-ии и удобней
нечто-бы изобразить.



$g(x)$ - прямая
 $f(x)$ - экспоненциальная ф-ия,
тогда они могут иметь
не более 2-ух точек
пересечения. Показ. эти
т-и:

$g(x) = f(x),$
при $x=4$:

$$3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 4 \cdot 3^{81} = 4$$

$81 = 81 \quad (6)$

при $x=85$:

$$3^4 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)(3^4 + 4)$$

$$(3^4 + 4)3^{81} = 85 - 85 + (3^4 + 1)3^{81} \quad (6)$$

Т.к. гр-ки пересекаются в 2-х при
 $x=4$ и $x=85$.

Заметим, что если $x \in \mathbb{R}$, то и
 $f(x)$ и $g(x)$, а соотв. $y \in \mathbb{R}$, тогда для
каждого $x_0 \in \mathbb{R}$ будет $g(x_0) - f(x_0)$ подмн-
щих пар. (т.к. одно число целое, а 2-ое -
нет)

Получим сумму: $\sum_{x_0=4}^{85} (g(x_0) - f(x_0)) =$

$$= 85 \cdot 82 + (3^{81} - 1) \cdot \underbrace{(4 + 5 + 6 + \dots + 85)}_{\text{сумма прогрессии}} - \underbrace{(3^4 + 3^5 + \dots + 3^{85})}_{\text{геом. прогрессия}} -$$

$$- 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 = 85 \cdot 82 + 3^{81} \cdot \frac{89 \cdot 82}{2} - \frac{89 \cdot 82}{2} -$$

$$- 3^4 \cdot \frac{3^{82} - 1}{3 - 1} - 4 \cdot 3^{81} \cdot 82 = 3^{81} \left(\frac{89 \cdot 82}{2} - \frac{3^5}{2} - 4 \cdot 82 \right) +$$

$$- \frac{89 \cdot 82}{2} + 85 \cdot 82 + \frac{3^4}{2} \Bigg\} = 3^{81} (3649 - 121,5 - 328) +$$

$$+ 6970 - 3649 + 40,5 =$$

$$= 3^{81} \cdot 3190,5 + 3361,5$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 82 \\ \hline 170 \\ 680 \\ \hline 6970 \\ - 3649 \\ \hline 3321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 328 \\ + 121,5 \\ \hline 449,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 89 \\ \times 41 \\ \hline 89 \\ 356 \\ \hline 3649 \\ \hline 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \overline{) 121,5} \\ \underline{243} \\ 121,5 \\ \hline 3199,5 \end{array}$$

Ответ: $3^{81} \cdot 3190,5 + 3361,5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \cos^2 5x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \sin^2 5x$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) = \sin 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x)$$

$$2(\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x) = \sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$2 \cdot \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) \cdot (\cos 5x + \sin 5x);$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) & (2) \end{cases}$$

$$(2) \quad \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n \\ 2x = 5\pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases} \quad \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \end{cases}$$

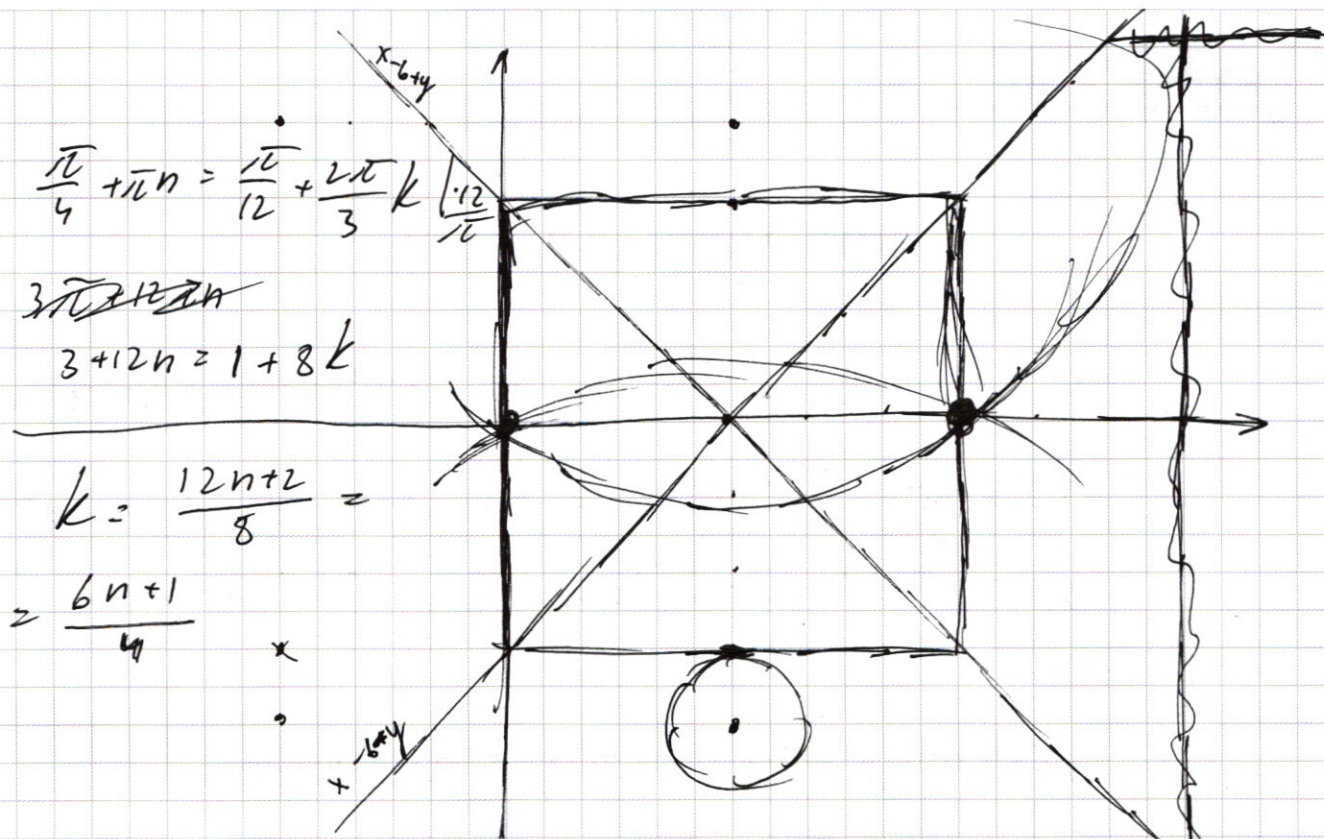
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n \end{cases}$$

$$(1) \quad \sqrt{2} \cdot \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n$$



$$a' = 22 \quad \sqrt{a'} = 2$$

$$\sqrt{a'} = 10$$

$$\boxed{a = 4}$$

$$\boxed{a = 100}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos L + \cos \beta$$

$$\left(\frac{L+\beta}{2} \right) \quad \left(\frac{L-\beta}{2} \right)$$



$$L = \frac{L+\beta}{2} + \frac{L-\beta}{2};$$

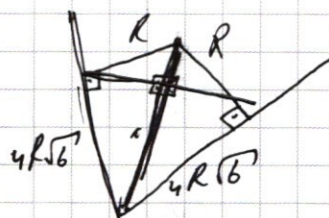
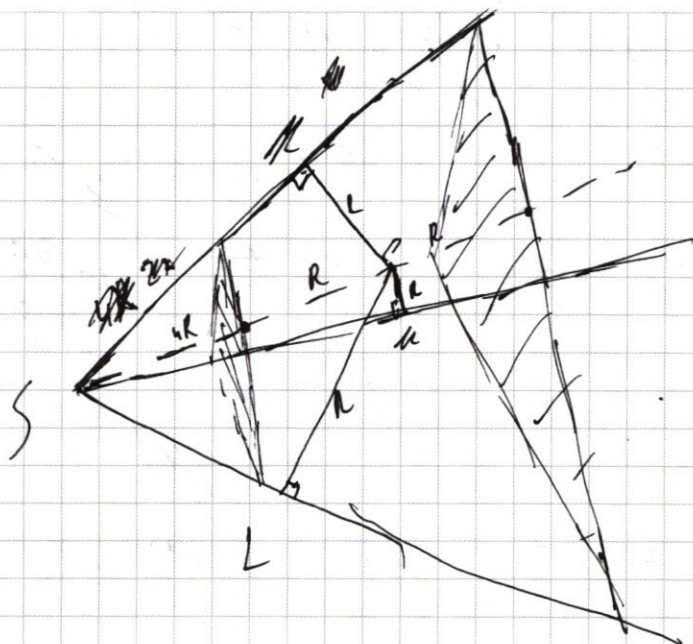
$$\beta = \frac{L+\beta}{2} - \frac{L-\beta}{2};$$

$$= 2 \cos \frac{L+\beta}{2} \cdot \cos \frac{L-\beta}{2}$$

$$\sin L + \sin \beta$$

$$\sin L + \sin \beta = 2 \sin \frac{L+\beta}{2} \cdot \cos \frac{L-\beta}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin \angle KSO = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5};$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\sqrt{25R^2 - R^2} = 4R\sqrt{6}$$

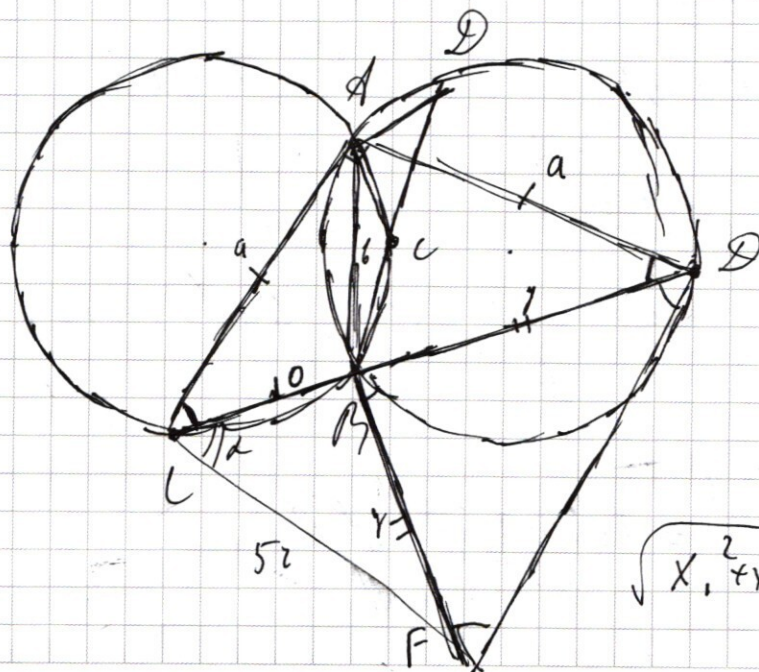
$$x \cdot 5R = 24R^2$$

$$x = \frac{24R}{5};$$

$$\frac{S}{4} = \left(\frac{24R}{5} \right)^2$$

$$= \frac{36}{25};$$

$$S = \frac{36 \cdot 4}{25} = \frac{36 \cdot 16}{100} = 5,76$$



$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 - \sqrt{2}ax + a^2 - b^2 = 0$$

$$D = 2a^2 - 4a^2 + 4b^2 = 4b^2 - 2a^2$$

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2}a \pm \sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}$$

$$(10y^2)^{\lg y^2}$$

$$(4y)^{\lg y^2} = 2y^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$2^{\lg y^2} \cdot (2y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg y^2} \cdot (2y)^{\lg y^2} \cdot \lg 2$$

$$2^{\lg y^2} = (2y)^{\lg y^2}$$

$$2^{\lg y^2} = 2^{\lg 2 \cdot y^{\lg 2}}$$

$$y^{\lg 2} = 2^{\lg y^2 - \lg 2} = 2^{\lg \frac{y^2}{2}} = \frac{10^{\lg \frac{y^2}{2}}}{5^{\lg \frac{y^2}{2}}}$$

$$\frac{y^{\lg 2}}{2 \cdot 5^{\lg \frac{y^2}{2}}} = 2^{\lg y} = (2y)^{\lg y^2}$$

$$\lg y = t; y = 10^t; \lg 2 = a; 2 = 10^a;$$

$$10^{2at} = (2 \cdot 10^t)^{\lg 2} = 2^{\lg 2} \cdot 2^t \cdot 10^{t \lg 2}$$

$$2^t = 4$$

$$t = 2$$

$$10^t = 10$$

$$(2y)^{\lg y^2}$$

$$10^{2at} = 10^{(a+t)\lg 2}$$

$$2at = (a+t)\lg 2;$$

$$2at - ta = ta$$

$$2at - ta = ta^2; ta = a^2; t = a;$$

$$\lg y = \lg 2; y = 2; x = -4$$

$$x = y - 4; y > 0 \Rightarrow x < 0; y \in (0; 4)$$

$$\left(\frac{y^2 - 8y + 16}{y} \right)^{\lg y} = (4 - y)^{\lg (4 - y^2)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^4 \cdot \frac{3^{82}-1}{2} \rightarrow 3^{81} \cdot 4049 + 4049 + 3^{81} \cdot 4 \cdot 82 \rightarrow 85 \cdot 82 =$$

$$= \frac{3^4 \cdot 3^{81}}{2} - \frac{3^4}{2} - 3^{81} \cdot 4049 + 4049 + 3^{81} \cdot 4 \cdot 82 - 85 \cdot 82 =$$

$$= 3^{81} \left(\frac{3^4}{2} - 4049 + 4 \cdot 82 \right) - \frac{3^4}{2} + 4049 - 85 \cdot 82 =$$

$$= 3^{81} \cdot 40,5$$

$$\sqrt{3680,5 \cdot 3^{81} + 2961,5}$$

$$x - y = 6$$

$$2y(y^2 - 4) - x(x + 4) - xy = 0$$

$$2y(y - 4) - 2xy - x(x + 4) + xy = 0$$

$$2y(y - 4 - x) - x(x + 4 - y) = 0$$

$$(2y + x)(x + 4 - y) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$x = -2y \quad y > 0$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \cdot 4y = (-x)^2 y (-xy)$$

$$(4y)^2 \cdot 4y = 2y^2 \cdot 4y^2$$

$$\begin{array}{r} \times 82 \\ 4 \\ \hline 328 \\ + 40,5 \\ \hline 368,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4049 \\ - 368,5 \\ \hline 3680,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 185 \\ 82 \\ \hline + 170 \\ \hline 680 \\ + 6970 \\ \hline 7650 \\ - 4049 \\ \hline 2921 \\ + 40,5 \\ \hline 2961,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 16875 \mid 5 \\
 3375 \mid 5 \\
 675 \mid 5 \\
 135 \mid 5 \\
 27 \mid 3 \\
 9 \mid 3 \\
 3 \mid 3 \\
 1 \mid 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \\
 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1
 \end{array}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2}$$

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 35 \cdot 32 = 1120$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 3x \cdot \cos 7x - \sin 3x \cdot \sin 7x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 3x - \sqrt{2} \cos 3x \cdot \cos 7x + \cos 7x = \sin 3x - \sqrt{2} \sin 3x$$

$$\sin 7x + \sin 3x$$

$$u - \sqrt{2} uv + v = 0$$

$$\textcircled{D} = 2 - 4 \cos$$

$$3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 = \begin{array}{r} 3 \\ 89 \\ \times 41 \\ \hline 89 \\ + 89 \\ \hline 396 \\ 4049 \end{array}$$

$$\frac{1}{2} \cos 7x + \frac{1}{2} \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \frac{1}{2} (\sin 10x + \cos 4x)$$

$$\cos^2 3x + \cos^2 7x + 2 \cos 3x \cdot \cos 7x + 2 \cos 3x \cdot \cos 7x + \dots$$

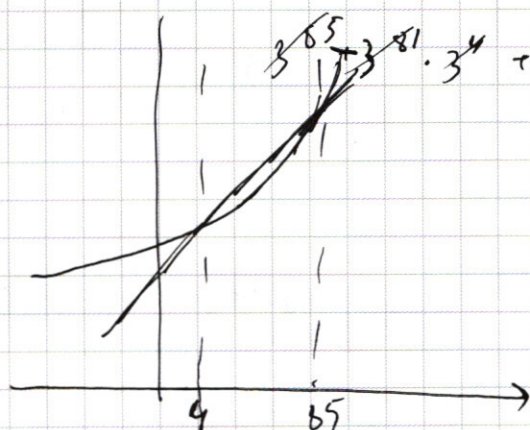
$$= 2\sqrt{2} \cos^2 3x \cdot \cos 7x - 2\sqrt{2} \cos 3x \cdot \cos^2 7x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} \cdot x - x$$

$$3^x + 3^{81} (4 - x) + x - 85 = 0$$

85:



$$3^{65} + 3^{81} \cdot 3^4 + 85 - 85 = 0$$

-5...

2

$$3^7 + 4 \cdot 85 = 0 \quad (6)$$

$$\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 85 \end{array}$$

$$\sum_{x=4}^{85} 3^x + 3^{81} (4 - x) + x - 85 = 0$$

$$3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^{85}$$

$$= 3^4 \cdot \frac{3^{82} - 1}{3 - 1}$$

$$\text{или } 4 + 5 + \dots + 85 = \frac{89 \cdot 82}{2} = 4049$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(y - 8 + \frac{16}{y}\right)^2 \lg y = (4-y) \lg(4y-y^2)$$

$$\lg y^2 = 2; y = 10^2; y^2 = 10^4;$$

$$\lg(4 \cdot 10^4 - 10^4) = \lg y^2 = 2; y = 10^2$$

$$\lg(4-y) = 5; 4-y = 10^5;$$

$$\left(\frac{10^{25}}{10^4}\right)^{24} = 10^{5 \cdot (4+5)}$$

$$10^{(25-4)24} = 10^{5(4+5)}$$

$$24 \cdot 25 - 24^2 = 4 \cdot 5 + 5^2$$

$$5^2 - 34 \cdot 5 + 24^2 = 0$$

$$D = 94^2 - 84^2 = 4^2$$

$$v_1 = \frac{34+4}{2} = 24$$

$$v_2 = \frac{34-4}{2} = 4$$

$$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$$

$$(v-24)(v-4) = 0$$

$$\begin{cases} v=4 \\ v=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lg y = \lg(4-y) \\ \lg y^2 = \lg(4-y) \end{cases}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17;$$

$$\begin{cases} y = 4-y \\ y^2 = 4-y \end{cases}$$

$$x = -2$$

$$y = 2$$

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \vee 4$$

$$y_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$$

$$\sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - 2(a^2 - b^2)} = \sqrt{2a^2 - 2a^2 + 2b^2} = b\sqrt{2}$$

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2 \cdot 13; \quad b = \cancel{26} \sqrt{2}; \quad b\sqrt{2} = \sqrt{52}$$

$$\begin{array}{r} 62 \overline{) 2} \\ 21 \overline{) 3} \\ 7 \overline{) 7} \\ \hline 9 \overline{) 9} \\ 9 \overline{) 9} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\sqrt{52^2 - 10^2} = \sqrt{42 \cdot 62} = 2 \sqrt{31 \cdot 21} = 2\sqrt{651}$$

$$\cos 2 = \frac{10}{52} = \frac{5}{26}$$

$$\sin 2 = \frac{\sqrt{26^2 - 5^2}}{26}$$

$$= \frac{\sqrt{651}}{26}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{26} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{651}}{26} = \frac{\sqrt{2}}{52} (5 - \sqrt{651})$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{26} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{651}}{26} = \frac{\sqrt{2}}{52} (\sqrt{651} + 5)$$

$$S_{ACF} = 26a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\right) = 46 \cdot \frac{2(\sqrt{651} + 5)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{52}$$

$$a = \frac{2\sqrt{651} + 10}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{651} + 5) = 651 + 25 - 10\sqrt{651} = 676 - 10\sqrt{651}$$

$$\begin{cases} x - 6 - y \geq 0 \\ x - 6 + y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x - 6 \\ y \geq -x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x - 12 &= 12 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + 6 + y + x - 6 + y &= 12 \\ x - 6 - y - x + 6 - y &= 12 \\ y &= 6 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + 6 + y - x + 6 - y &= 12 \\ x &= 0 \end{aligned}$$