

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Разложим 76875 на множители

$$76875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 27 \cdot 25^2$$

$$25^1 = (20+5)^1 = 400 + 25 + 100 = 625$$

$$\begin{array}{r} 76875 \\ \times 25 \\ \hline 384375 \\ + 153750 \\ \hline 1921875 \end{array}$$

Заметим, что 3 и 5 - простые, то есть на множители не распадаются. Ещё заметим, что все произведения этих чисел кроме 3·3, больше 9 $\Rightarrow$ цифрой быть не могут

Также заметим, что мы можем умножить на единицу и число не изменится $\Rightarrow$ что-то произведение всех цифр числа было равно 76875, число делится на 5, значит из: $\{1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5\}$, либо $\{1; 1; 3; 5; 5; 5; 5; 9\}$

Как-то число из данных цифр = $\frac{\text{кол-во всех перестановок}}{\text{кол-во перестановок одинак. цифр.}}$

$$\text{Как-то } \textcircled{2}: \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 =$$

$$= 75 \cdot 56 = 840$$

$$\textcircled{2}: \frac{8!}{4!3!} \text{ так-то } \textcircled{1}: \frac{8!}{4!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} =$$

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 = 40 \cdot 7 = 280$$

$$\text{Всего: } 280 + 840 = 1120$$

$$\text{Ответ: } 1120$$

N2

$$\cos 7\pi + \cos 3\pi = 2 \cos \left(\frac{7\pi + 3\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{7\pi - 3\pi}{2} \right)$$

$$\sin 7\pi + \sin 3\pi = 2 \sin \left(\frac{7\pi + 3\pi}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{7\pi - 3\pi}{2} \right)$$

Продолжим:

$$2 \cos(5\pi) \cdot \cos(2\pi) - \sqrt{2} \cdot \cos(70\pi) = 2 \sin(5\pi) \cdot \cos(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos(2\pi) (\cos(5\pi) - \sin(5\pi)) - \sqrt{2} (\cos(5\pi) - \sin(5\pi)) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos(5\pi) - \sin(5\pi)) (\sqrt{2} \cos(2\pi) - (\cos(5\pi) + \sin(5\pi))) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(5\pi) = \sin(5\pi) \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \cos(2\pi) = \sin(5\pi) + \cos(5\pi) \quad (2)$$

$$(2) \text{ выразим } \cos(2\pi) \text{ из (1): } \cos(2\pi) = \frac{\sin(5\pi) + \cos(5\pi)}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos(2\pi) = \sqrt{2} \left(\sin(5\pi) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(5\pi) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2\pi) = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos(5x) = \sinh(5x)$$

$$\cos(2x) = \sinh\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi k \\ 5x = 5x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow \\ 2x = \frac{\pi}{2} - 5x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2x = \frac{\pi}{4} + 5x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ \Leftrightarrow x \\ x = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{2} \left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{7} \pi k \\ x = \frac{2}{3} \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi k \end{cases}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7} \pi k, \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi k \right\}, k \in \mathbb{Z}$

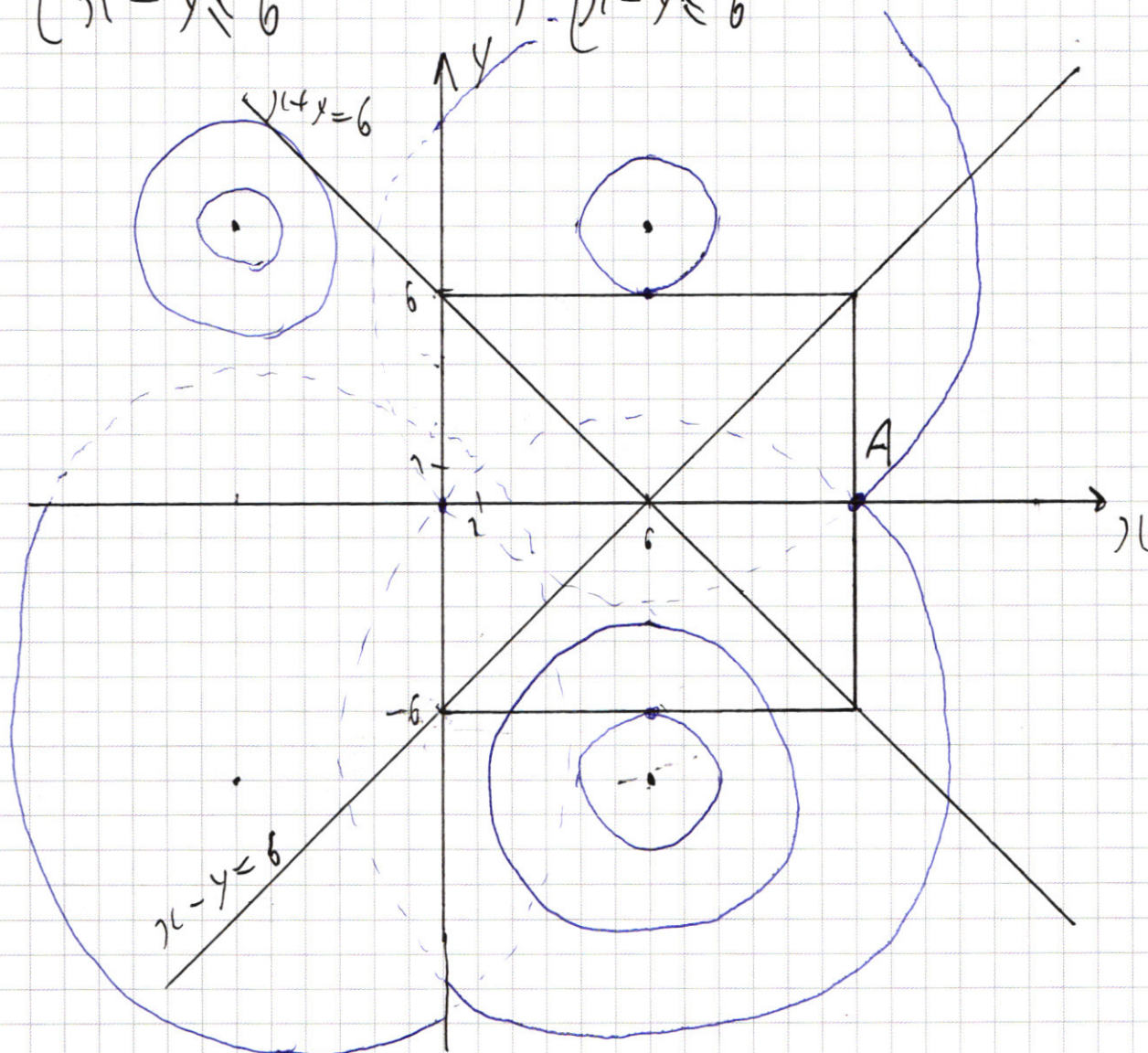
В координатах $x(y)$: $(x-6)^2 + (y-8)^2 = 9$ —
это 4 окружности (пересечения с осями
в координатах) с центрами $(6; 8), (-6; 8), (-6; -8), (6; -8)$

и радиусами $\sqrt{a}$, назовем его $\mathcal{R}$ ($a \in \mathbb{R}$)

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$\text{для } \begin{cases} x+y > 6 \\ x-y > 6 \end{cases} : x=12, \begin{cases} x+y \leq 6 \\ x-y > 6 \end{cases} : y=-6$$

$$\begin{cases} x+y \leq 6 \\ x-y \leq 6 \end{cases} : x=0, \begin{cases} x+y > 6 \\ x-y \leq 6 \end{cases} : y=+6$$



Заметим, что для $R=2$ пересечений т-
кажи нет, а при $R < 0$ т-е вообще
не имеет решений.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

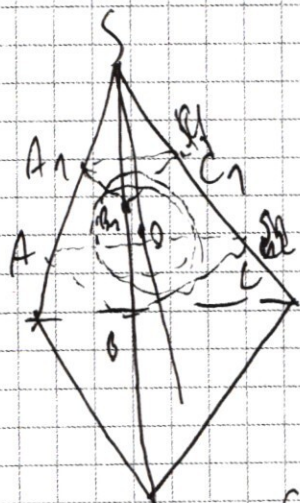
При $R \in (2; 10)$ нететный минимизм 4 (2 от вершин, 2 от центров)

При $R = 10 = \sqrt{6^2 + 8^2}$ — так точки окруж. про-
ходятся через $(12; 0)$ — снова два решения:
все окружности пересекаются в $(0; 0)$ и $(12; 0)$

Для $R > 10$ реш. не существует (н.к. $(\cdot)$ A и
ей аналогичные будут удалены от $(0; 0)$)

$$\begin{cases} R = 10 \\ R = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{100} = 10 \\ a = \sqrt{4} = 2 \end{cases}$$

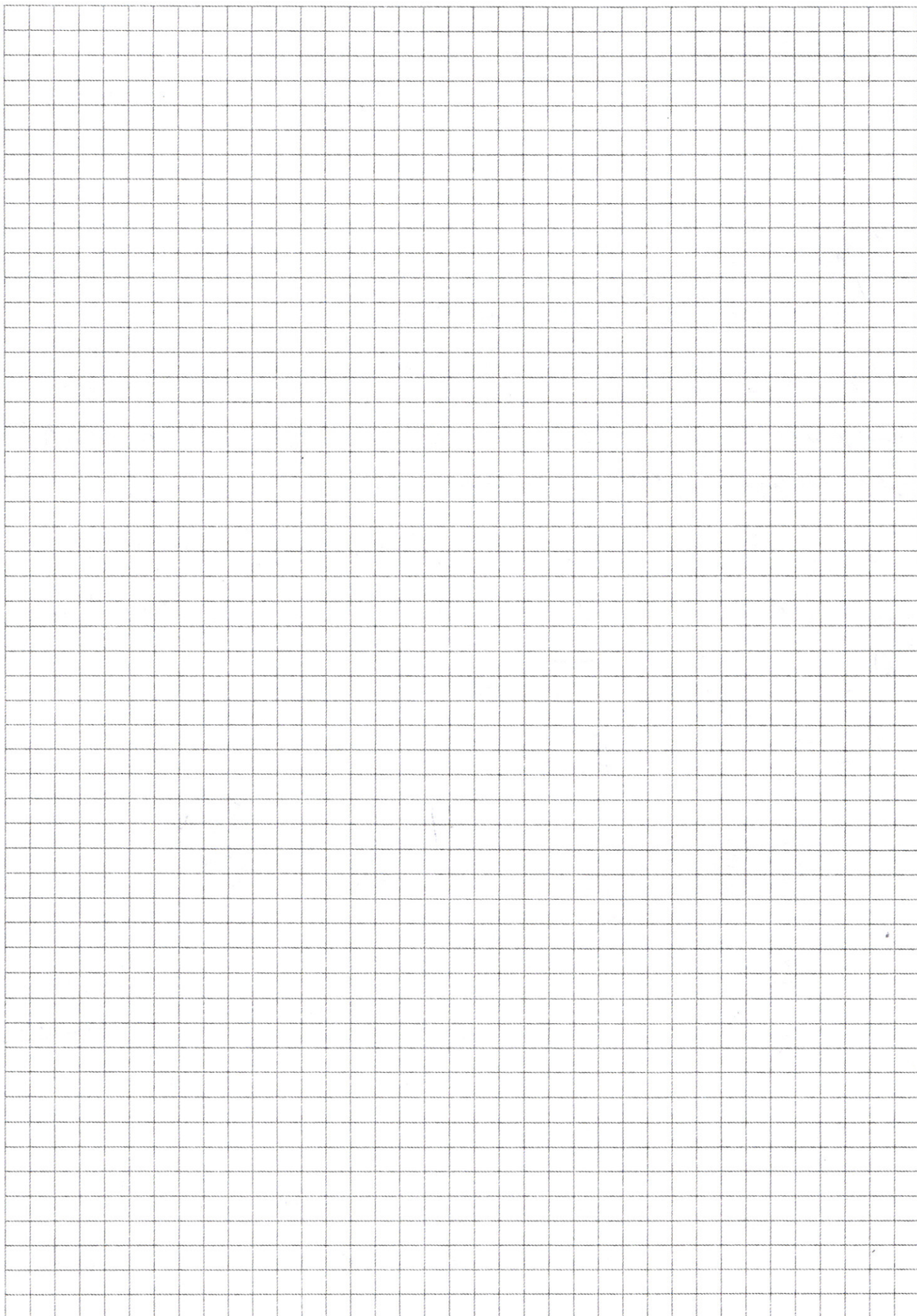
Ответ: при $a = \sqrt{4}$ и $a = \sqrt{100}$



Заметим, что площадь ~~треугольника~~ ^{треугольника}
поверхности $\sim h^2$, где h — высота
треугольника

$$S = S_0 \cos \alpha, \text{ где } \alpha = \angle KSO$$

S — площадь поверхности, S_0 — площадь проекции



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

правного угла до точек A, B, C

Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S H = \frac{1}{3} S_0 R$

Из соображений пропорциональности:

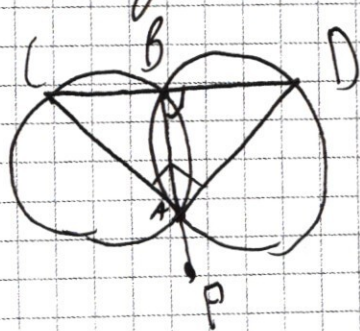
$$S_0 = (h+2R) S_1 = h^2 (S_2)$$

где S_1 и S_2 — данные площади

№ 6

Решим: $S = 5 \frac{7}{2}$
 $\angle CQS = \frac{2}{3}$

Заметим, что искомого расстояния не меняется в зависимости от расстояния м/с центрами окружностей —) можно 4-х-угольный случай



$$\begin{cases} CB^2 + AB^2 = 13^2 \\ CB = AB = BD \end{cases} \Rightarrow CB = \frac{13}{\sqrt{2}}$$

$$CF^2 = BF^2 + CB^2 = 13$$

Решим: 13

$$S = 13 \frac{13}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} - 13 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 6,5 \left(13 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \right)$$

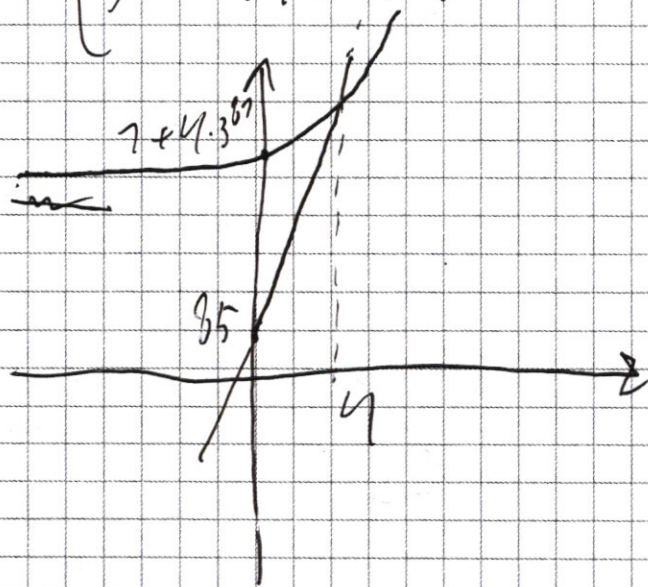
Решим: ~~$S = 6,5 \left(13 \frac{\sqrt{2}}{2} - 10 \right)$~~

№ 2

Заданым, что при $x = 4$

$$\begin{cases} y > 87 + 4 \cdot 3^{87} \\ y < 87 + 4 \cdot 3^{87} \end{cases} - \text{не существует.}$$

~~Справка~~



Ответ: $x = 30$

№ 3

$$\text{Дано: } \begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 2(y-4)^2 + (x-4)^2 - 4 \\ (x-y)^2 + y^2 - \frac{5}{4}x^2 - 4x^2 - 8y &= 0 \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{x^4}{y^4}\right) \lg(y) = \lg(-xy) \ln(-x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 7

9, 3, 5, 5, 5, 5, 7, 7

3

7, 7, 2, 2

7722
1212
2277
2727
1227
2772

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{1}}$$

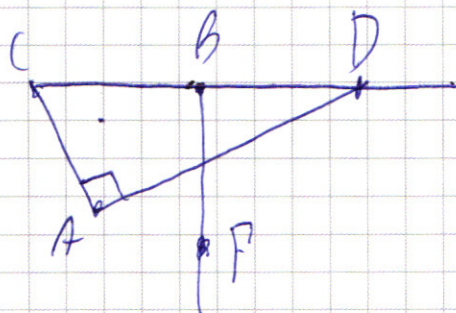
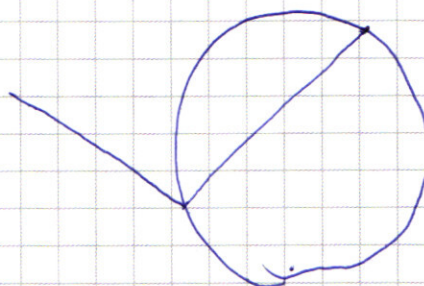
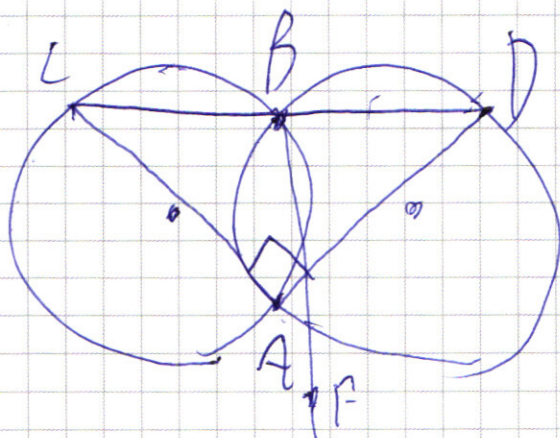
$$8 \cdot 7 \cdot 5 + 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \cancel{7 \cdot 5} \cdot 35 (1 + 24)$$

$$35 \cdot 25$$

$$\frac{35}{35} = 1$$

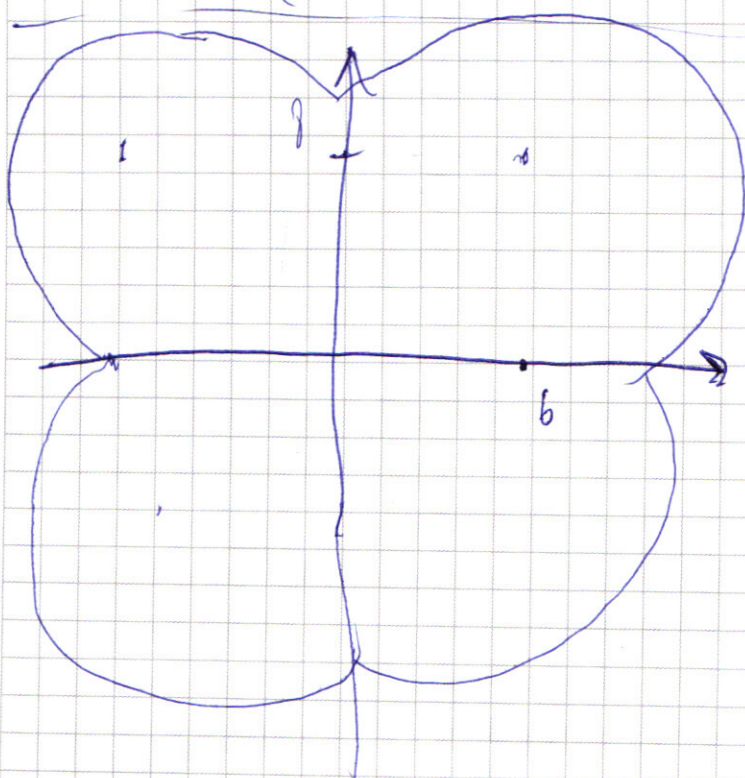
$$\begin{array}{r} 7 \\ \times 35 \\ \hline 245 \\ 2450 \\ \hline 24150 \end{array}$$

7720



$$2(x^2 - 4x + 4) - 8 - (x^2 + 4x + 4) = 4$$

$$2(x - 2)^2 - (x + 2)^2 = 4$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha - \beta = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2} \\ \beta = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \\ &= 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$(\sin 5x - \cos 5x) (2 \cos 2x) = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 15 \\ \hline 15 \\ \hline 32 \\ 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 337.5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ 17 \\ \hline 15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 735 \overline{) 5} \\ 10 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64375 \overline{) 5} \\ 34 \\ \hline 43 \\ \hline 40 \\ 35 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ 33 \\ \hline 76875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 39 \\ \hline 32 \\ 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$(29-15) = 1400 + 25 + 100$$

$$625$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 5 \\ \hline 70 \\ 135 \end{array}$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 625 \overline{) 5} \\ 735 \\ \hline 725 \\ \hline 10 \\ 7875 \\ \hline 625 \\ \hline 84375 \end{array}$$

$$16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 - 2 \sin^2(2\alpha) = \sin 4\alpha$$

$$\cos(4\alpha) = \sin(4\alpha)$$

$$y > 0, x < 0$$

$$y^2 + \frac{x^2}{4} - xy = \left(\frac{1}{2} - y\right)^2$$

$$y^2 - \frac{5}{4}x^2 - 4y = 0$$

$$y^2 - xy + \frac{x^2}{4} - \frac{5}{4}x^2 - 4y + y^2 - 8y$$

$$2 - (1 - y)^2 - 4y$$

$$x^2 - 5y + 2y = 0$$



$$b'' = e^{\frac{\ln 3}{3} \cdot 3/1}$$

$$y = y_0 + t'(1/9)(11-10)$$

$$\dot{y} = 3^{10} + 4 \cdot 3^{87} + 3^{10} \ln 3 (11-10)$$

$$y = 3^{10} + 4 \cdot 3^{87} + 3^{10} \ln 3 \cdot 11 - 3^{10} \cdot 10$$

ад-9

$$11 - 3^{87} = 3^{10} \cdot \ln 3$$

11

$$10 = \log_3 \left(\frac{3^{87} - 1}{\ln 3} \right)$$

27-3

87

$$\log_3(\ln 3)$$

9-9

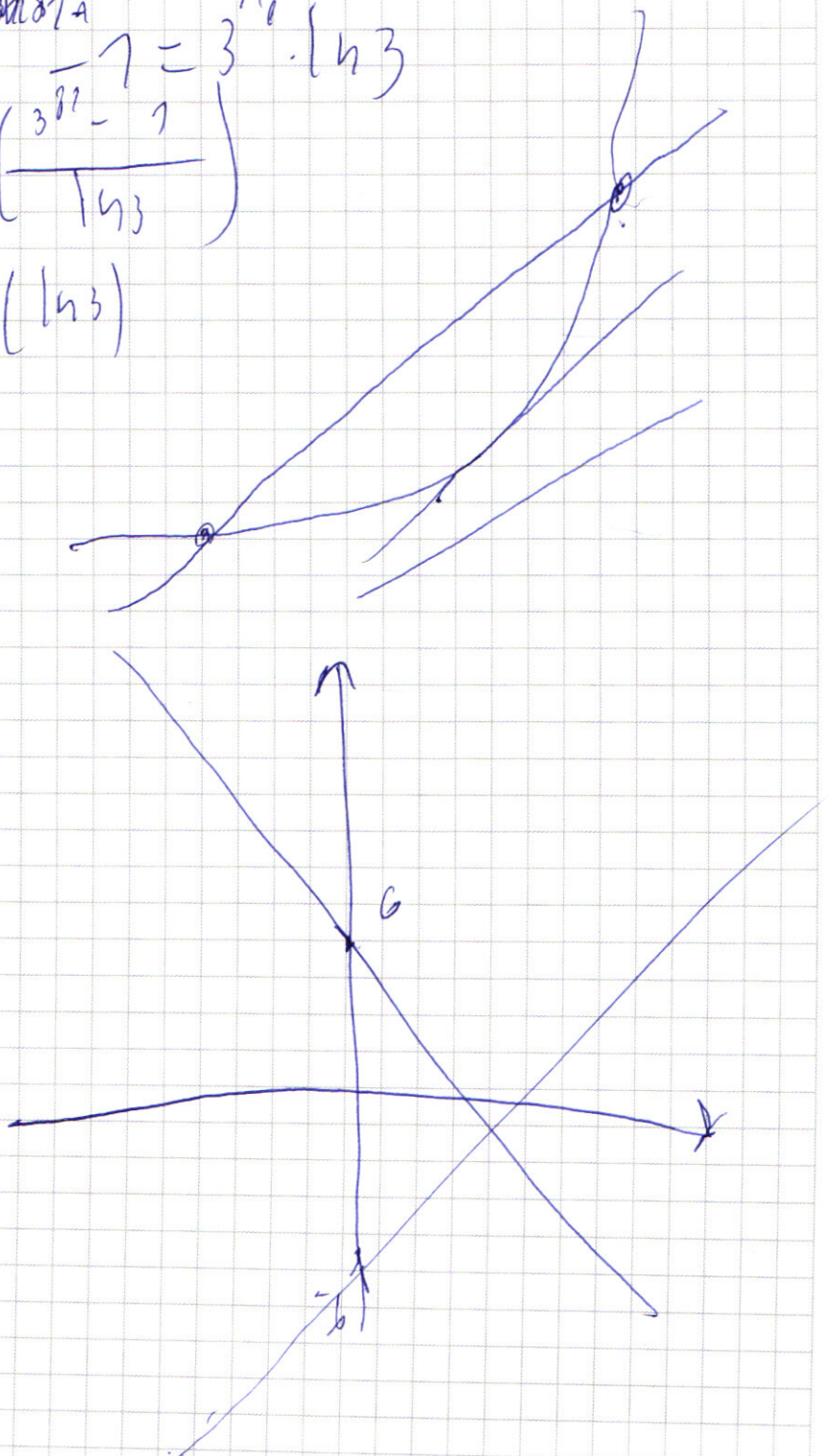
$$87 + 4 \cdot 87$$

$$87 + 4 \cdot 3^{87}$$

$$\ln 3 \cdot 3^{10} + 4 \cdot 3^{87}$$

$$11 - 10 > 6$$

$$11 - 10 > 6$$



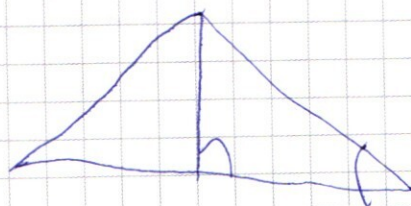
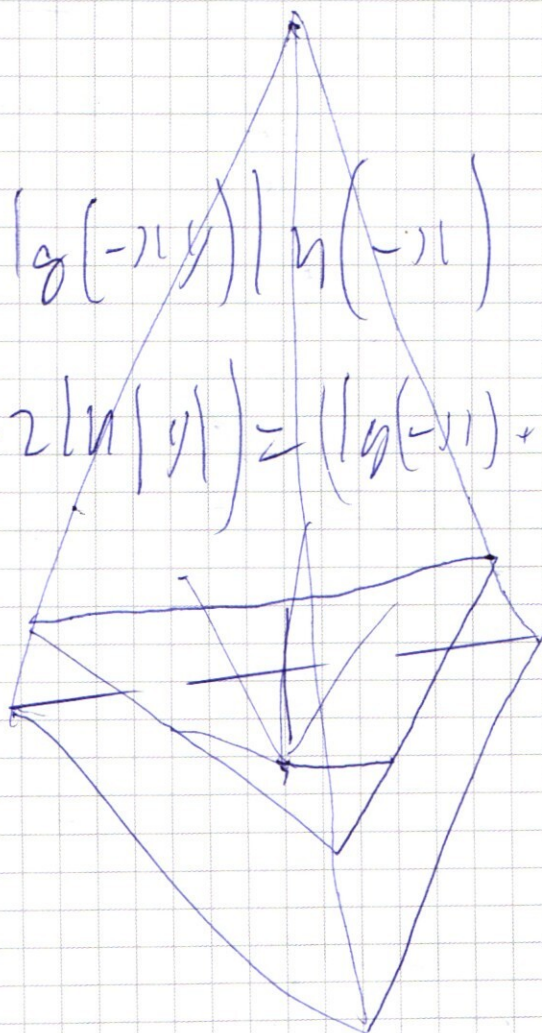
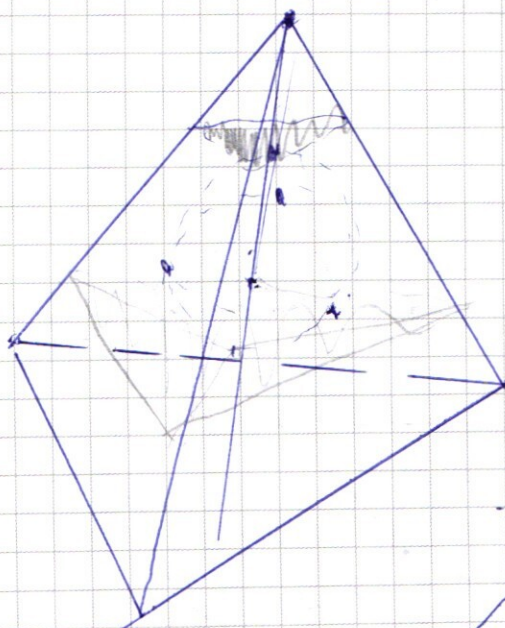
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^x = e^{x \ln 3}$$

$$e^{\lg y \cdot \lg \frac{x^9}{y^2}} = e^{\lg(-xy)}$$

$$\lg(y) \cdot \ln\left(\frac{x^9}{y^2}\right) = \lg(-xy) \cdot \ln(-1)$$

$$(\lg(y) \cdot (\ln|x| - 2\ln|y|) = (\lg(-1) + \lg(y)) \cdot \ln(-1))$$



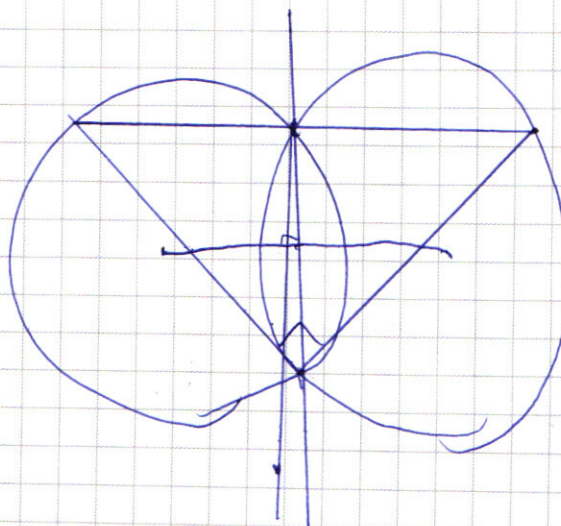
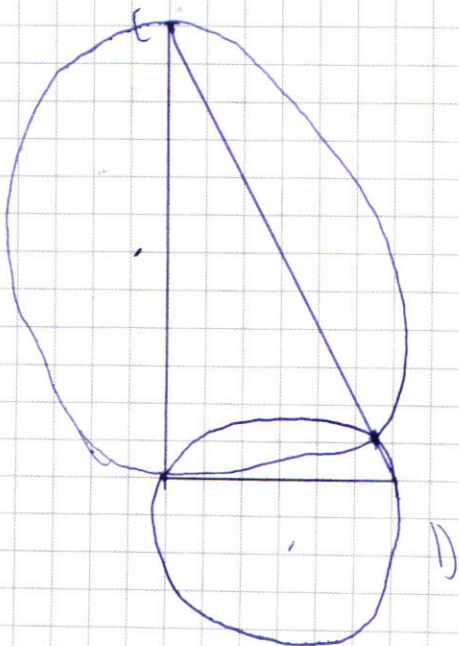
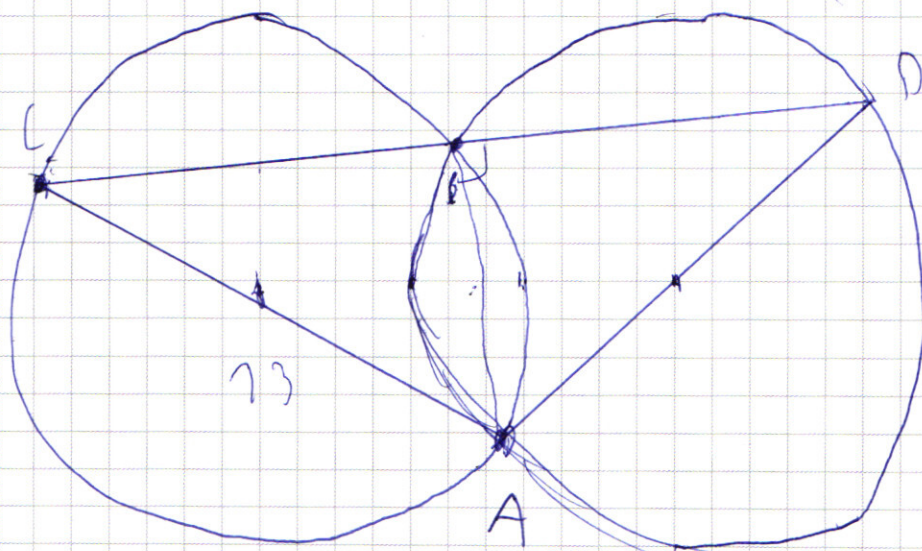
$$y = 6 - 11 + 11 - 6 + y$$

$$y = 6$$

$$11 = 6 - 11 + 11 - 6 + 11$$

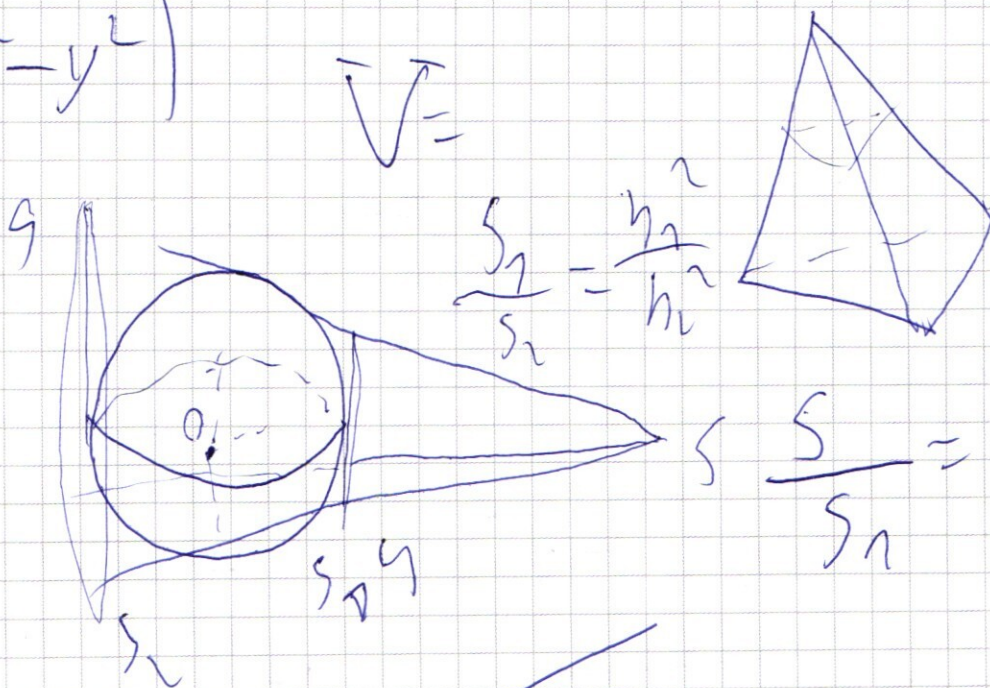
$$211 = 29$$

$$11 = 12$$

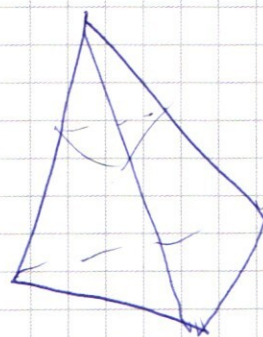


ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & \cancel{x(x-6)^2 + y^2 - 2(x-6)y +} \\
 & \cancel{(x-6)^2 + 2(x-6)y + y^2 + 2} \quad || \quad | \\
 & a(x-6)^2 + y^2 + 1(x-6-y)(x-6+y) = 6 \\
 & (x-6)^2 - y^2
 \end{aligned}$$



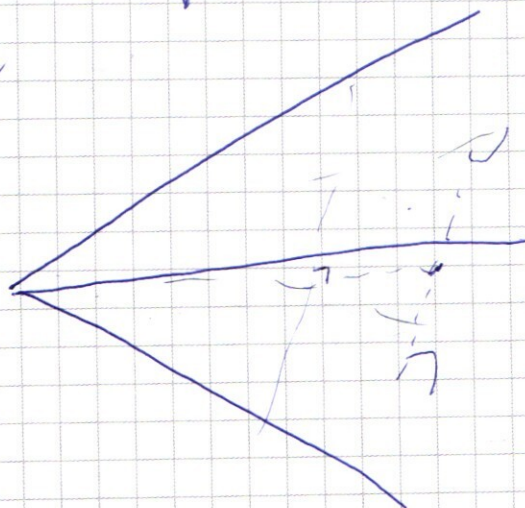
$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{h_1^2}{h_2^2}$$



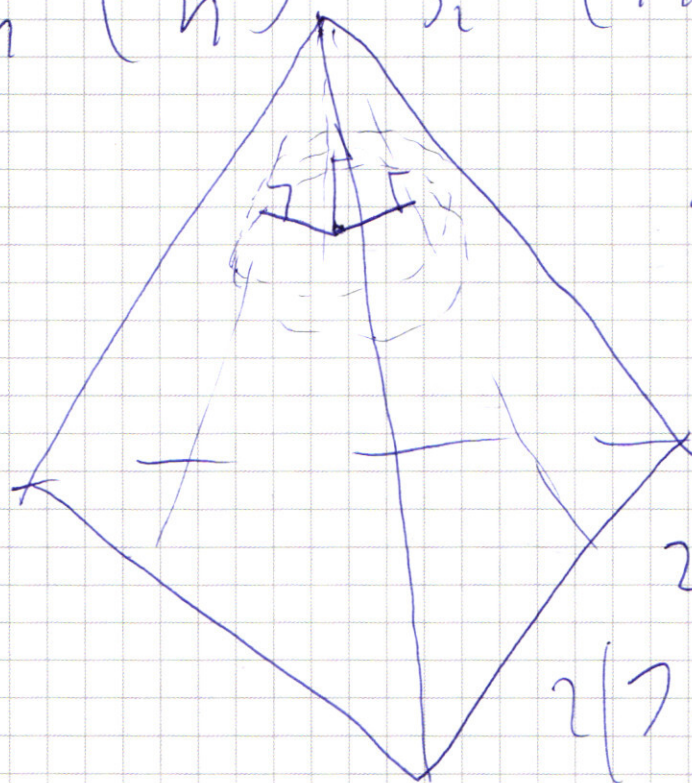
$$\frac{s}{s_1} = \frac{h_1 + v}{h_1}$$

560 + 250 + 30 = 840

56 + 18



$$\frac{S}{S_1} = \left(\frac{h+R}{h} \right)^2 \quad \frac{S}{S_2} = \left(\frac{h+R}{h+2R} \right)^2$$



$$\sin^2 \alpha = \frac{7 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$2 \cos^2 2\alpha = 7 + \sin 70\alpha$$

$$2(7 - \sin^2 2\alpha)$$

$$\sqrt{2} (\sin 5\alpha - \cos 5\alpha) (\sqrt{2} \cos 2\alpha - \cos 5\alpha - \sin 5\alpha) - (\cos 5\alpha + \cos(\pi - 5\alpha))$$

$$2 \cos 5\alpha \cdot \cos 2\alpha = \sqrt{2} \cos \alpha + \sin 5\alpha \cdot \cos 2\alpha$$

$$\sqrt{2} \cos 2\alpha (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) = \sqrt{2} (\cos 5\alpha + \sin 5\alpha)$$

$$\sqrt{2} \cos 2\alpha = \cos 5\alpha + \sin 5\alpha$$

$$2 \cos^2 2\alpha = 7 + 2 \cos 5\alpha \cdot \sin 5\alpha =$$

$$= 7 + \sin 70\alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$R \frac{h}{h+R} S_0 = h S_1$$

$$R \frac{h+2R}{h+R} S_0 \frac{(h+R)^2}{h^2} = \cancel{(h+2R)} S_2$$

$$R S_0 = (h+R) S_1 = h^2 \frac{h+R}{(h+2R)^2} S_2$$

$$\cancel{R S_0} =$$

$$(h+2R)^2 S_1 = h^2 S_2$$

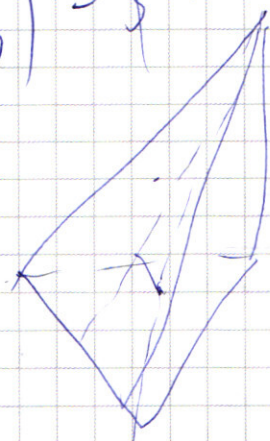
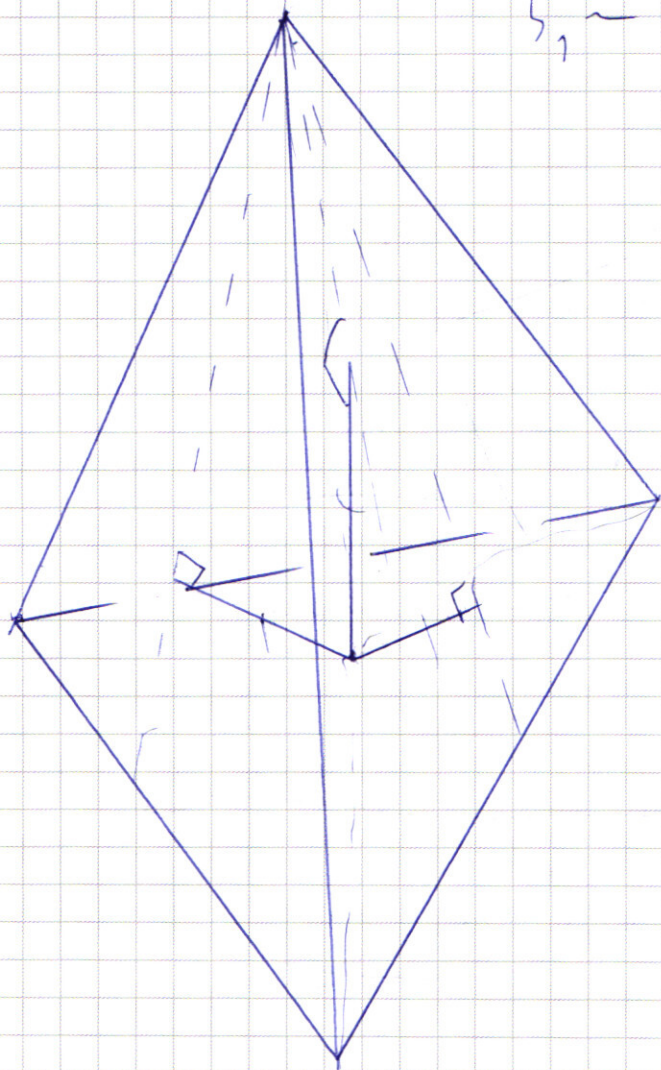
$$R S_0 \left(\frac{h+R}{h} \right)^2 = (h+R) \left(\frac{S_1 + S_2}{2} \right)$$

$$S_0 \cdot \cos \alpha = S \quad h^2 S_2 = h' S$$



$$\frac{4}{3}R(S_1 + S_2 + S_3) = \frac{4}{3}H \cdot S$$

$$S_1 \sim H^2$$



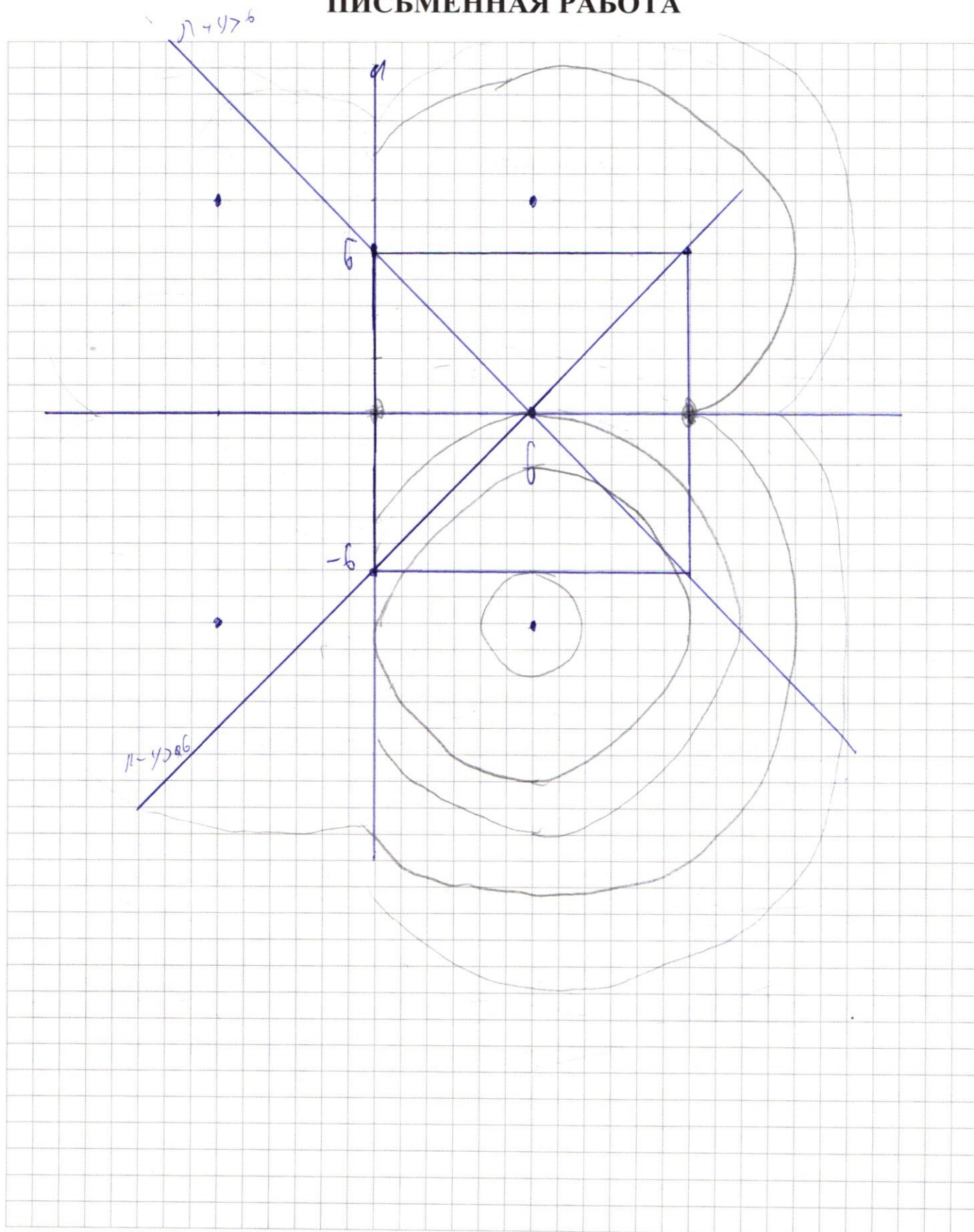
$$R S_0 = H_1 S$$

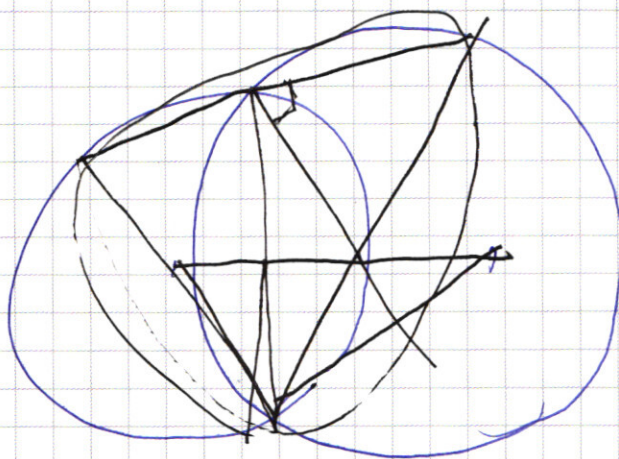
$$R_c H S_0 = H_2$$

$$R_1 S_0 = H_1 S_1$$

$$R_2 \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = H_2 S_1$$

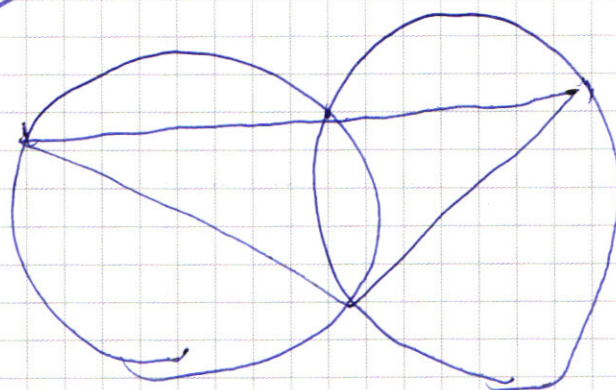
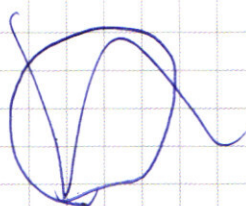
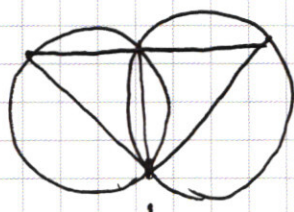
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\frac{S_1}{S_2} = h^2 (h+R)^2$$

$$h = \frac{2}{3}$$



$$R \sim h$$

$$R S_0 = h S_1$$

$$\frac{R_1}{h} = \frac{R}{h+R} = \frac{R_1}{h+R}$$

$$R_2 S_0 \frac{(h+2R)^2}{h^2} = (h+2R) S_2$$

$$R S_0 \frac{h}{h+R} = h S_1$$

$$R S_0 \frac{h}{h+R} = h$$

$$R S_0 \frac{h+2R}{h^2} \cdot \frac{h+R}{h+2R} = S_2$$

$$R S_0 = (h+R) S_2$$

$$R S_0 = S_2 (h+R) h^2$$

$$h(h+R) = \frac{2}{3}$$