МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 Заметим, что $16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$. Следовательно, восьмизначное число должно состоять из четырёх 5, трёх 3 и одной единицы. Количество размещений 4 пятёрок по 8 местам $A_8^4 = \frac{8!}{(8-4)!} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$. Кол-во размещений 3 по 8 местам: $A_8^3 = 6\cdot 7\cdot 8$

1 $A_8^1 = 8$. Тогда полное кол-во таких чисел: $N = A_8^1 \cdot A_8^3 \cdot A_8^4 = 4435640$

Ответ: 4435640

N2 $\underbrace{\cos 7x + \cos 3x}_{2\cos 5x \cdot \cos 2x} - \sqrt{2}\underbrace{\cos 10x}_{\cos^2 5x - \sin^2 5x} = \underbrace{\sin 7x + \sin 3x}_{2\sin 5x \cos 2x}$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0 \quad |:\sqrt{2}$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - (\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$

$\cos 5x - \sin 5x = 0$ / $\sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$\operatorname{tg} 5x = 1$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in N$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k, k \in N$

$\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}(\sin(5x + \pi/4)) = 0$

$\sin(5x + \pi/4) = \cos 2x$

$\cos a = \sin a$, когда $a = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ / $a = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$

$\Rightarrow$ 1) $5x + \pi/4 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{5}, k \in Z$

$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ $\quad x = \frac{\pi(1+8n)}{8}, n \in Z$

$16k = 5 + 40n$ ← невозможно при целых k и n

$\Rightarrow$ решений в данном случае нет

2) $5x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$

$2x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi y, y \in Z$

$x = \frac{(2m-1)}{5}\pi$ $\quad 40y - 16m = 7$

$x = \frac{\pi(8y-3)}{8}$ ← невозможно при целых y и m

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k, k \in N$

N3 $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$

(2) $x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{(y+4) \pm \sqrt{y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y}}{2}$

см. стр. 2

$x = \frac{y+4 \pm \sqrt{9y^2-24y+16}}{2}$ $\quad \{ 9y^2-24y+16 = (3y)^2-(3\cdot4\cdot2)y+4^2 = (3y-4)^2$

$x = \frac{y+4 \pm |3y-4|}{2}$

~~$y \geq 4/3$~~ $\qquad$ ~~$y < 4/3$~~

$x = 2y \; / \; x = 4-y$

(1) Заметим, что $y > 0$ т.к логарифм можно брать из положительных чисел.

Тогда $x < 0$, т.к. есть выражение $\lg(-xy)$ и $y > 0$.

Но такое возможно только в том случае, когда $x = 4-y$. Тогда система примет след. вид:

$$\begin{cases} 4-y = x \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4-y = x \\ y > 4 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x\cdot y)} \end{cases}$$

Преобразуем (1): $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)+\lg y}$

$$\left(\frac{(-x)^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

Такое возможно, если $\lg y = \lg(-x)$ и $\frac{(-x)^3}{y^2} = -x$, т.е. $y = -x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-y = x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow 4 = 0 \Leftrightarrow \varnothing$

Ответ: $\varnothing$

№7 $\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$

Исходя из данной системы очевидно, что $3^x + 4\cdot3^{81} < 85 + (3^{81}-1)x$

Определим, при каких x данное н-во верно:

$$4\cdot3^{81} - 3^{81}\cdot x < 85 - x - 3^x$$

$$3^{81}(4-x) < 85 - x - 3^x$$

3^{81} - большое число $\Leftrightarrow$ нижний предел x можно найти, воспользовавшись тем, что $3^{81}(4-x) < 0$ это будет при $x = 5$ (при $x=4$ $0<0$ ← неверно).

см. стр. 3

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём теперь такое x, при кот. $3^x+4\cdot3^{81} \geq 85+(3^{81}-1)x$.

Очевидно, что это будет при x близких к 81. Тогда заменим x на $81+a$.

и получим:

$$3^{81}(4-81-a) \geq 4-a-3^{81+a}$$

$$-3^{81}(77+a) > 4-a-3^a\cdot3^{81} \quad (-1)$$

$$3^{81}(77+a-3^a) < 4-a$$

Если $a=4$, то $3^{81}(81-81)<0$

$0<0$ - неверно

Если $a=5$, то $3^{81}(82-3^5)<-1$ - верно.

$\Rightarrow$ верхний предел $x=81+4=85$

При $x=5$ значения y лежат в промежутке $[243+4\cdot3^{81}; 80+5\cdot3^{81})$, т.е.

Всего будут существовать $3^{81}+80-243=3^{81}-163$ целых значений y.

При $x=6$ таких значений $2\cdot3^{81}+79-3^6$

. . . . .

до $x=85$ при данном значении целых y будет $\cancel{85}+85\cdot3^{81}-\cancel{85}-3^{85}-4\cdot3^{81}=$

$=85\cdot3^{81}-3^4\cdot3^{81}-4\cdot3^{81}=0$

Тогда полное кол-во пар $\sum_{i=1}^{84} i\cdot3^{81}+\sum_{i=1}^{80} i-\sum_{i=1}^{84}3^i=\frac{84\cdot83}{2}\cdot3^{81}+\frac{80\cdot79}{2}-\sum_{i=1}^{84}3^i=$

$=3486\cdot3^{81}+3160-\sum_{i=1}^{84}3^i$

Ответ: $3486\cdot3^{81}+3160-\sum_{i=1}^{84}3^i$

№6 Д-но: 2окр-ти; $R=13$ $\angle CAD=90^\circ$; $BF=BD$; $B\in CD$.

Опр-ть: а) CF-?

б) S_{ACF}-? ($BC=10$)

см стр. 4

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

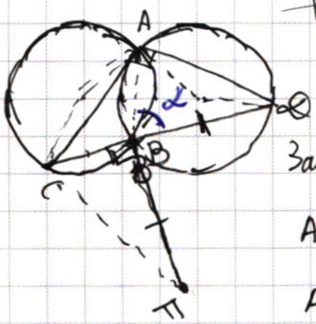


Рис: Очевидно, что $CF=\sqrt{CB^2+BF^2}=\sqrt{CB^2+BD^2}$ (по т. Пифагора из $\triangle CBF$ (BF - перпендикуляр к CD) и

Заметим также, что $CD^2=AC^2+BD^2$, но

$$AC^2=AB^2+BC^2+2BC\cdot AB\cdot\cos\alpha$$

$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos\alpha$$

$\Rightarrow CD^2=2AB^2+BC^2+BD^2$

но $CD^2=BC^2+BD^2+2BC\cdot BD$ $\Rightarrow$ $AB^2=BC\cdot BD$, но тогда AB - высота прямоуг. тр-ка ADC ($\angle A=90^\circ$) опущенная из вершины прямого угла к гипотенузе.

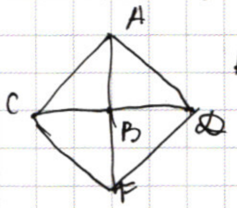
Тогда ~~точка~~ $A\in BF$.

$AD=R\sqrt{2(1-\cos2\alpha)}$; $AC=R\sqrt{2(1-\cos(360^\circ-2(180^\circ-\alpha)))}=R\sqrt{2(1-\cos2\alpha)}$

т.е. $AD=AC$ и $\triangle CAD$ - прямоугольный р/б., тогда $CB=CD=AB$

и $CF=\sqrt{2}AB$, а AB определяется в зависимости от угла β, под кот. её видно из центров окружностей, т.е. $CF=\sqrt{2}R\sqrt{2(1-\cos\beta)}=R\sqrt{(1-\cos\beta)}=13\sqrt{1-\cos\beta}$

Исходя из выше переписанного можно заметить, что $\triangle ACF$ - прямоугольный,



~~причём~~ тогда $S_{ACF}=\frac{AC\cdot CF}{2}=\frac{CF^2}{2}=AB^2$, но $AB=BC=CD$

$\Rightarrow$ $S_{ACF}=100$

Ответ: а) $CF=\sqrt{2}AB=13\sqrt{1-\cos\beta}$, где β - угол, под кот. видно AB из центров окружностей.

б) 100.

№5 $\begin{cases}|x-6-y|+|x-6+y|=12 & (1)\\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a & (2)\end{cases}$

График (1) - ~~окр~~ квадрат с центром в точке $(6;0)$ и диагональю 12.

График (2) - 4 окружности с центрами в точках $(6,8)$; $(-6;8)$; $(-6;-8)$; $(6;-8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

~~Изо~~ Изобразим всё на одном графике.

Очевидно, что два решения будут тогда, когда $\sqrt{a}=2$

$\Rightarrow$ $a=4$

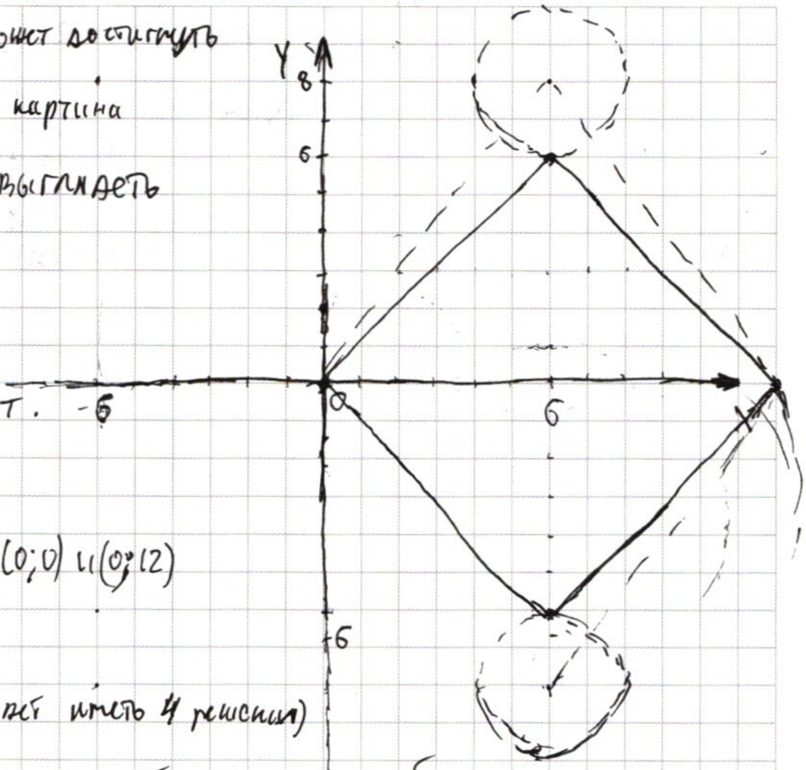
см. стр. 5

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При росте радиуса ~~число~~ число решений может достигнуть 4. (До $R=6$ $a=36$). После этого картина изменится, т.е. окр-ти будут выглядеть примерно след. образом



Тогда предельным случаем, при кот. система будет иметь 2 решения,

$R=\sqrt{64+36}=10$ (Решения будут $(0;0)$ и $(0;12)$)

, т.е. при $a=100$

, т.е. при $a\in(4;100)$ система будет иметь 4 решения)

при $a\in(0;4)\cup(100;+\infty)$ система не будет иметь решений

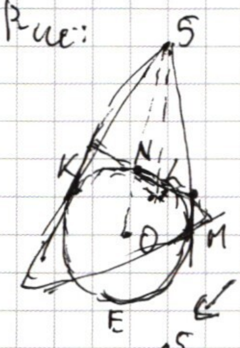
при $a=4;100$ система будет иметь 2 решения.

Ответ: 4;100.

N5: Д-но: $S_1=4$; $S_2=9$; сфера $(O;R)$ вписана в трёхгранный угол с вершиной S. Площади сечений трёхгран. угла плоскостями, кас. сферой и $\perp SO$ и SO.

Опр-ть: $\angle KSO$ — ?

Реш:



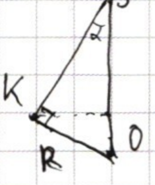
~~Очевидно, что~~ Пусть точки M и E принадлежат данным сечениям, тогда

$$\frac{SN}{SE}=\frac{SN}{SN+2R}=\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{1/2}$$ (т.к. при этом получаются подобные пирамиды)

Тогда $3SN=2SN+4R \Rightarrow SN=4R$, где R — радиус сферы.

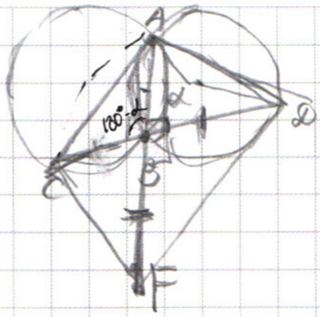
Заметим, что $\angle KSO=\arcsin\left(\frac{R}{SO}\right)=\arcsin\left(\frac{R}{4R+R}\right)=\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$

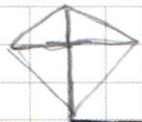
Тогда все данные точки будут ~~находиться~~ образовывать пирамиду (K,L,M)



с высотой $h=SK\cdot\cos\alpha=SO\cdot\cos^2\alpha=\frac{SO\cdot 24}{25}=\frac{24}{5}R$. Данные пирамиды подобны $\Rightarrow$ ~~Тогда~~ $\left(\frac{SN}{h}\right)^2=\frac{4}{S} \Rightarrow S=\left(\frac{24R}{5\cdot 4R}\right)^2\cdot 4=\frac{36}{25}\cdot 4=\frac{144}{25}=5\frac{19}{25}=5{,}76$

Ответ: $\angle KSO=\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$; $S=5{,}76$





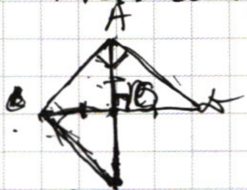
$AD = R\sqrt{2(1-\cos(2\alpha))}$

$\cancel{AC = R\sqrt{2(1-\cos\ldots)}}$

$AC = R\sqrt{2(1-\cos(360^\circ-360^\circ+2\alpha))} = R\sqrt{2(1-\cos(2\alpha))}$

$\cancel{AD +}$ $AD = AC = R\sqrt{2(1-\cos 2\alpha)}$

$CD =$



$S_{ABC} = \cancel{BC}\cdot\frac{AC\cdot CF}{2} = \frac{CF^2}{2}$, но $CF = \sqrt{2}AB$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$AD = BD^2 + B$~~

№6 Дано: $R=13$; $A \in B$ - точки пересечения $\Gamma B \in CD$; $\angle CAD = 90°$; $BF = BD$

Н-ти: а) CF - ?

б) $BC = 10$

$S \triangle CF$ - ?

2α

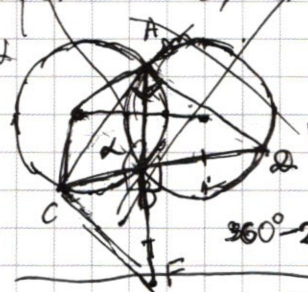
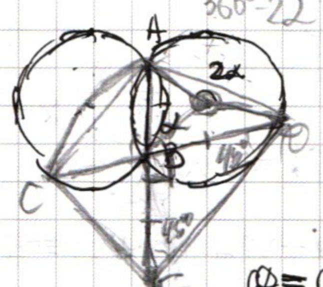


Рис. Оч. $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2}$

$360° - 2\alpha$ AC



$360° - 2\alpha$

$CD = CB + BD$

$CD^2 = AC^2 + BD^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC AB \cdot \cos 2$

~~$x \leq 5$ $x \in \mathbb{Z}$~~

$x = 5$

$-3^{81} < 80 - 3^5$ верно

$BD^2 = AB^2 + BD^2 + 2BD AB \cos 2$

$CD^2 = 2AB^2 + BD^2 + BC^2$

$2BC + BD = 2AB^2$

$BC \cdot BD = AB^2$

17 $\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81} x - x$

$3^{81}(4 - x) < 85 - x - 3^x$

$y \in [3^x + 4 \cdot 3^{81}; 85 + (3^{81} - 1)x)$

Если $x = 4$, то $0 < 81 - 3^4$ ($3^4 = 81$)

$0 < 0$ ← неверно

$\Delta y = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = 85 - x + 3^{81}(x - 4) - 3^x$

~~Найдём предел X~~

Найдём конечное значение X $3^{81}(4 - x) > 85 - x - 3^x$

пусть $x \geq 81$, тогда представим X в виде $x = a + 81$. Тогда $a > 0$

$3^{81}(-77 - a) > 4 - a - 3^{81+a}$

$-77 \cdot 3^{81} - a \cdot 3^{81}$

$77 \cdot 3^{81} + 3^{81} a < 4 - a - 3^{81} \cdot 3^a$

$3^{81}(77 + a + 3^a) < 4 - a$

$3^{81}(-77 - a) < 4 - a - 3^{81+a}$

$3^{81}(77 + a) > a - 4 + 3^{81} \cdot 3^a$

$-3^{81}(77 + a) > 4 - a - 3^{81+a}$ $|(-1)$

$3^{81}(77 + a) < a - 4 + 3^{81} \cdot 3^a$

$3^{81}(77 + a - 3^a) < a - 4$

Оч. что при маленьких a данное н-во неверно, т.к. надо, чтобы

$(77 + a - 3^a) < 0$

$3^4 = 81$ $a = 4$ ~~$a = 5$~~

$81 - 81 = 0$ $a \geq 5$

Нач. с $a = 5$ данное н-во справедливо

$\Leftrightarrow$ $x \in [5; 81 + 4] = [5; 85]$

$3^5 = 81 \cdot 3 = 243$

при $x = 5$

$y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81}$

$y < 85 + 5 \cdot 3^{81} - 5$

$\Delta y = 85 + 5 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} - 5 + 3^5 =$

$= 80 + 3^5 + 3^{81} = 322 + 3^{81}$

при $x = 85$

$y \geq 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81}$ ($3^{85} = 3^4 \cdot 3^{81}$)

$y < 85 + 85 \cdot 3^{81} - 5 = 79$

$y = 6$:

~~$3^6 + 4 \cdot 3^{81}$~~

$79 + 6 \cdot 3^{81} - 3^6 + 4 \cdot 3^{81} = 2 \cdot 3^{81} + 79 - 3^6 =$

$\times \begin{array}{r} 83 \\ 42 \\ \hline 166 \\ +332 \\ \hline 3486 \end{array}$

~~40~~ $79 \times 40 = 3160$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$

$5x+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}+2\pi k$ / $5x+\frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in k$

$2x = \frac{\pi}{4}+2\pi n$ / $2x = -\frac{3\pi}{4}+2\pi z,\ z\in k$

$5x = \pi+2\pi m = \pi(2m-1)$

$x = \frac{(2m-1)\pi}{5}$

$x = \frac{2\pi k}{5}$

$x = -\frac{3\pi}{8}+\pi z,\ z\in k$

$x = \frac{\pi}{8}+\pi n = \frac{\pi(1+8n)}{8}$

$x = \frac{\pi(8z-3)}{8},\ z\in k$

$16k = 5+40n.$

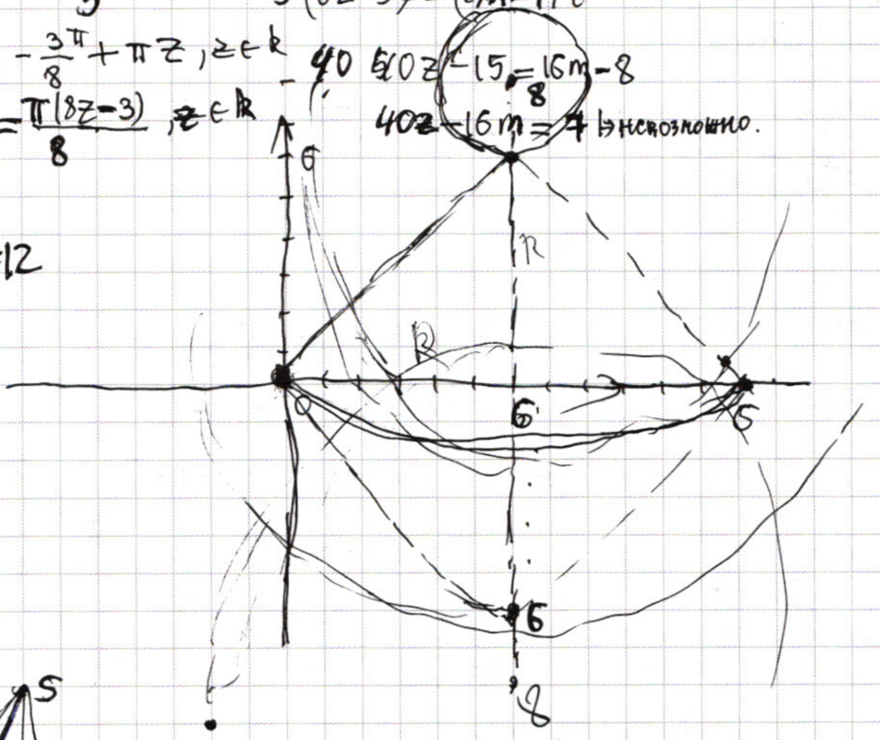
$5(8z-3) = (2m-1)\cdot 8$

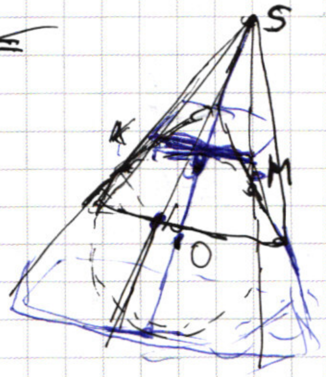
$40z-15 = 16m-8$

$40z-16m = 7$ ⇒ невозможно.

(1) $|a-y|+|a+y| = 12$

ВСК: $x=6$





$\frac{SM}{SK}$ $\left(\frac{SM}{SM+2R}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$\frac{SM}{SM+2R} = \frac{2}{3}$

$3SM = 2SM+4R$

$SM = 4R$

$\times\frac{36}{4}$ 144

$\times\frac{19}{4}$ 76

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2\cos 10x \cos 4x$ $\quad \sin 7x + \sin 3x = 2\sin 10x \cdot \cos 4x$

$\cos 10x\,(2\cos 4x - \sqrt{2}) = 2\sin 10x \cdot \cos 4x$

$x = \frac{\pi}{4}$, тогда $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2\cos 5x \cos 2x \quad \sin 7x + \sin 3x = 2\sin 5x \cos 2x$ $\quad \sqrt{2}\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos 2x$

$2\cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$ $\quad \sqrt{2}\left(\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 2x\right) = 0$

$\cos^2 5x - \sin^2 5x$ $\quad 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$

$2\cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x = 2\sin 5x \cos 2x - \sqrt{2}\sin^2 5x$ $\quad x = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$ $\quad \frac{2\pi n}{5} = \frac{\pi}{8} + \pi k$

$\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$

$\cos 5x - \sin 5x = 0 \;|: \cos 5x \neq 0$ $\quad \sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$1 = \operatorname{tg} 5x$ $\quad \cos 5x = \cos(3x + 2x) = \cos 2x \cos 3x - \sin 2x \sin 3x$

$\sin 5x = \sin(3x + 2x) = \sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in N$ $\quad \sqrt{2}\cos 2x - (\cos 2x(\cos 3x + \sin 3x) + \sin 2x(\cos 3x - \sin 3x))$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k, k \in N$

№1. 16875 – произведение 8-ми чисел. Очевидно, что оно кратно 5, кратно 3/9

$1+6+8+7+5 = 14+13 = 27$ $\quad 16875 : 5 = 3375$ $\quad 5 \cdot 3375 = 5 \cdot 3 \cdot 1125 = 5^2 \cdot 3 \cdot 225 = 5^3 \cdot 3 \cdot 45 = 5^4 \cdot 3^3$

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$ $\Rightarrow$ 8-ми значные цифры будут состоять из цифр 5; 3; 1, причём

1-ца будет встречаться 1 раз; 3 три раза, 5 – 4 раза. Тогда данные числа будут

образовываться перестановками 5, 3 и 1.

$56 \cdot 6 = 336$ $\quad 336^2$ $\quad 10^8 - 1 - 10^7$

$A_8^4 = \frac{8!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336 \cdot 5$ $\quad A_8^1 = 8$ $\quad A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8$

$336 \times 336 = 2016 + 1008 + 1008 = 112896$ $\quad 10^7(10-1) - 1 = 10^7 \cdot 9 - 1$

Все ~~данные~~ Это должно быть одновременно. $\Rightarrow 5 \cdot 6^2 \cdot 7^2 \cdot 8^2$

$112896 \times 5 = 564480$

$564480 \times 8 = 4435640$

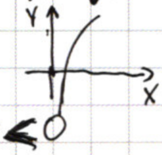
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№3 $\begin{cases} \left(\dfrac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$

(1) $\dfrac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg(-x\cdot y)}$

$\lg(-x\cdot y) = \lg(-x) + \lg y$



$\dfrac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$

$(-) \; x < 0 \quad y > 0$

$\left(\dfrac{x^4}{y^2(-x)}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$

$\left(\dfrac{(-x)^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$

(2) $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$

$y_{1,2} = \dfrac{(x+8) \pm \sqrt{x^2+16x+64+8x^2+32x}}{4}$

$x^2 + (y+4)x + 8y - 2y^2 = 0 \quad 9y^2 - 24y + 16$

$x^2 + (y+4)x + 2y(4-y) = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{(y+4) \pm \sqrt{y^2+8y+16+8y^2-32y}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{y+4 \pm \sqrt{(3y-4)^2}}{2}$

$x = \dfrac{y+4+3y-4}{2} = 2y$

$x = \dfrac{-2y+8}{2} = 4-y$

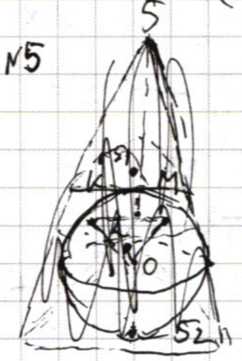
$(-)$ согласно усл.(1)

$x = 4 - y \quad y > 4$

$\left(\dfrac{(-x)^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$ $\quad$ $\cancel{\lg(-x)}$ $\quad$ $10^{...} = (-x)$

$\left(\dfrac{(y-4)^3}{y^2}\right)^{\lg y} = (y-4)^{\lg(y-4)}$

№5



Д-по: сферы ~~с центром~~ впис. в трёхгранный угол $S_1=4$; $S_2=9$

Н-ти: $\angle KSO$; Sсеч.-?

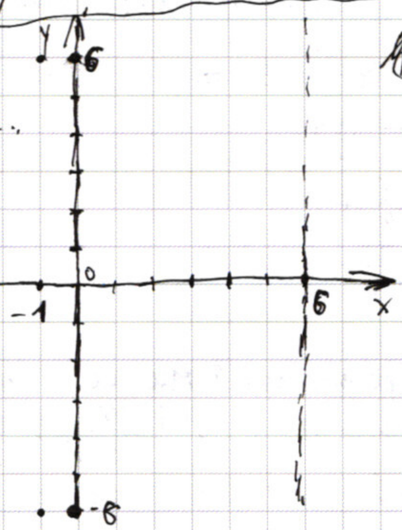
№5 $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

~~$|a-y| + |a+y| = 12$~~ $\quad |a-y| + |a+y| = 12$

$|(x-6)-y| + |(x-6)+y| = 12$

$-5+6 \quad -5-6$



$x=1$

$-4-y \quad -4+y$

~~$y=8$~~

~~$|x+y-6|$~~

$|x-y-6|$

№5