МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра

Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\cos(7x)+\cos(3x)-\sqrt{2}\cos(10x)=\sin 7x+\sin 3x$$

$$2\cos(5x)\cos(2x)-\sqrt{2}\left(\cos^2(5x)-\sin^2(5x)\right)=2\sin(5x)\cos(2x)$$

$$2\cos(2x)\left(\cos(5x)-\sin(5x)\right)-\sqrt{2}\left(\cos(5x)-\sin(5x)\right)\left(\cos(5x)+\sin(5x)\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 5x-\sin 5x=0\\ 2\cos(2x)=\sqrt{2}\left(\cos(5x)+\sin 5x\right)\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}(5x)=1 \quad (\text{т.к. } \cos(5x)\neq 0)\\ \cos(2x)=\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}5x=\frac{\pi}{4}+\pi n\\ 5x-\frac{\pi}{4}+2x=2\pi n\\ 5x-\frac{\pi}{4}-2x=2\pi n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z} \qquad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n\\ x=\frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}n\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}n\end{array}\right.,\ n\in\mathbb{Z}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}n;\ \frac{\pi}{28}+\frac{2\pi}{7}n;\ \frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}n,\ n\in\mathbb{Z}$.

№3

$$\begin{cases}\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(-x)^{\lg(-xy)}\\ 2y^2-xy-x^2-4x-8y=0\end{cases}$$

$-x=t,\ t>0.$

$$\begin{cases}\left(\frac{t^2}{y}\right)^{2\lg y}=t^{\lg(ty)}\\ 2y^2+ty-t^2+4t-8y=0 \ (1)\end{cases}$$

(1) $2y^2+ty-t^2+4t-8y=0$

$4(t-2y)+2y^2-ty-t^2+2ty=0$

$(t-2y)(4-y-t)=0 \qquad \left[\begin{array}{l}t=2y\ (I)\\ t=4-y\ (II)\end{array}\right.$

I $\left(\frac{4y^2}{y}\right)^{2\lg y}=(2y)^{\lg(2y^2)}$

$(4y)^{2\lg y}=(2y)^{\lg(2y^2)}$

$16^{\lg y}\cdot y^{\lg y^2}=(2y)^{\lg(2y^2)}$

$y^{\lg(y^2\cdot 16)}=2y^{\lg(2y^2)}$

$\lg(y^2\cdot 16)=\lg(2y^2)(\log_y 2+1)$

$4\lg 2+\lg y^2=\lg 2+\lg y^2+\log_y 2\cdot\lg 2+\log_y 2\cdot\lg y^2$

$3\lg 2=\log_y 2\lg 2+\lg 2\cdot 2$

$\log_y 2 = 1$

$\begin{cases} y = 2 \\ t = 4 \end{cases}$

II $t = 4 - y$

$$\left(\frac{(y-4)^2}{y}\right)^{\lg y^2} = (4-y)^{\lg((4-y)y)}$$

$$(4-y)^{4\lg y}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^{\lg y^2} = (4-y)^{\lg(4-y)+\lg y} \quad : (4-y)^{\lg y} \ (\text{т.к. } (4-y)^{\lg y} \neq 0)$$

$$(4-y)^{3\lg y}\cdot \frac{1}{y}^{\lg y^2} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$(4-y)^{3\lg y}\cdot (4-y)^{-\log_{(4-y)} y\cdot \lg y^2} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\left[\begin{aligned} &4-y = 1 \\ &3\lg y - \log_{(4-y)} y \cdot \lg y^2 = \lg(4-y) \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &y = 3 \\ &3\lg y - \frac{2\lg^2 y}{\lg(4-y)} = \lg(4-y) \ (*) \end{aligned}\right.$$

$(*)$ $3\lg y - \frac{2\lg^2 y}{\lg(4-y)} = \lg(4-y)$

$\lg y = a$

$\lg(4-y) = b$ $\quad 3a - \frac{2a^2}{b} = b$ (т.к. случай когда $\lg(4-y)=0$ мы рассмотрели отдельно, то домножим на b)

$2a^2 - 3ab + b^2 = 0$

$$\left[\begin{aligned} &b = a \\ &b = 2a \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &\lg y = \lg(4-y) \\ &\lg(4-y) = 2\lg y \end{aligned}\right. \qquad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &y = 4-y \\ &y^2 = 4-y \end{aligned}\right. \\ y > 0 \\ 4-y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &y = 2 \\ &y = \frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2} \end{aligned}\right. \\ y > 0 \\ y < 4 \end{cases} \qquad \left[\begin{aligned} &y = 2 \\ &y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} y = 2 \\ t = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ t = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{aligned}\right.$$

вернемся от t к x и объединим все решения.

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $(-4; 2)$; $(-2; 2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

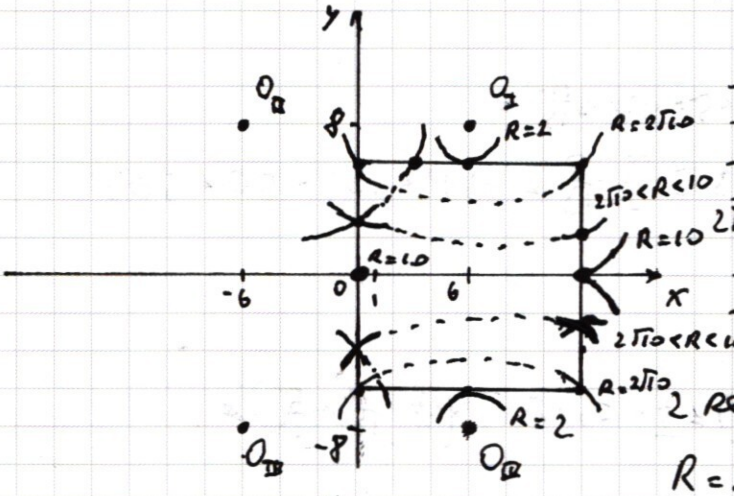
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\begin{cases}|x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a\end{cases}$

$|x-6-y|+|x-6+y|=12$ – квадрат с центром $(6;0)$, стороной 12.

$(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a$ – в первой четверти окружность $O_1(6;8)$, во II; III; IV четверти симметрия относительно ox; oy; начала координат. радиуса $\sqrt{a}$.



R	кол-во реш.
<2	0
2	2
$2<R\le 2\sqrt{10}$	4
$2\sqrt{10}<R<10$	6
10	2
>10	0

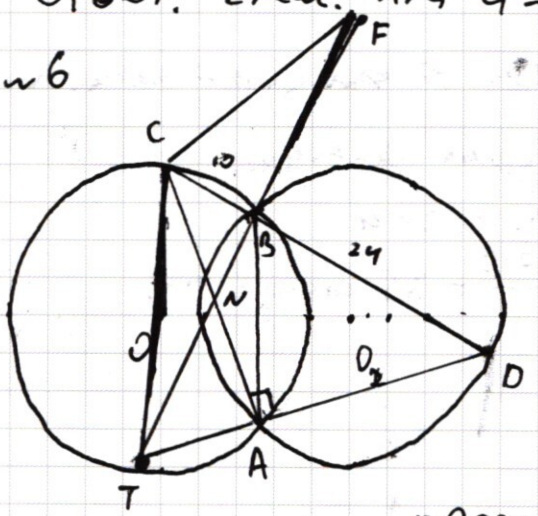
2 решения при $R=2; 10$.

$R=\sqrt{a}$

$\left[\begin{array}{l} a=4 \\ a=100 \end{array}\right.$

Ответ: 2 реш. при $a=4; 100$.

№6



Дано: окр. O_1; O_2

$R_1=R_2=13$ $\angle CAD=90°$

$BF=BD$; $BF\perp CD$

а) Найти: CF.

Решение:

$\angle ACD=\angle ADC$ (т.к. опираются на равную хорду в равных окр.)

т.к. $\angle CAD=90$ $\angle ACD=\angle ADC=45°$

продлим AD до точки T $\cup AB=90°$

$\angle CAT=180°-\angle CAD°=90°$

соединим T и B.

Р-м $\triangle TNA$ и $\triangle CNB$

$\angle C=\angle T$ (т.к. опир на $\cup AB$)

$\angle TNA=\angle CNB$ (т.к. верт.) значит $\angle NAT=\angle NBC=90°$

значит $TB\perp CD$; T, B, F лежат на одной прямой.

значит $\triangle TBO$ - прям, но при этом $\angle BTA = 45°$ (т.к. опир на $\cup AB = 90°$)
значит $TB = BO$. тогда $TB = BF$; CB - выс; мед.; $\triangle CTF$ - равнобедр.
$CT = CF = 2R = 26$

б) пусть $BC = 10$. найти S_{ACF}. $AB = \sqrt{2}R = 13\sqrt{2}$ (т.к. стягивает дугу $90°$)

$\triangle CBA$ по т. син.

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = \frac{BC}{\sin\angle CAB}$$

$$\sin\angle CAB = \frac{BC \cdot \sin\angle ACB}{AB} = \frac{5}{13}$$

$$\angle CAB = \left(180 - 45 - \arcsin\frac{5}{13}\right)$$

$\triangle ACB$ по т. cos

$$AC^2 = 100 + 338 + 10 \cdot 13\sqrt{2} \cdot \cos\left(45 + \arccos\frac{12}{13}\right) =$$

$$AC^2 = 438 + 10 \cdot 13\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} - 10 \cdot 13\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{13} = 438 + 120 - 50 = 508.$$

$$AC = \sqrt{508}$$

$$\sin\angle FCB = \frac{\sqrt{26^2 - 10^2}}{26} = \frac{12}{13}.$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot AC \cdot \sin(45° + \angle FCB) = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot \sqrt{508} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\right) =$$

$$13 \cdot \sqrt{254}\left(\frac{17}{13}\right) = 17\sqrt{254}$$

Ответ: $CF = 26$; $S_{ACF} = 17\sqrt{254}$.

№1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$ это значит, что среди 8 ~~ми~~ цифр нашего числа будет ~~8~~ 4 пятерки, три тройки, одна единица.
единицу можно поставить 8 способами, тогда пятерки можно расставить ~~8~~ $\frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5}{6} = 35$ способами.
остальные места займут тройки.
значит всего таких чисел
$35 \cdot 8 = 280$

Ответ: 280.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

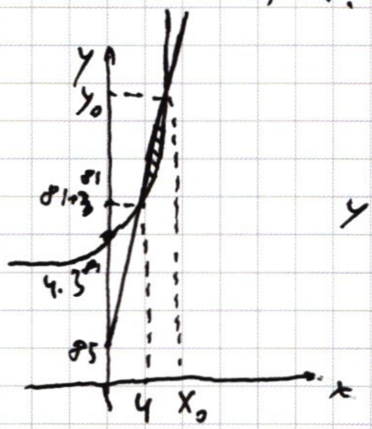
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$\begin{cases} y \ge 3^x + 4\cdot 3^{81} & \text{- степенная ф-я} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x & \text{- прямая.} \end{cases}$

схематичный график:



$81 < x_0 < 82$.

x принимает целые значения от 4 до 81.

y от $81+3^{81}$ до $81\cdot3^{81}+4$

пусть $f(x)=3^x+4\cdot3^{81}$

$g(x)=85+(3^{81}-1)x$ тогда целочисленные решения будут иметь вид $(x;y)$, где $y\in[g(x);f(x)]$

значит для x_n кол-во пар y_n будет равно $g(x)-f(x)$.

таким образом всего целочисленных решений будет:

$(5\cdot3^{81}+85-5-4\cdot3^{81}-3^5)+(6\cdot3^{81}+79-4\cdot3^{81}-3^6)+\dots$

$+\dots+(80\cdot3^{81}+5-4\cdot3^{81}-3^{80})+(81\cdot3^{81}+4-4\cdot3^{81}-3^{81})=$

$3^{81}\cdot\frac{78}{2}\cdot77+\frac{84}{2}\cdot77-3^5\cdot\frac{3^{78}-1}{3-1}=3^{81}\left(\frac{78\cdot77-1}{2}\right)+\frac{84\cdot77-3^5}{2}=$

$3^{81}\left(\frac{6006-1}{2}\right)+\frac{6468-243}{2}=3^{81}\cdot3002{,}5+3112{,}5$

Ответ: $3^{81}\cdot3002{,}5+3112{,}5$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

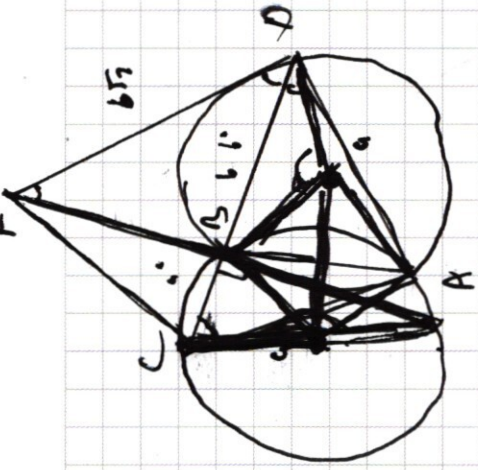
Страница №__

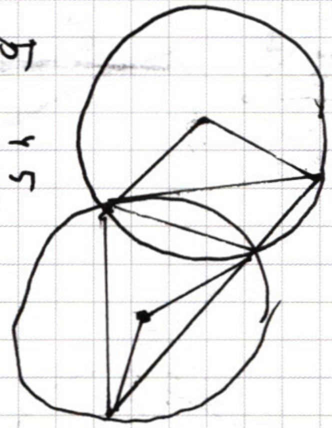
(Нумеровать только чистовики)

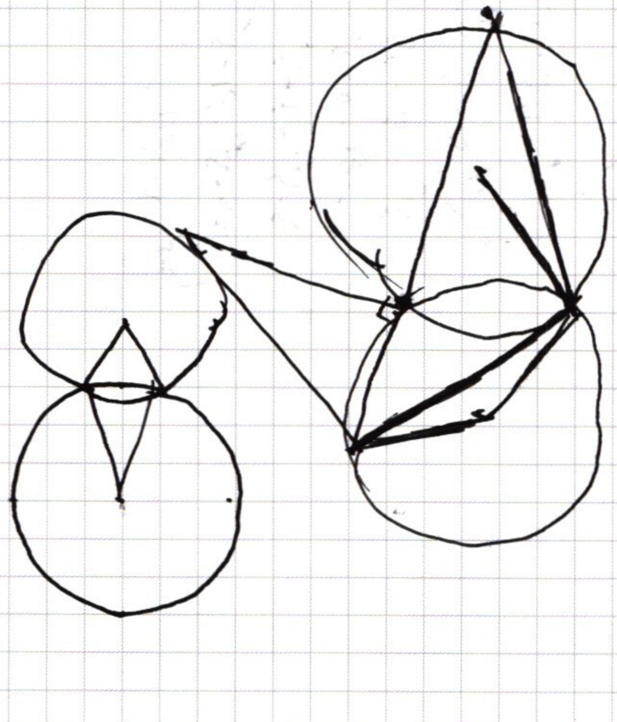
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

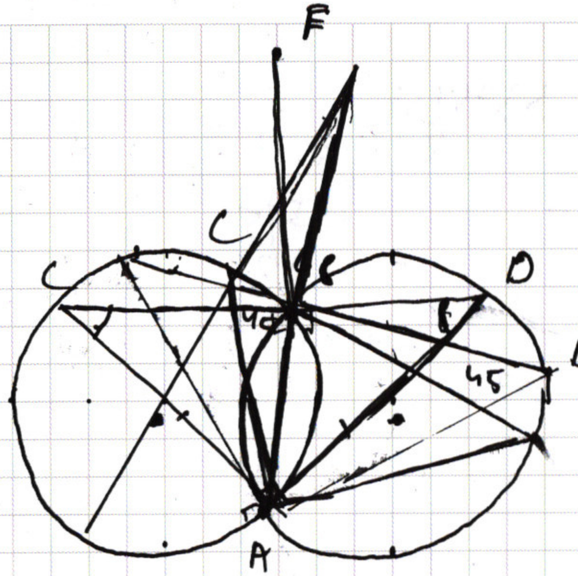
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

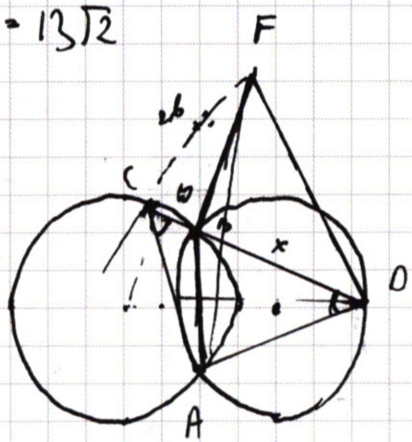


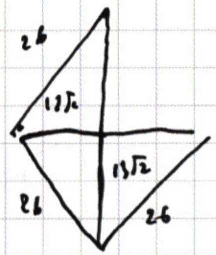






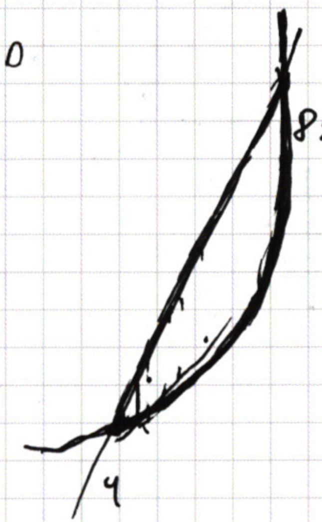
$AB = 13\sqrt{2}$





$4 \quad 81 + 4 \cdot 3^{1}$

$5 \quad 3^{5} + 4 \cdot 3^{1}$



$81 - 4$

77

$1 + (3^{81} - 1)5 - 4 \cdot 3^{81}$

$3^{81} \cdot 5 - 5 - 4 \cdot 3^{81} \cdot 3^{5}$

$3^{81} - 5 - 35$

$2 \cdot 3^{81} - 6 - 3^{6}$

$3 \cdot 3^{81} - 7 - 3^{7}$

$77 \cdot 3^{81} - 81 - 3^{81}$

$\left(\frac{78}{2} \cdot 77 \cdot 3^{81}\right) -$

$\frac{(3^{74} - 1)3^{5}}{2} =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos((5+2)x) + \cos((5-2)x) = 2\cos 5x \cos 2x$ $\quad \sin((5+2)x) + \sin((5-2)x) = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}(2\cos^2 5x - 1) = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 5x\cos 2x - 2\sin 5x\cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$\cos 5x - \sin 5x = 0$

$2\cos 2x = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)$

$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x$

$\cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$ $\quad -x = t$

$\begin{cases} \left(\frac{t^2}{y}\right)^{2\lg y} = t^{\lg t + \lg y} \\ 2y^2 + ty - t^2 + 4t - 8y = 0 \end{cases}$

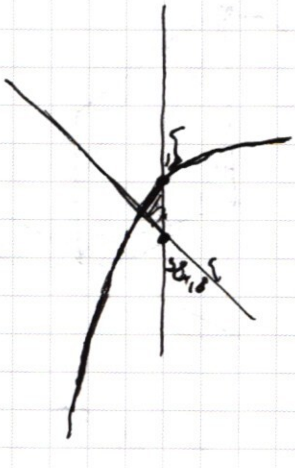
$4(t-2y) + (t-2y)y - t(t-2y) = 0$

$(t-2y)(4 - y - t) = 0$

$t = 2y$

$t = 4 - y$

$\frac{9}{5 \cdot 9t} = \frac{15 \cdot 14}{14}$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y = x - 6 \qquad y = 6 - x$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \end{cases}$$

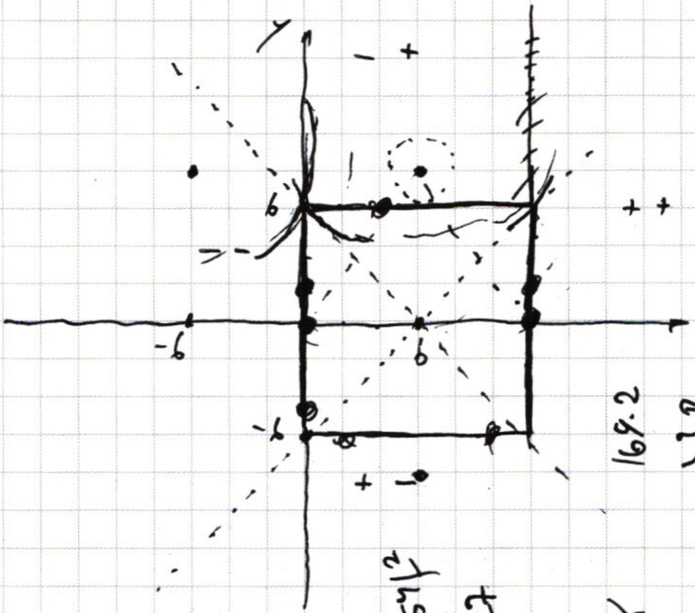
$2x - 12 = 12 \qquad x - 6 - y - x + 6 - y$

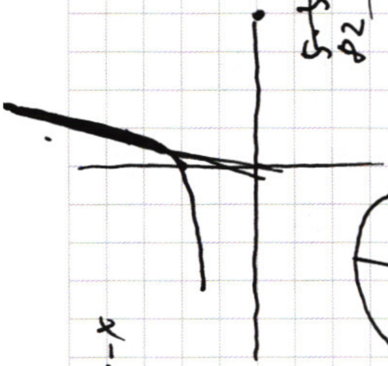
$x = 12 \qquad -y = 12$

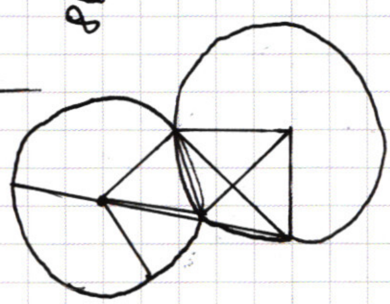
$y = -6$

$-x + 12 = 12 \qquad -x + 6 + y + x - 6 + y = 12$

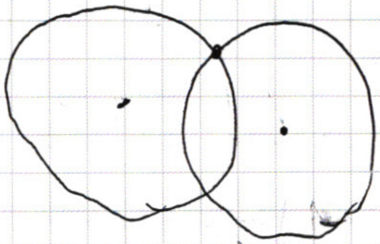
$y = 6$





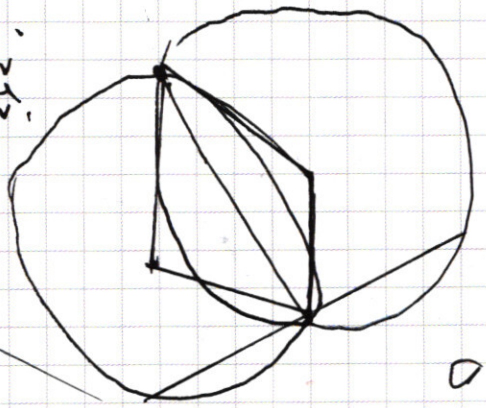


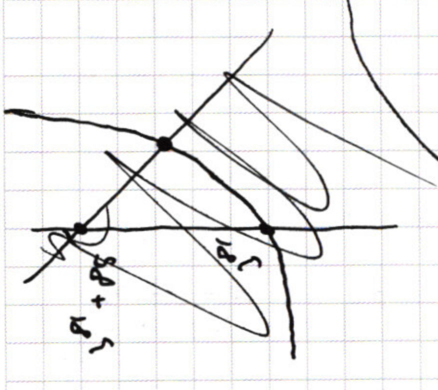
$\sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$



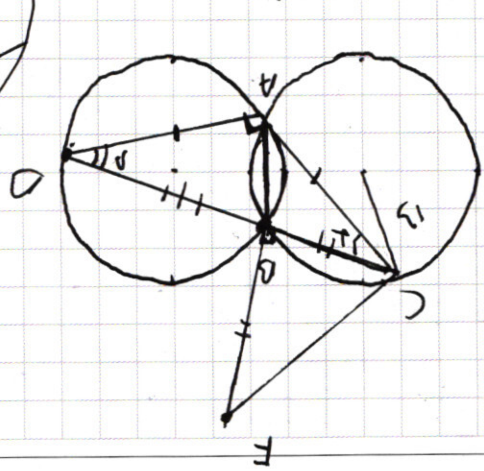
$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} x - x$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 81 + 3^{81} \end{cases}$$





$d = 180 - 1$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)