

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. ~~[3 балла]~~ Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. ~~[5 баллов]~~ Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. ~~[5 баллов]~~ Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. ~~[5 баллов]~~ Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. ~~[5 баллов]~~ Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

Множитель 5 может дать только цифра 5. Значит, в каждом таком числе есть ровно 4 цифры «5». Множитель 3 без множителя 2 дают цифры 9 (тогда $3^3 = 9 \cdot 3$) и 3 (тогда $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$). Заметим, что в зависимости от случая мы получаем необходимое число либо 6, либо 7 множителями. Чтобы не изменять произведение, оставшиеся цифры сделаем единицами. Тогда набор цифр в числе - либо $\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1\}$, либо $\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 1, 1\}$. Число с первым набором: $C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_2^1$ (размещаем 5, размещаем 3, размещаем 1). Вторым: $C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_2^2$ (размещаем 5, размещаем 3, размещаем 1, 1). Итого: $C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_2^1 + C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{4!2!1!} + \frac{8!}{4!2!2!} = 35 + 35 = 70$. Ответ: 1120 чисел.

№2

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x &= \sqrt{2} \cos 5x \cdot \sin 2x \\ 2 \cos 5x \cos 2x &= \sqrt{2} \cos 5x \cdot \sin 2x \\ 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) &= \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & \text{I} \\ 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) & \text{II} \end{cases}$$

$\sqrt{2}$ (проголосили)

① $\cos 5x - \sin 5x = 0$

Если $\cos 5x = 0$, $\sin 5x = \pm 1$ и равн. неверно.

$\cos 5x \neq 0$

$\tan 5x = 1$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

②

$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$

$2 \cos 2x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \right)$

$2 \cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$

$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi m, m, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} + 2\pi l$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}, m, l \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7} \right\}, l, m, n \in \mathbb{Z}$

$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$ (2)

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$ (1)

① $(x+2y)(y-x) - 4(x+2y) = 0$

$(x+2y)(y-x-4) = 0$

$x = -2y$

$y = x+4$

② $\left(\frac{x^4}{(x+4)^2} \right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$ (x > -4)

Если $x = -3$, $\left(\frac{(-3)^4}{1} \right)^{\lg 1} = 3^{\lg 3}$

Значит, $x \neq -3$

$(x+4)^{\frac{4 \lg(x+4)}{\lg(x+4)}} = (-x(x+4))^{\lg(-x)}$

$(x+4)^{4-2\lg(x+4)} = (x+4)^{\lg(-x) + \lg(-x-4) + \lg(-x)}$

$x+4 \neq 1$

$4 \lg(-x) - 2 \lg(x+4) = \frac{\lg(-x)}{\lg(x+4)} \lg(-x) + \lg(-x)$

ОГР:

$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ x \neq -1 \\ \frac{x^4}{y^2} \neq 1 \end{cases}$

③ $\left(\frac{16y^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$

$16 \lg y \cdot y^2 \lg y = 2^{\lg 2} \lg y \cdot y^2 \lg y$

$y > 0 \Rightarrow y^2 \lg y > 0$

$4 \lg y = 2 \lg 2 + \lg y + \lg y$

Метод рационализации

$4 \lg y = \lg 2 + 3 \lg y$

$\lg y = \lg 2$

Метод расщ.

$y = 2 \Rightarrow x = -4$

$(-4, 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{3}$ (по условию)

$$\frac{\lg(-x)}{\lg(x+4)} - 3 \frac{\lg(-x)}{\lg(x+4)} + 2 = 0 \quad (\text{разделим на } \lg(x+4) \neq 0)$$

$$\left(\frac{\lg(-x)}{\lg(x+4)} - 1 \right) \left(\frac{\lg(-x)}{\lg(x+4)} - 2 \right) = 0$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg(x+4) \\ \lg(-x) = 2 \lg(x+4) \end{cases}$$

$$-x = x+4$$

$$-x = x^2 + 8x + 16 \rightarrow x^2 + 9x + 16 = 0$$

$$D = 81 - 64 = 17$$

$$\begin{cases} x = -2 \rightarrow y = 2 \\ x = \frac{-9 \pm \sqrt{17}}{2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \rightarrow x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} < -4, \text{ не под } x \\ x_2 = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \rightarrow x = \frac{-9 - \sqrt{17}}{2} \end{matrix}$$

Ответ: $(-4; 2); (-2; 2); \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$

$\sqrt{4}$

$(ABC) \perp SO$

1) $(ABC) \cap SO = Z$

2) $(DEF) \cap SO = R$

3) $SK \cap AB = M$

4) $SK \cap DE = Q$

5) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ (по 3 сторонам)

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{AB}{DE} = \frac{2}{3}$$

(5) $\text{пож.} \text{ пур-ков}$ отклоняется как k^2 , где k - коэффициент подобия

6) $\frac{ZN}{OR} = \frac{2}{3}$ (как соотв. эл-ты под. пур-ков)

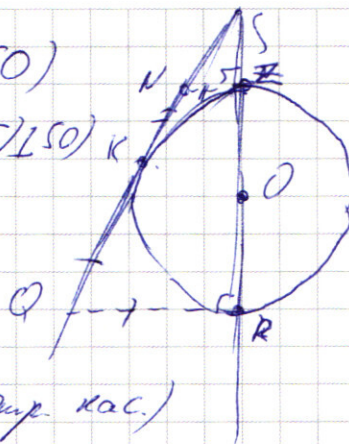
7) $2N \perp SO$ (м.к. $ZNC(ABC), (ABC) \perp SO$)

$QR \perp SO$ (м.к. $QRC(DEF), (DEF) \perp SO$)

8) $KSO = \alpha$

$NZ = 2x$

$QR = 3x$



9) $NK = NZ = 2x$
 $QK = QR = 3x$ } (по теор. об опр. кас.)

10) $\sin \alpha = \frac{NZ}{SN} = \frac{QR}{SQ}$ (по опр. sin)

$$\frac{2x}{SN} = \frac{3x}{SN+5x}$$

$$2SN + 10x = 3SN$$

$$SN = 10x$$

$$11) \sin \alpha = \frac{NZ}{SN} = \frac{2x}{10x} = \frac{1}{5}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{5}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{5}$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & \textcircled{1} \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a^2 & \textcircled{2} \end{cases}$$

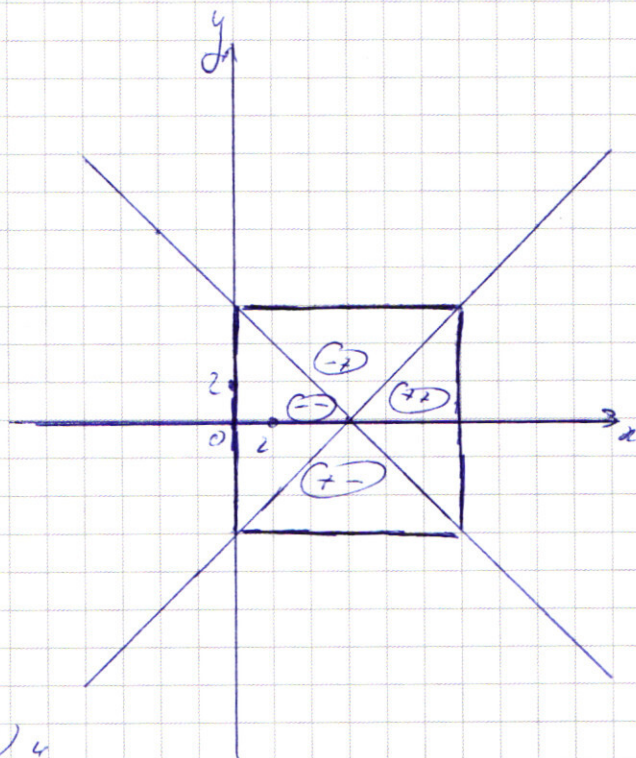
① - воспользуемся
методом интервалов
на мл-мл.

Положим $y = x - 6$ и
 $y = 6 - x$ и

в каждой четверти
раскроем модуль по-своему

-	-	$-2x+12 \leq 12 \Rightarrow x \geq 0$
+	-	$-2y \leq 12 \Rightarrow y \leq -6$
-	+	$2y \leq 12 \Rightarrow y \leq 6$
+	+	$2x+12 \leq 12 \Rightarrow x \leq 0$

Получим квадрат со
сторонами 12, центром в $(0; 6)$ и
сторонами, пар. осям x и y .



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (продолжение)

① - 4 окр-ти
с центрами в точках $(6; 8); (-6; 8); (6; -8); (-6; -8)$
и радиусами $\sqrt{a}$.

2. Возможны случаи, если 2 правые
окр-ти кас. сторон квадрата, 2 правые
окр-ти пересекают стороны квадрата
в одних и тех же местах ^② или если
левые окр-ти не имеют общих
с квадратом точек, а две ~~правые~~ левые
касаются ^③ или пересекают каждая в
одной точке ^④. Остальное невозможно, т.к.
оба условия невыполнимы. Если $y=0 \Rightarrow$ если есть
корень при $d>0$, то есть корни. Если $y<0$,
то таких пар больше одной.

Случай 1. При $a=4$ выполняются усл.

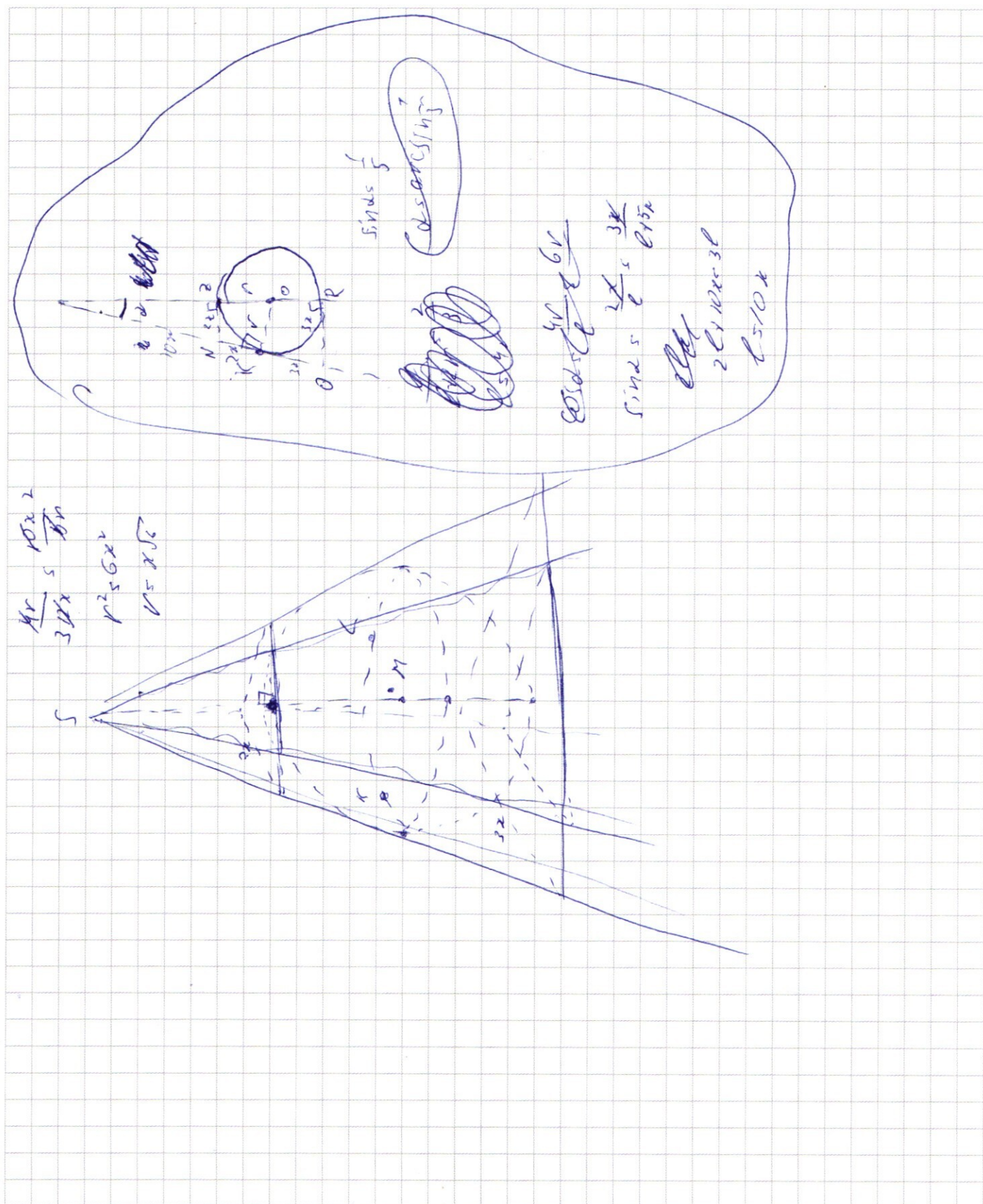
Случай 2. невозможно, т.к. левые окр-ти
не могут пересекать квадрат, более чем
в 1 месте

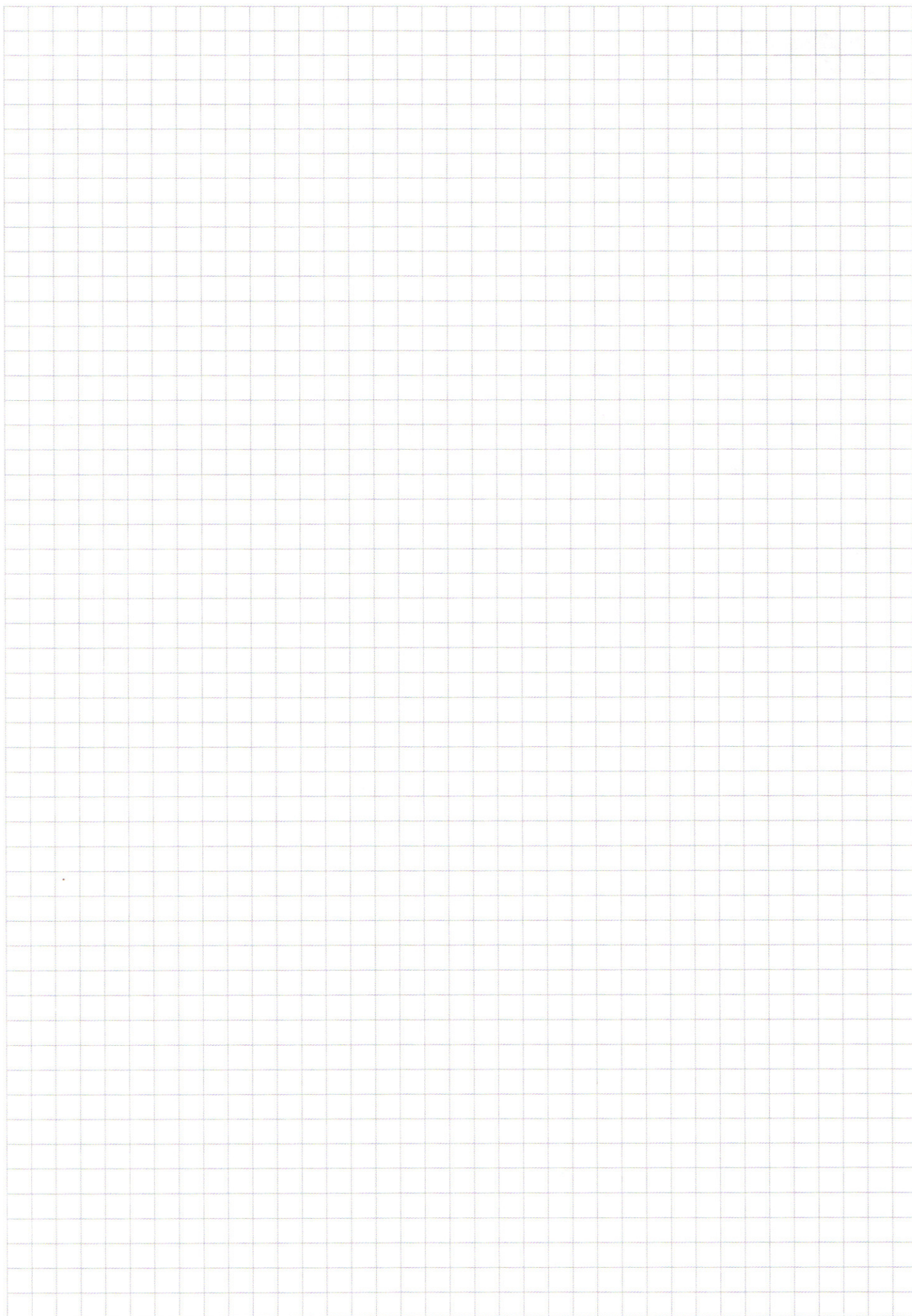
Случай 3. невозможно, т.к. правые окр-ти
не могут иметь т. пер. более одной

Случай 4. выполняется при $a=520$

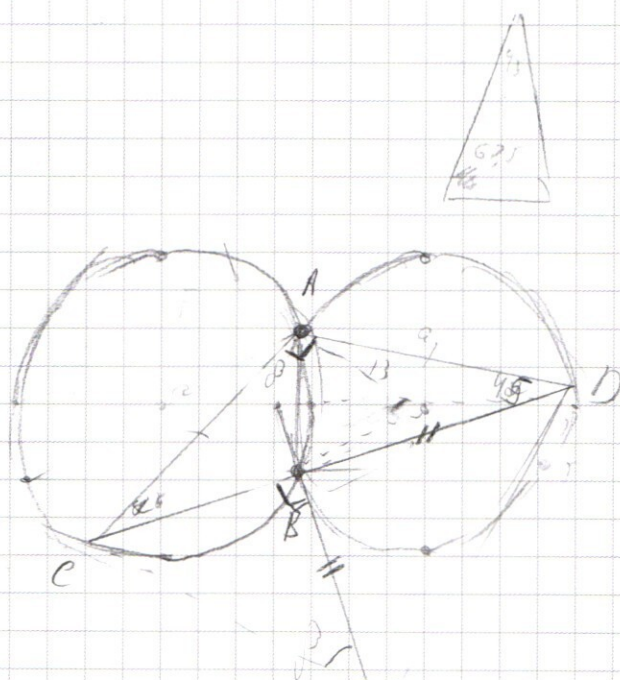
Ответ: $\{4; 520\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{133}{2}$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$CD = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{\sin \beta}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{BC}{BD} = \frac{CF}{BD} \Rightarrow \angle CFB = \beta$$

$$CB \cdot BD = CF \cdot BD \cdot \sin \beta$$

$$CF = CB \cdot \sin \beta$$

$$AB = 13\sqrt{2}$$

