МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 \quad (1) \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a \quad (2) \end{cases}$$

(2): $a \geq 0$, т.к слева сумма 2ух квадратов $\Rightarrow (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=(\sqrt{a})^2$ – ур-ие, задающее 4 окружности с центрами $(\pm 6; \pm 8)$ и радиусами $\sqrt{a}$

(1) $|x-6-y|+|x-6+y|=12$

раскроем модули:

1. $x-6-y \geq 0$
$(y \leq x-6)$

$x-6-y+|x-6+y|=12$

2. $x-6-y < 0$
$(y > x-6)$

$-x+6+y+|x-6+y|=12$

1.1 $x-6+y \geq 0$
$(y \geq 6-x)$

$2x-12=12$

$\begin{cases} x=12 \\ y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$ (1)

1.2 $x-6+y < 0$
$(y < 6-x)$

$-2y=12$

$\begin{cases} y=-6 \\ y \leq x-6 \\ y < 6-x \end{cases}$ (2)

2.1 $x-6+y \geq 0$
$(y \geq 6-x)$

$2y=12$

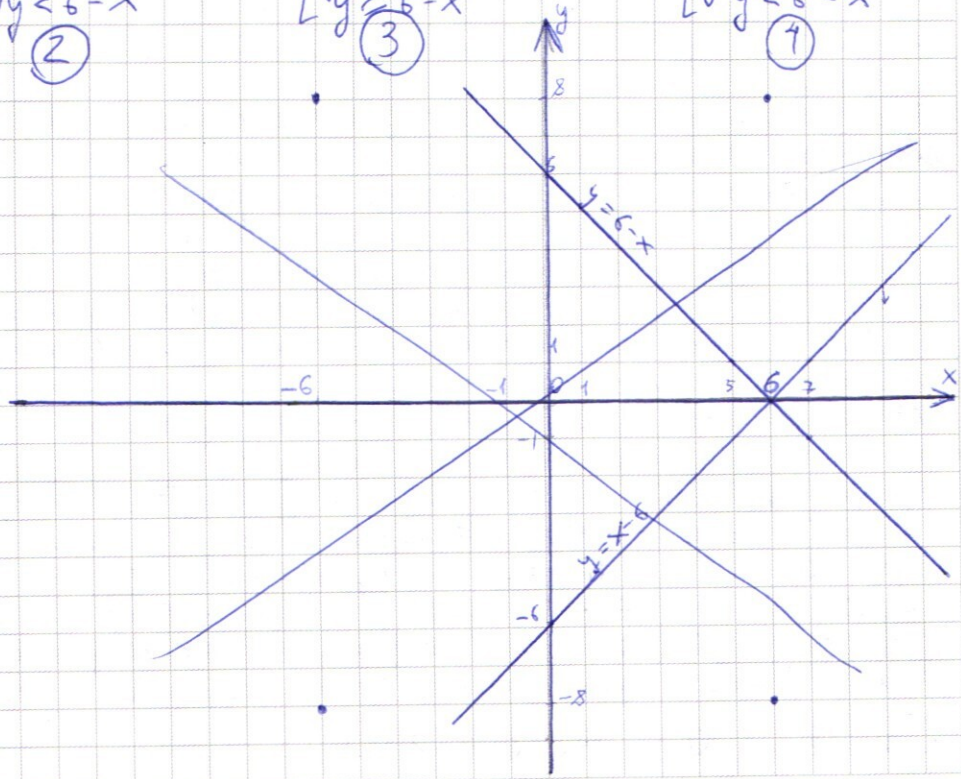
$\begin{cases} y=6 \\ y > x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases}$ (3)

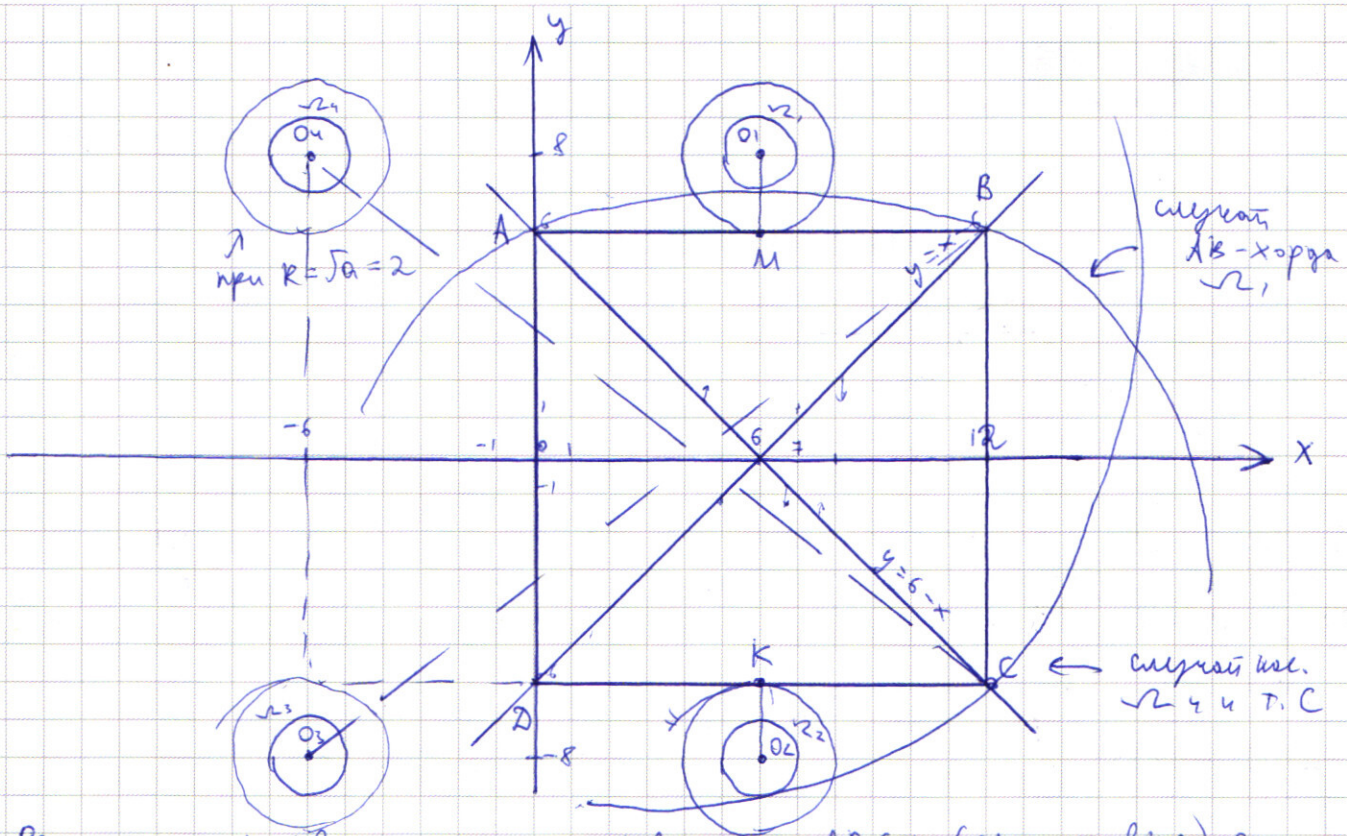
2.2 $x-6+y < 0$
$(y < 6-x)$

$-2x+12=12$

$\begin{cases} x=0 \\ y > x-6 \\ y < 6-x \end{cases}$ (4)

Изобразим мн-во решений каждого из двух уравнений в плоскости XY:





Решения первого ур-ия - квадрат ABCD (окантовка) со стороной 12.
Решения второго ур-ия - окружности (окантовка) $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ с радиусами $\sqrt{a}$ и центрами O_1, O_2, O_3, O_4

Заметим, что Ω_1 и Ω_2 симметричны относительно Ox $\Rightarrow$ если Ω_1 пересечёт квадрат (2 решения), то и Ω_2 пересечёт квадрат (еще 2 решения) $\Rightarrow$ суммарно равно 2 решениям будут, если Ω_1 и Ω_2 касаются ABCD (точки K и M)
Тогда $R = O_2K = O_1M = |-8-(-6)| = |8-6| = 2 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 4$, $a \geq 0$
при $a=4$ радиус окр. $= \sqrt{a} = 2$, Ω_1 и Ω_2 касаются ABCD, Ω_3 и Ω_4 нет
При увеличении a (Ω_1 и Ω_2 пересекают ABCD, Ω_3 и Ω_4 тоже когда-то начнут пересекать) решений станет больше 2.
при нахождении квадрата внутри Ω_1 и Ω_2 либо не будет пересечений с Ω_1 и Ω_2, либо AB и CD будут хордами (4 реш.)
] Ω_1 и Ω_2 не имеют общих точек с ABCD, (ABCD лежит внутри), Ω_4 и Ω_3 касаются ABCD (не пересекают, т.к. аналогично Ω_1 и Ω_2, они симметричны $\Rightarrow$ при пересечении >2 решений) причём a большое (чтобы Ω_1 и Ω_2 не имели общих точек) $\Rightarrow$ ABCD внутри Ω_3 и Ω_4, точки касания B и C (самые удаленные от O_3 и O_4 и симметричные отн. Ox)
Тогда $R = \sqrt{a} = O_3B = O_4C = \sqrt{(12-(-6))^2+(8-(-6))^2} = \sqrt{18^2+14^2} = \sqrt{252} \Rightarrow a = 252 = 36\cdot 7 = 6\sqrt{7}$
при $a=252$ $R_1 = R_2$ (у Ω_1 и Ω_2) $= \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$
$\rho(O_1;K) = |-6-8| = 14$ $\quad 14 > 6\sqrt{7}$
$\rho(O_1;C) = \sqrt{14^2+6^2} = \sqrt{232} < \sqrt{252} \Rightarrow$ не будет общих точек (радиус больше самой удаленной точки); других a, чтобы было 2 реш, нет

Ответ: $a=4$; $a=252$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

усл: $y > 0$ ($\lg$)

$\Rightarrow -xy > 0$

$x < 0$

Разложим (2) на множители:

$(-x+y-4)(x+2y) = -2xy - x^2 + yx + 2y^2 - 4x - 8y =$

$= 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$-x+y-4=0$ или $x+2y=0$

$x = y-4$ (1 в.) $\qquad x = -2y$ (2 в.)

~~2 варио~~ ~~Реш~~ подставим полученные выражения x ч/з y в (1):

2 в.: $x = -2y$

$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$; $\quad (16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)} = (2y)^{\lg y + \lg(2y)}$ $(y>0)$

$(y>0)$

$(2y)^{2\lg y} \cdot 4^{\lg y} = (2y)^{\lg y^2 + \lg 2} = (2y)^{2\lg y} \cdot (2y)^{\lg 2} \quad / : (2y)^{2\lg y} \neq 0$ (степени a^x $(y>0)$ $a^x > 0$)

$4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2}$ ⊛

Т.к. $4^{\lg y} > 0$ и $(2y)^{\lg 2} > 0$ $(y>0)$ и $f(x) = \lg x \uparrow$ и монотонна $(a^x > 0)$, то ⊛ $\Leftrightarrow \lg(4^{\lg y}) = \lg((2y)^{\lg 2})$

$\lg y \cdot \lg 4 = \lg 2 \cdot \lg 2y$; $\quad \lg y \cdot 2\cancel{\lg 2} = \cancel{\lg 2} \cdot \lg 2y$

$2\lg y = \lg 2y \overset{y>0}{\Leftrightarrow} \lg y^2 = \lg 2y \overset{\lg x \uparrow}{\Leftrightarrow} y^2 = 2y$; $y(y-2) = 0$

$y = 0$ ⊘ $(y>0)$

$\boxed{y = 2}$

$\boxed{\begin{matrix} y = 2 > 0 \\ x = -2y = -4 < 0 \end{matrix}}$ – решение

1в: $x = y-4$, $y>0$, $x<0 \Rightarrow y \in (0;4)$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)y)}$$

$(4-y)^4 = (y-4)^4$ $\quad (a^{2k} = (-a)^{2k})$

$$\frac{(4-y)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (4-y)^{\lg y}\cdot(4-y)^{\lg(4-y)} \quad \Big| : (4-y)^{4\lg y} \neq 0$$

$y \neq 4$

$\cancel{4-x}$ $a^x > 0$

$$\cancel{\frac{1}{y^{2\lg y}}} = \frac{1}{y^{2\lg y}} = (4-y)^{\lg y + \lg(4-y) - 4\lg y}$$

$$y^{-2\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y) - 3\lg y} \quad (*)(*)$$

$y^{-2\lg y} > 0$ $(y \neq 0,\ a^x > 0)$ и $(4-y)^{\lg(4-y)-3\lg y} > 0$ $\left(\begin{matrix} y \neq 4 \\ a^x > 0\end{matrix}\right)$

и $f(x) = \lg x \uparrow$ монотонно, $(*)(*) \Leftrightarrow$

$$\lg(y^{-2\lg y}) = \lg((4-y)^{\lg(4-y) - 3\lg y})$$

$\lg y = a$

$\lg(4-y) = b$:

$$-2\lg y \cdot \lg y = (\lg(4-y) - 3\lg y)\lg(4-y)$$

$-2a^2 = (b-3a)b$;

$-2a^2 = b^2 - 3ab$;

$-a^2 = b^2 - 2ab + a^2 - ab$; $\quad -a^2 + ab = (b-a)^2$.

$a(b-a) = (b-a)^2 \quad \Big| : b-a \neq 0$ $\quad$ если $\lg a = \lg b$ $\quad f(x) = \lg x \uparrow$

$y = 4-y$; $\quad y = 2$

$x = -2$

$a = b-a$;

$2a = b$;

$2\lg y = \lg(4-y)$; $\quad y>0$ $\quad \lg y^2 = \lg(4-y) \overset{f(x)\ \lg x \uparrow}{\Leftrightarrow} y^2 = 4-y$;

$y^2 + y - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = (\sqrt{17})^2$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \quad \varnothing$$

$$\boxed{\begin{aligned} &y_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \ \checkmark > 0 \\ &x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} - 4 = \\ &= \frac{-1+\sqrt{17}-8}{2} = \frac{-9+\sqrt{17}}{2} < 0 \end{aligned}}$$

Ответ: $(-4;2)$; $(-2;2)$; $\left(\frac{-9+\sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$ У восьмизначного числа 8 цифр в записи $\Rightarrow$ т.к $5^2 > 9$ (не поместится в 1 цифру), а $3^2 = 9 \leq 9$ - поместится в 1 цифру, имеем 2 варианта кол-ва различных цифр в числе:

1°. четыре „5ки", три „3ки" и одна „1ка"

2°. четыре „5ки", одна „3ка", одна „9ка" и 2 „1ки".

1°: C_8^4 - поставить 5ки; C_{8-4}^3 - поставить 3ки; C_{8-4-3}^1 - поставить 1ки, события независимы, итого:

$C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{4!}{3!1!} \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4}{1} \cdot 1 =$

$= 70 \cdot 4 = 280$ вариантов

2°: C_8^4 - поставить „5ки", C_{8-4}^2 - поставить „1ки", C_2^1 - поставить 9ку/3ку, C_1^1 - поставить 3ку/9ку; события независимы:

$A = C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_1^1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot 1 = 70 \cdot 12$ вариантов

Если $A = C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^2$ и ту (если после 5ок ставить 3ки/9ки, а не 1ки)

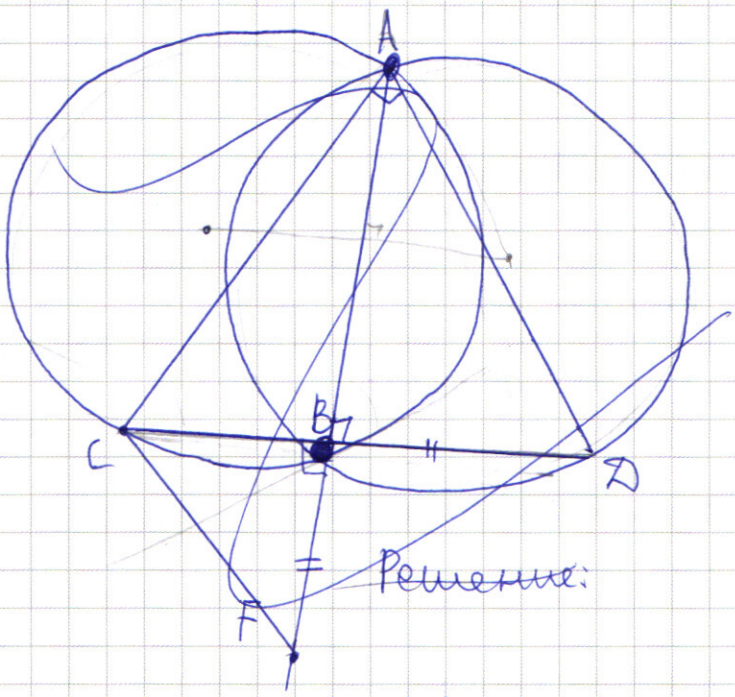
Тогда всего $70 \cdot 4 + 70 \cdot 12 = 70 \cdot 16$ вариантов

(*) Заметим, что 4 „5ки" есть обязательно, т.к $16875 = t \cdot 5^4$, $5^b, (b > 1) > 9$ - не цифра

$70 \cdot 16 = 1120$ в.

Ответ: 1120 вариантов

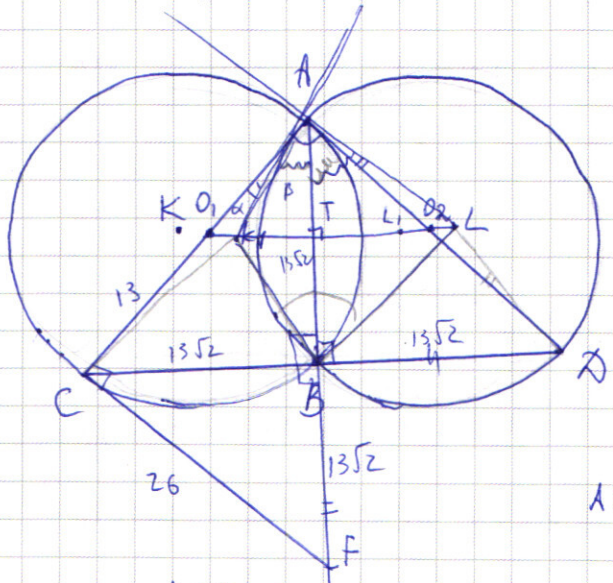
Задача 6



Дано:
$R_1 = R_2 = 13$;
$B \in [CD]$; $\angle CAD = 90°$
~~$B \in [C$~~ $CB \perp CD$
$BF = BD$

$CF - ?$

Решение:



Решение: 1) K и L – центры окружностей, тогда $\angle KAL = 90°$ (AL – касательная к A-радиус, ⊥ный касательной в т. кас)
$\Rightarrow \angle KAO_1$ и $\angle LAO_2 = 0$ ($\angle O_1AO_2 = 90°$) $\Rightarrow$ K и L совп. с O_1 и O_2

Аналогичными рассуждениями K_1 и L_1 (внутри) совпадают с O_1 и O_2 ($\angle K_1AO_1 = \angle L_1AO_2 = 0°$)

3 случай: K_1 и L центры н/о (один снаружи, другой „внутри" $\triangle CAD$)
$\angle K_1AL = 90°$ и $\angle O_1AO_2 = 90° \Rightarrow$
$\angle O_1AK_1 = \angle O_2AL \neq \alpha$
т.е. либо O_1 и O_2 (центры) лежат на AC и AD, либо K_1 и L – центры

$\triangle AK_1B = \triangle ALB$ (по 3 сторонам: $R_1 = R_2 = 13$; AB – общ.) $\Rightarrow \angle K_1AB = \angle LAB = \beta$

Тогда $\angle O_1AO_2 = 90°$: $\beta + \alpha + \beta - \alpha = 90° \Rightarrow \beta = 45°$

$\triangle ACK_1 = \triangle ALD$ по ($AK_1 = CK_1 = AL = LD = R$, $\angle CAK_1 = \angle LAD$ – 4 признак) $\Rightarrow$ $AC = AD \Rightarrow \triangle CAD$ р/б $\Rightarrow$ AB – высота и бис-са $\Rightarrow \angle CAB = \angle DAB \Rightarrow$ $\beta + \alpha = \beta - \alpha \Rightarrow \alpha = 0° \Rightarrow$ K_1 и L совпадают с O_1 и O_2 и лежат на AC и AD), O_1 и O_2 – центры окр.

$O_1O_2 \perp AB$ (по св-вам прямая, соед. центры пересек. окр.) и $AT = TB$

$AC = AD = 2R_1 = 2R_2 \Rightarrow$ AB – высота и медиана; $\triangle ADC$: т. Пифагора:
$CD^2 = AC^2 + AD^2$; $CD = \sqrt{(13+13)^2 + (13+13)^2} = \sqrt{26^2 + 26^2} = 26\sqrt{2}$

$CB = BD$ (медиана) $= 13\sqrt{2}$; $BF = BD = 13\sqrt{2}$

$\triangle CBF$ прямоуг. ($\angle CBF = \angle ABD$ (вертик.) $= 90°$): т. Пифаг.:

$CF^2 = CB^2 + BF^2$; $CF = \sqrt{(13\sqrt{2})^2 + (13\sqrt{2})^2} = 13\sqrt{2}\sqrt{2} = 26$

Ответ: пункта: $CF = 26$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6 (продолжение)

(*) Заметим, что центры окр. лежат на AC и AD еще и т.к. $\angle CBA = 90°$ и $\angle ABD = 90°$ (вписанные) => опираются на диаметр => AD и AC – диаметры,

б) $\triangle ABC$ прямоуг; $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{26^2 - 13^2 2} = 13\sqrt{2^2 - 2} = 13\sqrt{2}$

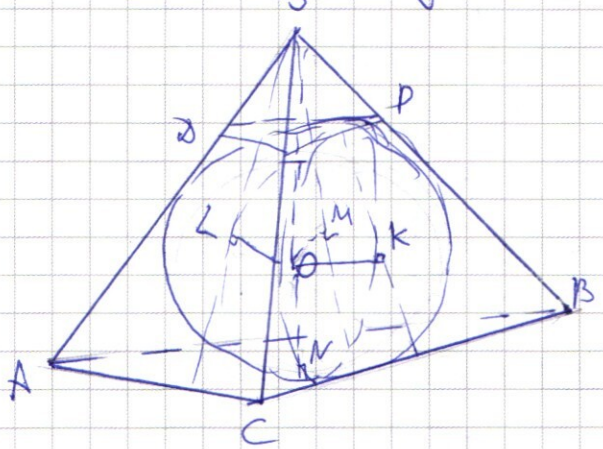
~~$S_{\triangle AFC}$~~ $\triangle AFC$: $AF = 26\sqrt{2}$

$AC = 26$, $CF = 26$ по Th, обратной Th. Пифо;

$\angle ACF = 90°$ => $\triangle ACF$ прямоуг. => $S_{\triangle ACF} = \frac{26 \cdot 26}{2} = 13 \cdot 26 = 338$

Ответ: $S = 338$

Задача 4



Дано:

$S_{ABC} = 9$; $S_{PTD} = 4$

Найти:

$\angle KSO$ – ?

(сеч) $S(K, M)$ – ?

Решение:

1) ∃ ABCS – тетраэдр, сфера касается всех граней, тогда $S(ABC) = 9$; $S(PTD) = 4$

SO – биссектриса TK, т.к. т. O равноудалена от всех его граней; ∃ (ABC) касается сферы в т. N

Задача 7:

Заметим, что при $x \le 4$ первое больше второго (при $x = 4$ $y \ge 0$ и $y < 0$)

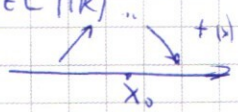
=> $x > 5$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} \le y < 85 + (3^{81} - 1)x$

$0 \le y < 85 + 3^{81}(x - 4) - 3^x - x$ $\quad$ $f(x) = 85 + 3^{81}(x-4) - 3^x - x$

$f'(x) = 3^{81} - 3^x \cdot \ln 3 - 1 = 0$ $\quad$ $3^{81} - 1 = 3^x \cdot \ln 3$ $\quad$ $1 < 2$ $\quad$ const

$x_0 \in (80; 81)$ – какая-то из этого промежутка $\quad$ x_{max} $\quad$ $f \in C(\mathbb{R})$



Задача 2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x;$

$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) = \sqrt{2}\cdot\cos 10x$

возведём в квадрат и учтём потом, что л.ч и п.ч одного знака:

~~cos 7x - sin~~ заметим: $(\cos a - \sin a)^2 = \cos^2 a + \sin^2 a - 2\cos a\cdot\sin a =$
$= 1 - \sin 2a$

$1 - \sin 14x + 1 - \sin 6x + 2(\cos 7x - \sin 7x)\cdot(\cos 3x - \sin 3x) = (\sqrt{2}\cdot\cos 10x)^2;$

$2 - \sin 14x - \sin 6x + 2(\cos 7x\cos 3x + \sin 7x\cdot\sin 3x) - 2($

$(\sin(3x+7x)) = (\sqrt{2}\cdot\cos 10x)^2;$

$2 - \sin 14x - \sin 6x + 2\cos 4x - 2\sin 10x = 2\cos^2 10x$

$2 - 2(\sin 10x\cdot\cos 4x) + 2\cos 4x - 2\sin 10x = 2\cos^2 10x;$

$\sin 10x\cdot\cos 4x - \cos 4x + \sin 10x = \sin^2 10x;$

$\exists\ \sin 10x = a;\quad \cos 4x = b;$

$ab - b + a = a^2;\quad b(a-1) = a(a-1);\ (a-1)(b-a) = 0$

$\sin 10x = 1$ или $\cos 4x = \sin 10x;$

$\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right);$

$\left[\begin{array}{l} 4x = \frac{\pi}{2} - 10x + 2\pi t,\ t\in\mathbb{Z} \\ -4x = \frac{\pi}{2} - 10x + 2\pi t,\ t\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 14x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t,\ t\in\mathbb{Z}; \\ 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi t,\ t\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

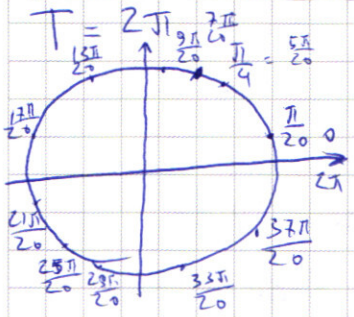
$10x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} = \frac{4\pi k}{20},\ k\in\mathbb{Z}}$

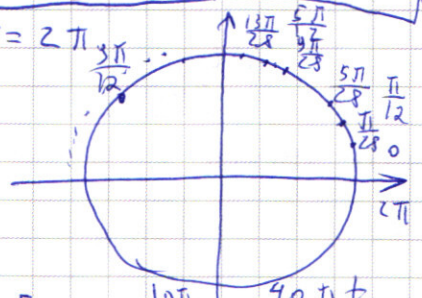
Ответ

$\boxed{\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{28} + \frac{\pi t}{7} = \frac{4\pi t}{28},\ t\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi t}{3} = \frac{4\pi t}{12},\ t\in\mathbb{Z} \end{array}\right.}$

$T = 2\pi$



$T = 2\pi$



$\left[\begin{array}{l} 10x = \frac{10\pi}{28} + \frac{40\pi t}{28},\ t\in\mathbb{Z} \\ 10x = \frac{10\pi}{12} + \frac{40\pi t}{12},\ t\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

~~cos 10x~~ =

$= 10x = \sin 10x = 1$

$\Rightarrow \cos 10x = 0 \Rightarrow$

$(\cos 7x - \sin 7x) + (\cos 3x - \sin 3x) \geq 0$

$7x = \frac{7\pi}{20} + \frac{28\pi k}{20},\ k\in\mathbb{Z}$

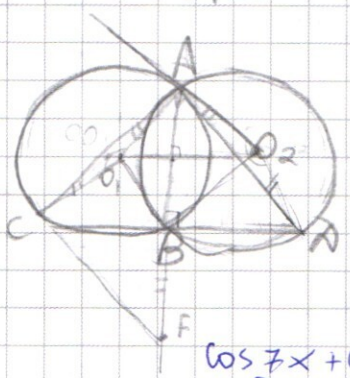
$3x = \frac{3\pi}{20} + \frac{12\pi k}{20},\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos\alpha > \sin\alpha$ в $[0; \frac{\pi}{4}]$; $[\pi; \frac{3\pi}{2}]$; $[\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}; 2\pi]$

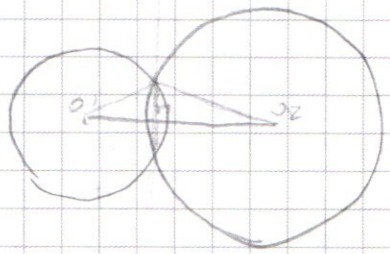
С учётом знаков

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8 углов = 0



CD || OO₁



$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}(\cos 7x\cdot\cos 3x - \sin 7x\cdot\sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 7x\cdot\cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2}\cdot\sin 7x\cdot\sin 3x$

~~$f(x) = \cos$~~ $1:\cos 7x\cdot\cos 3x$

~~$f(t) = \cos 7t + \cos$~~

$\frac{1}{\cos 3x} + \frac{1}{\cos 7x} - \sqrt{2} = \frac{tg\,7x}{\cos 3x} + \frac{tg\,3x}{\cos 7x} - \sqrt{2}\cdot tg\,7x\cdot tg\,3x$

$\cos 7 \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 3x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 7x)$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\sqrt{2}\cdot\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$

$\sqrt{2}\cdot\cos 2x\cdot(\cos 5x - \sin 5x) = 2\cos^2 5x - 1$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = 2\sin 5x\cdot\cos 2x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

50-трапеция

$y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81} - 1)x$

$0 \leq y < 85 + 3^{81}(x-4) - 3^x - x$

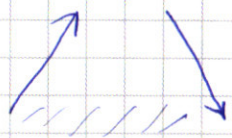
$(\cos 7x - \sin 7x)^2 = 1 - 2\sin 14x$

при $x \leq 4$ $\varnothing$ $\quad f(x) = 85 + 3^{81}\cdot x - 4\cdot 3^{81} - 3^x - x$

$f'(x) = 3^{81} - 1 - 3^x\cdot \ln 3 = 0$

$3^{81} = 1 + 3^x\cdot \ln 3$ $\quad x \in (80; 81)$

$x = 5 \quad > 0$



$85 + 3^{81}(x-4) - 3^x - x = 0$

$85 + 3^{81}\cdot x = 3^{81}\cdot 4 + 3^x + x$

$3^{81} \vee 1 + 3^x \ln x$ $\quad x = 10$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}\cdot\cos 10x$

$1 - 2\sin 14x + 1 - 2\sin 6x + 2(\cos 7x - \sin 7x)(\cos 3x - \sin 3x) =$

$= 2\cos 7x\cdot\cos 3x - 2\cos 7x\sin 3x - 2\sin 7x\cdot\cos 3x + 2\sin 7x\cdot\sin 3x =$

$= 2(\cos(7x - 3x)) - 2(\sin 10x) = (\sqrt{2}\cdot\cos 10x)^2 = 2\cos^2 10x$

$\cos 4x - \sin 10x = \cos^2 10x$

$\cos 4x = \sin 2 + 2\omega$

$2 - \sin 14x - \sin 6x + 2\cos 4x - 2\sin 10x = 2\cos^2 10x$

$2 - 2\sin 10x\cos 4x + 2\cos 4x - 2\sin 10x = 2\cos^2 10x$

$1 - \sin 10x\cdot\cos 4x + \cos 4x - \sin 10x = \cos^2 10x$

$\sin^2 10x = \sin 10x\cdot\cos 4x - \cos 4x + \sin 10x$

$a \qquad b$

$a^2 = ab - b + a$

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ $\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=(\sqrt{|a|})^2 \end{cases}$ — ур-ие 4х окружностей

с ц. $(\pm 6; \pm 8)$ рад. $\sqrt{|a|}$

1 мод: $x-6-y \geq 0$

$y \leq x-6$

$x-6-y+|x-6+y|=12$

$x-6+y \geq 0$

$y \geq 6-x$

$x-6-y+x-6+y=12$

$2x-12=12$

$\boxed{x=12}$ 1

2 м.

$\boxed{\begin{matrix} y=x-6 \\ y=6-x \end{matrix}}$

$x-6-y \leq 0$

$y \geq x-6$

$-x+6+y+|x-6+y|=12$

1. $y \geq 6-x$

$-x+6+y+x-6+y=12$

$\boxed{y=6}$ 3

2. $y \leq 6-x$

$-x+6+y-x+6-y=12$

$-2x+12=12$

4 $\boxed{x=0}$

$y \leq 6-x$

$x-6-y-x+6-y=12$

$-2y=12$

$\boxed{y=-6}$ 2

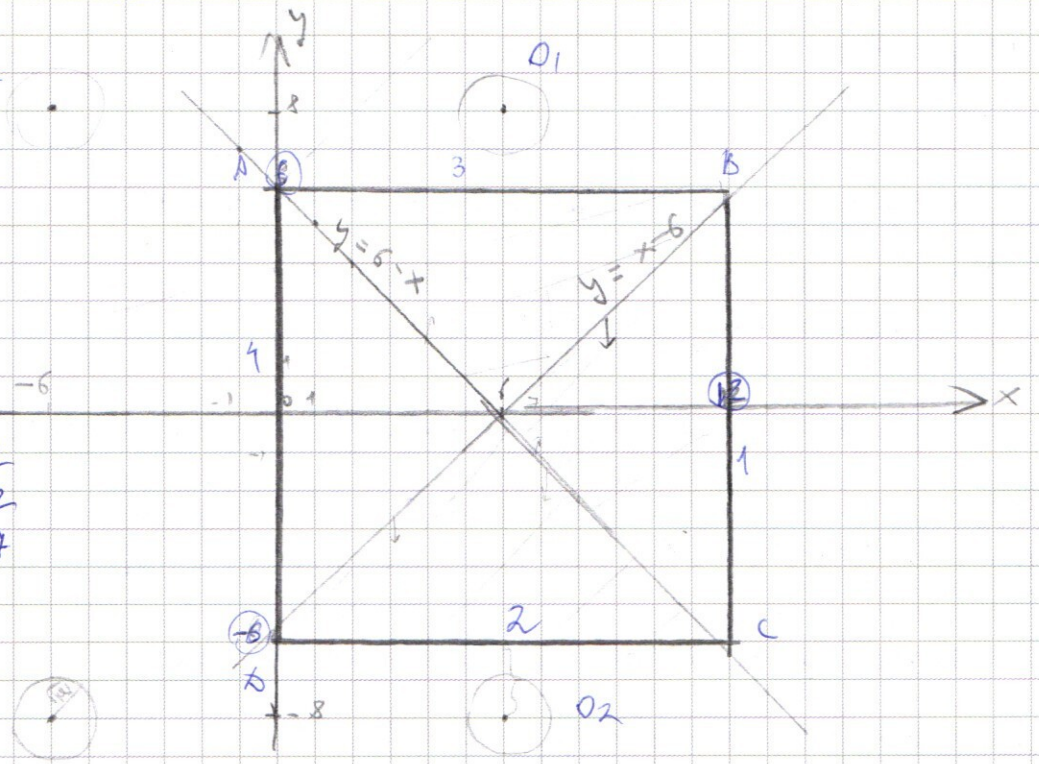
решением первого ~~второго~~ квадрат

ABCD

$\begin{array}{r|l} x & y \\ \hline 1 & 5\ 6 \\ + & 1\ 3\ 6 \\ & 3\ 6 \\ \hline & 2\ 3\ 2 \end{array}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 14 \\ \hline 72 \\ +\ 18 \\ \hline 252 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 7 \\ 9 & \end{array}$



O_1 и O_2 симм. => если O_1 пересек, то и O_2 пересек. => когда кас.

$\sqrt{|a|}=2$ $\boxed{a=4}$ и всё?

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(y-4)^2 - 16 - (x+2)^2 + 4 + y^2 - xy = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$\cancel{2y\,y(2y-1) - 4(2y+x)}$

$\cos^2\frac{30}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt3}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$

$\cos\frac{15}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt3}{4}}$

$\cos 30 + \cos 10 = \frac{1+\sqrt3}{2}$

$\frac{2\sqrt2}{2}\cdot\cos 15^\circ \frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{\sqrt2} =$

$= \sqrt{\frac{2+\sqrt3}{2}} = \sqrt{1+\frac{\sqrt3}{2}}$

1. $16875 \,|\, 5$
$15 \,|\, 3375$
18
-15
37
-35
25

$3375 \,|\, 5$
$30 \,|\, 675$
37
-35
25

$675 \,|\, 5$
$5 \,|\, 135$
17
-15
25

$135 \,|\, 5$
$10 \,|\, 27$
35

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

8-ое число заметим, что точно будет 4 5ки

остаётся 3^3 на 4 цифры и 1ти

1 вар: все 3-ки и 1 единица

$\sin\alpha = 1 = \cancel{2\cos\frac{\sqrt2}{2}}$

$2\cos 45^\circ \cos 45^\circ = 2\frac{\sqrt2\cdot\sqrt2}{4} = \frac{2}{2} = 1$

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin 45^\circ + \sin 135^\circ = \sqrt2$

$2\frac{\sqrt2}{2}\cdot 1 \quad \sqrt2$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

— — — — — — — —

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt2\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\sin(90-7x) + \sin(90-3x) - \sqrt2\cdot\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$

$2\sin\left(\frac{180-10x}{2}\right)\cos\left(\frac{-4x}{2}\right) =$

$= \cancel{2\sin(90-5x)} = 2\cos 5x\cos 2x - \sqrt2\cdot\cos 10x = 2\sin 5x\cdot\cos 2x$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x - \sqrt2(2\cos^2 5x - 1) = 2\sin 5x\cdot\cos 2x$

$2\cos 5x(\cos 2x - \sqrt2\cos 5x) = 2\sin 5x\cdot\cos 2x - \sqrt2$

$\cos 10x = \cos(7x+3x) = \frac{1}{2}($

$= \cos 7x\cdot\cos 3x - \sin 7x\cdot\sin 3x$

$2\cos 5x\cdot\cos 2x - \sqrt2\cdot\cos 10x = 2\sin 5x\cdot\cos 2x$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt2\cdot\cos 10x$

$\underline{\sqrt2\cdot\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x}$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt2\cos 7x\cdot\cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt2\cdot\sin 7x\cdot\sin 3x$

$\cos 7x - \frac{\sqrt2}{2}\cos 7x\cdot\cos 3x = \frac{\sqrt2}{2}\cos 7x(\sqrt2 - \cos 3x)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$y>0 \Rightarrow x<0$

$2y^2-xy-x^2-4x-8y=0$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = \lg(-x)+\lg(y)$

$(-x-y-4)(x+2y)$

$-x^2-xy+2y^2-4x-8y=0$

$(-x+y-4)(x+2y) = -x^2-2yx+yx+2y^2-4x-8y=$

$= -x^2-xy+2y^2-4x-8y=0$

$(-x+y-4)(x+2y)=0$

$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)/4)}$

$x=-2y$ или $\cancel{x=y-4}$

$-x+y-4=0$

$x=y-4$

$-2a^2=b^2-3ab;$

$-2a^2=b(b-3a)$

$b^2-b^2-3ab+a^2=-a^2$

$(b-a)^2=ab-a^2$

$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg y+\lg(2y)}$ $\lg(2y^2)$

$(2y)^{2\lg y}\cdot 4^{\lg y} = (2y)^{2\lg y+\lg 2} \quad : (2y)^{2\lg y}$

$4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2} = 2^{\lg 2}\cdot y^{\lg 2}$

$4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2}$

$4^{\log_{10} y} > 1$ $\quad (2y)^{\log_{10} x} > 2y$ $\quad \approx 0{,}2$

$\lg(4^{\lg y}) = \lg(2y)^{\lg 2}$

$\lg y\cdot\lg 4 = \lg 2\cdot\lg 2y$

$\lg y\cdot 2\cancel{\lg 2} = \cancel{\lg 2}\cdot\lg 2y$

$\lg y^2=\lg 2y$

$y^2=2y$

$y(y-2)=0$

$y=0$ $\varnothing$

$\boxed{y=2}$

$\boxed{x=-4}$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$$

$y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \geq 4\cdot 3^{81} + 1$

$y < 85 + 3^{81}\cdot x - x$

$3^x + 4\cdot 3^{81} \leq y < 85 + 3^{81}\cdot x - x$

$x \neq 1$

$x = 4$: $3^x + 4\cdot 3^{81} \vee 85 + 3^{81}\cdot 4 - x$

3^4

р-бо 85 81 $\varnothing$

$x = 5$: $3^5 + 4\cdot 3^{81} \leq y < 85 + 3^{81}\cdot 5 - 5$

$0 \leq y < 85 + 3^{81}\cdot x - x - 3^x - 4\cdot 3^{81} =$

$= 3^{81}(x-4) + 85 - x - 3^x$

$y \in \mathbb{N}_0 \leq y < 3^{81}(x-4) + 85 - x - 3^x$

$(3^{81}(x-4) + 85 - x - 3^x)' =$

$= 3^{81} - 1 - 3^x \cdot \ln 3 = 0$

$3^{81} - 1 = 3^x \cdot \ln 3$

одн корень

$26 \times 13 = 78$

$+ 26$

338

$625 \times 5 = 3125$

625×27

4375

$+ 1250$

16875

$+ 2187$

$+ 6250$

$43 75$

4 места

2 карточки

$9 \cdot 3^3$

$9 \cdot 3 + 1$

$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\cdot 3}{2} = 6$

1100

1010

1001

0110

0011

0101

40×4

$\times 16$

240

160

640

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$

все 5 кн поставлены

$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 2\cdot 5 = 70$

поставить 5ку

5 5 5 5

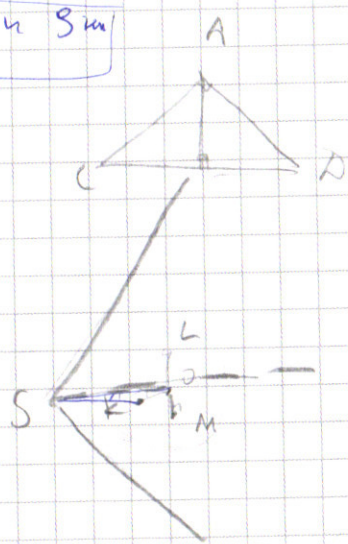
1. 4 5кн 3 3кн и вычеркнуть

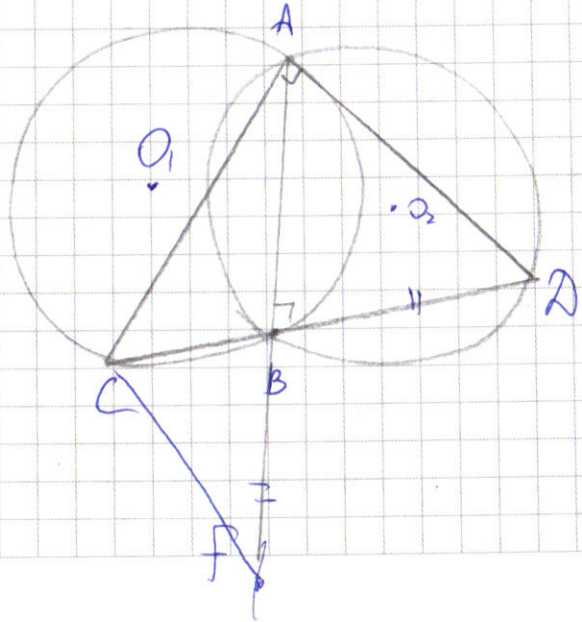
2. 4 5кн 2 1кн 3кн и 3кн

1. $C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1$

2. $C_8^4 \cdot C_4^2 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1$

ОБ-триссектр. ТУ





СР

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)