

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$16\ 875 = 125 \cdot (8 \cdot 16 + 7) = 125 \cdot (128 + 7) = 125 \cdot 135 = \\ = 125 \cdot 5 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3 = 5^4 \cdot 9 \cdot 3$$

В восьмизначном числе должно быть:

а) 4 цифры 5, 3 цифры 3, одна цифра 1

Выбрать 4 цифры можно C_8^4 способами, далее
три цифры C_4^3 , одну - одним способом (оставшимся)

$$\text{Всего вариантов: } C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot 1 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1} \cdot 1 = \\ = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280.$$

б) 4 цифры 5, одна цифра 9, одна 3 и две 1:

$$\text{Вариантов: } C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = \\ = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 4 \cdot 3 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4 = 30 \cdot 28 = 840$$

$$\text{Итого вариантов: } 280 + 840 = 1120$$

Ответ: 1120

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cancel{(\cos 7x - \sin 7x)} + \cancel{(\cos 3x - \sin 3x)} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cancel{-\cos 7x - \sin 7x} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x, \quad \sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2\sqrt{2} \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 10x = \cos \left(\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$- \sin \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = -\cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin \left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin \left(\frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0 \end{cases} \begin{cases} 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi n + \frac{\pi}{4}}{7}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\frac{\pi}{4} - 2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \text{ (т.к. } n \text{ может быть отрицательным)} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{5} \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}; \frac{1}{7} \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg y + \lg(-x)} \quad \text{Рассмотрим второе уравнение.}$$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(y+4) + 2y(4-y) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{x} \quad D = (y+4)^2 + 4 \cdot 2y(y-4) = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-(y+4) + (3y-4)) \\ x = \frac{1}{2}(-(y+4) - (3y-4)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ x = -4y - 2y \end{cases}$$

1) если $x = -4y$, то первое ур-е:

$$\left(\frac{(-4y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4y)^{\lg 4y^2} \Rightarrow (4^4 y^2)^{\lg y} = (4y)^{2 \lg 2y}$$

$$(16y)^{2 \lg y} = (4y)^{2 \lg 2y}$$

$$(4y)^{2 \lg 2y} = ((4y)^{\lg 2 + \lg y})^2 = (4y)^{2 \lg 2} \cdot (4y)^{2 \lg y}$$

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$\lg 2y^2 = \lg 2 + \lg y^2 = \lg 2 + 2 \lg y$$

$$(4y)^{2 \lg y} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{2 \lg y}$$

$$(2y)^{2 \lg y} (2^{2 \lg y} - (2y)^{\lg 2}) = 0$$

$$(2y)^{2 \lg y} = 0 \text{ - нет реш.}$$

$$2^{2 \lg y} = (10^{\lg 2})^{2 \lg y} = (10^{\lg y})^{2 \lg 2} = y^{2 \lg 2}$$

$$y^{2 \lg 2} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2}$$

Пусть $y^{\lg 2} = t$, тогда $t^2 - 2^{\lg 2} t = 0$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = 2^{\lg 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^{\lg 2} = 0 \\ y^{\lg 2} = 2^{\lg 2} \Rightarrow y = 2, x = -4 \end{cases}$$

2) если $x = y - 4$, то: $\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg y(4-y)}$

$$\left(\frac{y-4}{y}\right)^{2\lg y} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\frac{(4-y)^{\lg(4-y)}}{(4-y)^{\lg(4-y)}} = \frac{(10^{\lg(4-y)})}{(10^{\lg(4-y)})}$$

$$(y-4)^{4\lg y} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\frac{(y-4)^{4\lg y}}{(y-4)^{4\lg y}} = \frac{(4-y)^{2\lg y}}{(4-y)^{2\lg y}} \cdot y^{2\lg y}$$

$$\frac{y^{2\lg y}}{y^{2\lg y}} = 2^{2\lg y}$$

$$\frac{(y-4)^{4\lg y}}{(y-4)^{4\lg y}} = \frac{(y(y-4))^{2\lg y}}{(y(y-4))^{2\lg y}}$$

б ОДЗ $4-y > 0$, тогда $(y-4)^{4\lg y} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{3\lg y}$

$$(4-y)^{\lg y} \left((4-y)^{3\lg y} - (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y} \right) = 0$$

$$\begin{cases} (4-y)^{\lg y} = 0 & \text{нечт. реш.} \\ (4-y)^{3\lg y} - (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y} = 0 \end{cases}$$

$$(4-y)^{3\lg y} = (10^{\lg(4-y)})^{3\lg y} = \frac{y^{3\lg(4-y)}}{y^{3\lg(4-y)}} = 10^{3\lg y \lg(4-y)}$$

$$(4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2\lg y} = 10^{\lg^2(4-y)} \cdot 10^{2\lg^2 y} = 10^{\lg^2(4-y) + 2\lg^2 y}$$

$$10^{3\lg y \lg(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y) + 2\lg^2 y}$$

$$3\lg y \lg(4-y) = \lg^2(4-y) + 2\lg^2 y$$

$$\lg^2(4-y) - \lg(4-y)\lg y + 2\lg^2 y - 2\lg(4-y)\lg y = 0$$

$$(\lg(4-y) - \lg y)(\lg(4-y) - 2\lg y) = 0$$

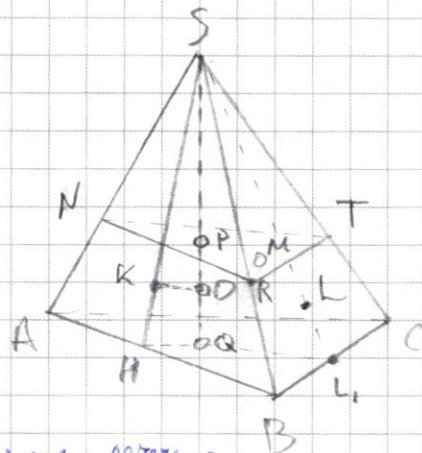
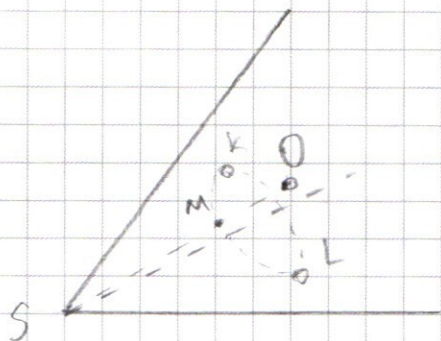
$$\begin{cases} \lg(4-y) = \lg y \\ \lg(4-y) = 2\lg y \end{cases} \quad \begin{cases} 4-y = y \\ 4-y = y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2 \\ y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \text{б ОДЗ } y > 0, \text{ тогда:}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad \begin{aligned} \text{еще } y = 2, \text{ то } x = -2 \\ \text{еще } y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ то } x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} - 4 = \frac{\sqrt{5} - 9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } (-4; 2); (-2; 2); \left(\frac{\sqrt{5}-9}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть (ABC) , ~~базис~~ (NRT) — м-ми сечение
угла, заданные в условии (см. рис.).

$SQ \perp (ABC)$, $SQ \perp (NRT) \Rightarrow (ABC) \parallel (NRT)$ и
 $PQ = 2R$ — расстояние между ними равно диа-
метру окружности сферы.

(NRT) — сечение тетраэдра $SABE$ и $(NRT) \parallel (ABC)$
 $\Rightarrow \triangle NRT \sim \triangle ABC$, $k = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ — коэф. подобия
 $k = \frac{SP}{SQ}$ (отношение высот в подобных тетраэдрах)

$$SQ = SP + 2R = \frac{SP}{k} = \frac{3SP}{2}$$

$$SP = 4R, SQ = 6R$$

$$\triangle SOK: \angle SKO = 90^\circ, SO = SP + R = 5R, OK = R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{5}, \angle KSO = \arcsin 0,2$$

$$\triangle SOK \sim \triangle SHQ \quad (\angle KSO - \text{общий в этих прям. триг.})$$

$$SK = R\sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}R = 2\sqrt{6}R, SH = \frac{1}{5} \cdot 6R = \frac{6}{5}R$$

Заметим, что сфера центральным проектированием относ.
точки S на (ABC) переходит в окружность, вписанную в $\triangle ABC$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 8y - (x^2 + 4x) - xy = 0$$

$$2(y^2 - 4y) - (x^2 + 4x) - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - xy - 4 = 0$$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(y+4) + y(8-2y) = 0$$

$$\Delta = (y+4)^2 - 4y(8-2y) = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 =$$

$$= 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$x = -(y+4) \pm (3y-4)$$

$$\begin{cases} x = 2y - 8 \\ x = -4y \end{cases}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$= \frac{(-x)^{\lg y}}{(-x)^{\lg x + 10}}$$

$$x = 2y - 8, x = -4y: \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg 4y^2} = (-x)^{2\lg 2y} = (x^2)^{\lg 2y}$$

$$x^{4\lg y} = y^{2\lg y} \cdot x^{2\lg 2y} = y$$

$$(4y)^{4\lg y} = y^{2\lg y} \cdot (4y)^{2\lg 2y}$$

$$(4-y)^{3\lg y}$$

$$(4-y)^{\lg(4-y)} = 10^{\lg^2(4-y)}$$

$$(4-y)^{3\lg y} = 10^{3\lg y \lg(4-y)}$$

$$y^{2\lg y} = 10^{2\lg^2 y}$$

$$10^{\lg^2(4-y)} - 10^{3\lg y \lg(4-y)} \cdot 10^{2\lg^2 y} = 0$$

$$10^{\lg^2(4-y)} = 10^{\lg y (2\lg y + 3\lg(4-y))}$$

$$\lg^2(4-y) = \lg y (2\lg y + 3\lg(4-y))$$

$$2\lg^2 y + 3\lg y \lg(4-y) - \lg^2(4-y) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Q - центр этой окружности, QK - радиус.

также $\Delta SQK \sim \Delta SQL$, (то же и для точки M , ($SM \cap$
 $\cap AC = M_1$)), $SK = SL = SM$, $(KLM) \parallel (ABC)$

$$SK \cdot \frac{S}{S_{ABC}} = \left(\frac{SK}{SH} \right)^2, \text{ где } S - \text{м-го искомого сечения}$$

$$\frac{SK}{SQ} = \frac{SQ}{SH} \quad (\Delta SQK \sim \Delta SKQ)$$

$$SH = SQ \cdot \frac{SQ}{SK} = \frac{SR \cdot 6R}{2\sqrt{6} \cdot R} = \frac{5\sqrt{6}}{2} R$$

$$S = S_{ABC} \cdot \left(\frac{SK}{SH} \right)^2 = 9 \cdot \left(\frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{6}} \cdot 2 \right)^2 = 9 \cdot \frac{16}{25} = \frac{144}{25}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin 0,2; \quad S = \frac{144}{25}$$

N5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$$

Пусто $t = x-6$, тогда первое ур-е примет вид:

$$|t-y| + |t+y| = 12$$

$$|t-y| = |y-t|, \quad |y-t| + |y+t| = 12$$

$$t \geq 0: \quad y-t + y+t = 12, \text{ при } y \geq t \quad y = 6$$

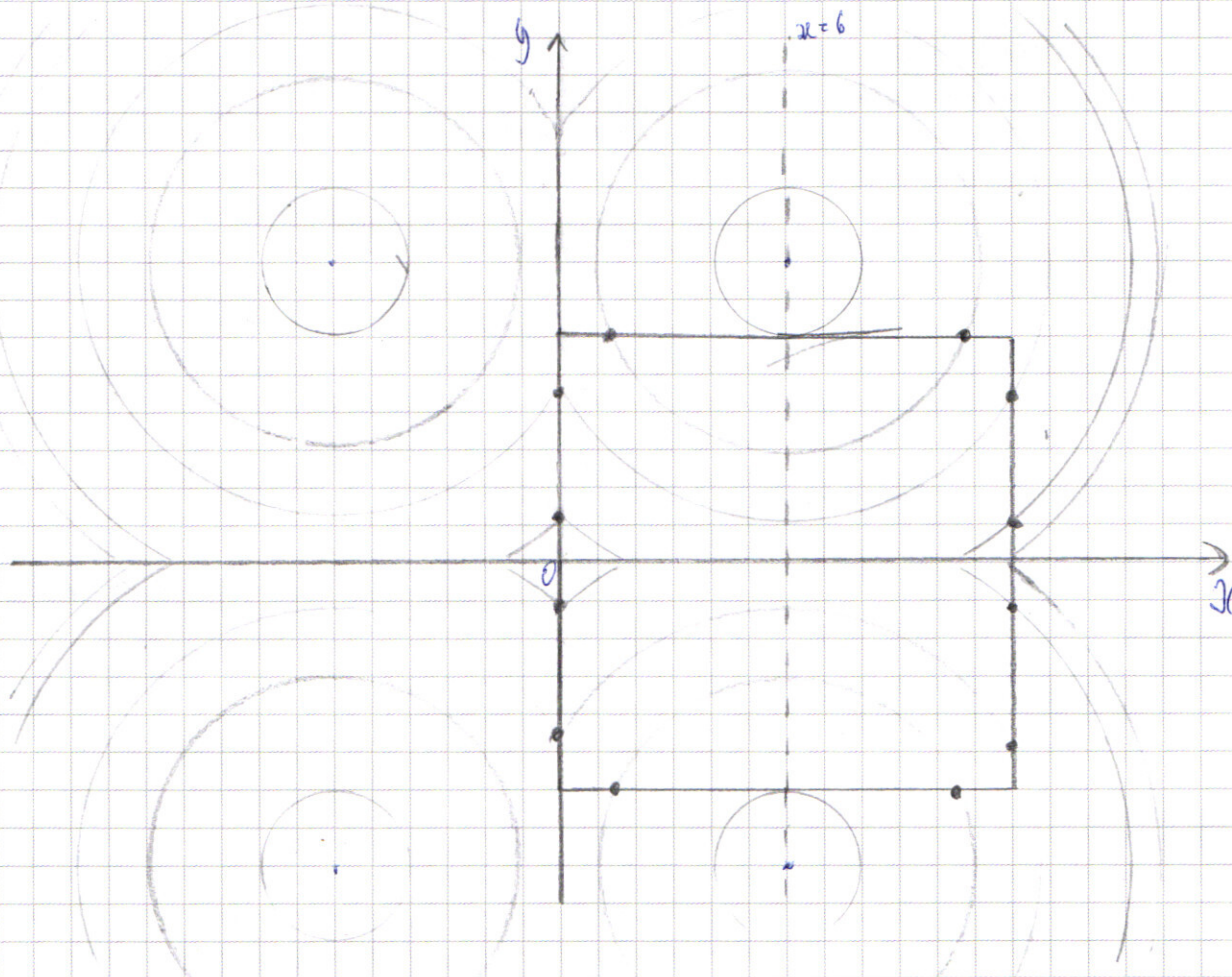
$$t-y + y+t = 12, \text{ при } -t \leq y < t \quad t = 6$$

$$t-y-y-t = 12, \text{ при } y < -t \quad y = -6$$

$$t < 0: \quad y-t + y+t = 12, \text{ при } y \geq -t \quad y = 6$$

$$t-y+y+t = 12, \text{ при } t \leq y < -t \quad t = +6$$

$$t-y-y-t = 12, \text{ при } y < -t \quad y = -6$$



Изобразим мн-во решений первого ур-я в м-те xOy . Для этого проведем прямую $x=6$. Если представить, что $x=6$ — это ось y , то найдемся в системе координат xOy , для которой найдены необходимые формулы. Строим график. Получается квадрат.

Множ-во точек, удовл. второму ур-ю, в xOy — окружности или их части ^{при $a=0$} (см. график; график симметричен относительно $y=0$, $x=0$, $(0;0)$) (при $a=0$ — точки, $a < 0$ — нет решений).

Система имеет два решения, если график множ-ва точек, удовл. 1-му ур-ю, пересекает мн-во точек, удовл. 2-му, в 2-х точках. Это происходит при $\sqrt{a} = 2$ (касание окр. и прямой $y=6$ ($y=6$)), т.е. $a=4$; и когда окружности пересекают ось в точках $(0;0)$ и $(0;\pm 6)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В последнем случае $a = 8^2 + 6^2 = 100$ (из г. Тигранова)
Ответ: 4; 100

№6.

Известно $\angle ACB + \angle ADB = 90^\circ$

$$\angle AO_1B + \angle AO_2B = 2(\angle ACB + \angle ADB) = 180^\circ$$

В силу симметрии отн. AB:

$$\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$$

$$\angle O_1AO_2 = \angle O_1BO_2 = 90^\circ$$

$$\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

O_1AO_2B - квадрат со
сторонами $R = 13$.

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$\angle CAB = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = 2R, \quad \frac{BD}{\sin(90^\circ - \angle CAB)} = 2R = \frac{BD}{\cos \angle CAB}$$

$$BD = 2R \cos \angle CAB$$

$$BC = 2R \sin \angle CAB$$

1. По формуле: $CF^2 = BF^2 + BC^2 = BD^2 + BC^2 = 4R^2 (\cos^2 \angle CAB + \sin^2 \angle CAB)$
 $= 4R^2 \Rightarrow CF = 2R = 26$

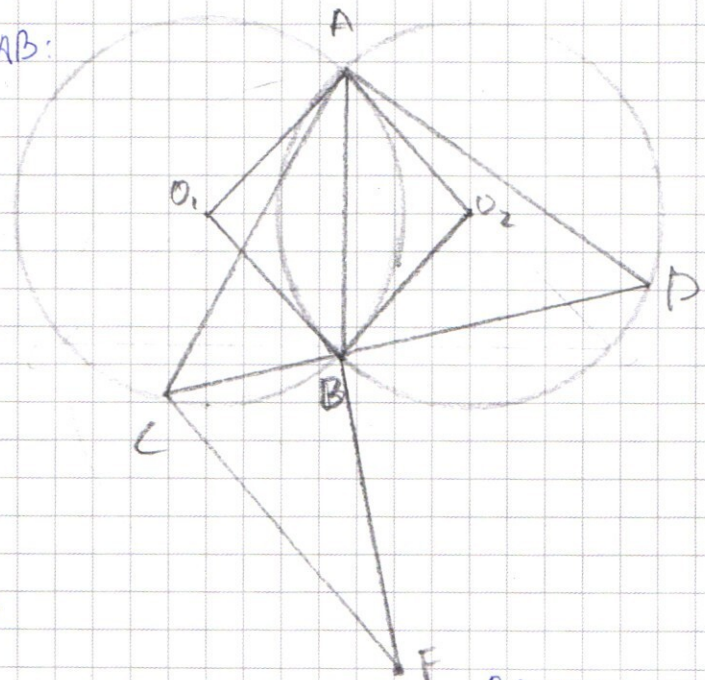
$$BD = 4 \cdot 8 = 32$$

$$BF^2 = CF^2 - BC^2 = 26^2 - 10^2 = 16 \cdot 36 = BD^2$$

$$CD = BD + BC = 32 + 10 = 42$$

$$AC = CD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 23\sqrt{2}$$

Так $\angle ACD = 45^\circ$, $\angle C = \sin \angle BCF = \frac{12}{13}$
 $\cos \angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$



$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin(45^\circ) \cdot \sqrt{BCF} = \frac{1}{2} \cdot \overset{17}{\cancel{23}} \cdot \overset{34}{\cancel{2}} \cdot 26 \cdot$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = \overset{17}{13} \cdot \overset{34}{23} \cdot \frac{17}{13} = \overset{34}{23} \cdot 17 = 340 + 51 =$$

$$\cancel{391} \quad 289 \quad \cancel{578}$$

Ответ: $CF = 26$; $S_{ACF} = \cancel{391} \quad \cancel{578} \quad 289$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$2 \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos x \cdot 2 \cos^2 5x - 1$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$2 \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(2x + 5x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} - 2x \right) =$$

$$= \cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x$$

$$\cos 10x = \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$\cos 7x \left(\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \sin 7x \left(\sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos^2 5x - \sqrt{2}$$

$$2 \cos 5x (\sqrt{2} \cos 5x - \cos 2x) = \sqrt{2} (1 - \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(7x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 10x = 0$$

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x = \cos 10x$$

$$(\cos 5x \sqrt{2} - \sin 5x \sqrt{2}) \cos 2x = 2 \cos^2 5x - 1 = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\cos 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x) - \sin 5x (\sqrt{2} \cos 2x - \sin 5x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{10x + \frac{\pi}{2}}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cos(10x + \frac{\pi}{2}) + 1}{2}}$$

$$\cos \left(10x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-10x) = -\sin 10x$$

$$4 \cos^2 2x \cdot \frac{1 - \sin 10x}{2} = \cos^2 10x$$

$$2 \cos^2 2x - 2 \sin 10x = 1 - \sin^2 10x$$

$$\cos 4x + 1 - 2 \sin 10x = 1 - \sin^2 10x$$

$$\cos 4x = \sin 10x (2 - \sin 10x)$$

$$\sin^2 10x - 2 \sin 10x + \cos 4x = 0$$

$$\frac{0}{4} = \sin^2 10x - 2 \sin 10x + (2 \cos^2 2x - 1) = 0$$

$$\frac{0}{4} = 1^2 - (2 \cos^2 2x - 1) = 2(1 - \cos^2 2x)$$

$$\sin 10x = 1 \pm \sqrt{2(1 - \cos^2 2x)}$$

$$\sin 10x = 1 - \sqrt{2(1 - \cos^2 2x)}$$

$$0 \leq 1 - \cos^2 2x \leq 1$$

$$2 \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$\cos 10x = \cos \left(5x + 5x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \left(\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) + \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = -\sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos 2x - \sin \left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sin \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\left(\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \left(\cos \left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

