

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

80648

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑤ $|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1)$

$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 \quad (2)$

Расширим (1):

$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

• Если $\begin{cases} x-y > 6 \\ x+y > 6 \end{cases}$ $x-y-6 + x+y-6 = 12$
 $x = 12$

• Если $\begin{cases} x-y > 6 \\ x+y < 6 \end{cases}$ $x-y-6 - x-y+6 = 12$
 $y = -6$

• Если $\begin{cases} x-y < 6 \\ x+y > 6 \end{cases}$ $-x+y+6 + x+y-6 = 12$
 $y = 6$

• Если $\begin{cases} x-y < 6 \\ x+y < 6 \end{cases}$ $-x+y+6 - x-y+6 = 12$
 $x = 0$

Расширим (2):

$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9$ - графиком яви окружности

с центрами $(6; 8); (6; -8); (-6; 8); (-6; -8)$ попу снне
путее строение графика $(x-8)^2 + (y-8)^2 = 9$ относительно
OX и OY

Ностраи графики (1) и (2) в одной системе
координат.

①

$$16875 = 5 \cdot 3375 = 5 \cdot 5 \cdot 675 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 135 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 27 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 3$$

$$\Rightarrow 1) 16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$$

и

- это два варианта

$$2) 16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1$$

какие цифры могут быть в восьмизначном числе т.к. при перемножении любых (кроме 1) цифр уже двузачное число.

Для 1 случая 280 восьмизначных чисел

а для 2 случаев 840 восьмизначных чисел

$$280 + 840 = 1120 \text{ чисел}$$

Ответ: 1120 чисел

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

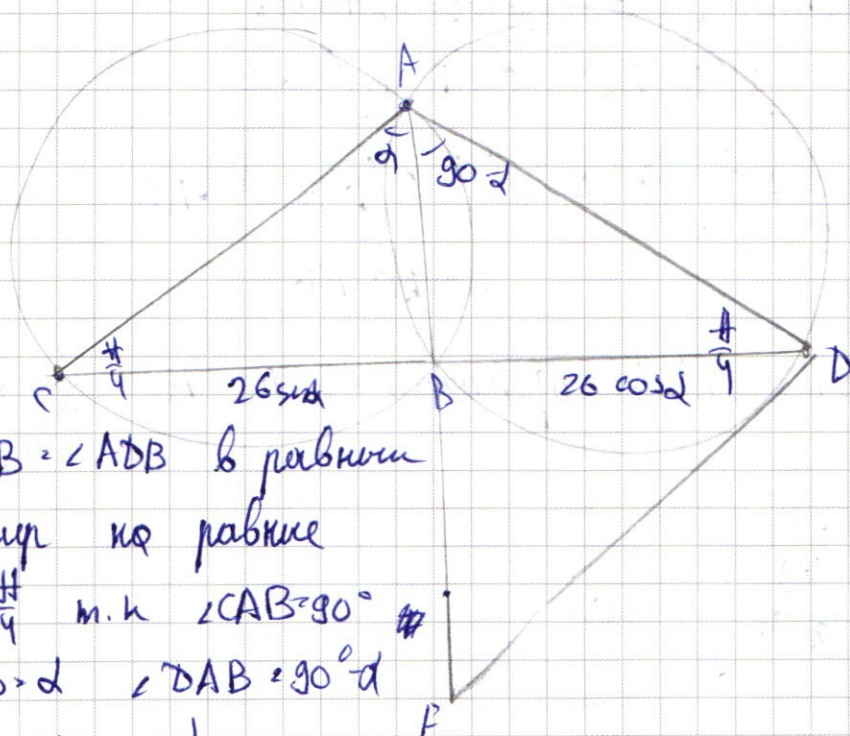
$$\begin{aligned} x &= 2y \\ x &= 4 - y^2 \\ -x &= y^2 \\ x &= -y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2 & y_1 &= 2 \\ x_2 &= \frac{9 - \sqrt{17}}{2} & y_2 &= \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x_3 &= -4 & y_3 &= 2 \end{aligned}$$

6.



а) $\angle ACB = \angle ADB$ в равных
окр. отрез. на равных
дугах $\widehat{AB} = \widehat{AB}$ т.к. $\angle CAB = 90^\circ$
 $\angle CAB = \alpha$ $\angle DAB = 90^\circ - \alpha$
(т.к. $\angle CAD = 90^\circ$)

По теореме синусов: $BD = 2R \sin(90^\circ - \alpha) = 2R \cos \alpha$
 $BC = 2R \sin \alpha$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{26}$$

8) $BC = 10$

$$\sin \alpha = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

По теореме синусов
в треугольнике $\triangle ABC$:

$$\frac{AC}{\sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha)} = 2R$$

~~$$AC = 2R \sin \angle ACB = 2 \cdot 13 \cdot \frac{R}{2} = 13R$$~~

~~$$\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha)} = 2R$$~~
~~$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{2} = 169$$~~

Ответ: 49
9) 26

$$AC = \sqrt{2} R (\cos \alpha - \sin \alpha) = \sqrt{2} \cdot 13 \left(\frac{12}{13} - \frac{5}{13} \right) = \sqrt{2} \cdot 13 \cdot \frac{7}{13} = 7\sqrt{2}$$

8

~~$\triangle ACD = \triangle CFD$ (CD - общая, $\angle BCD = \angle FCD$)~~

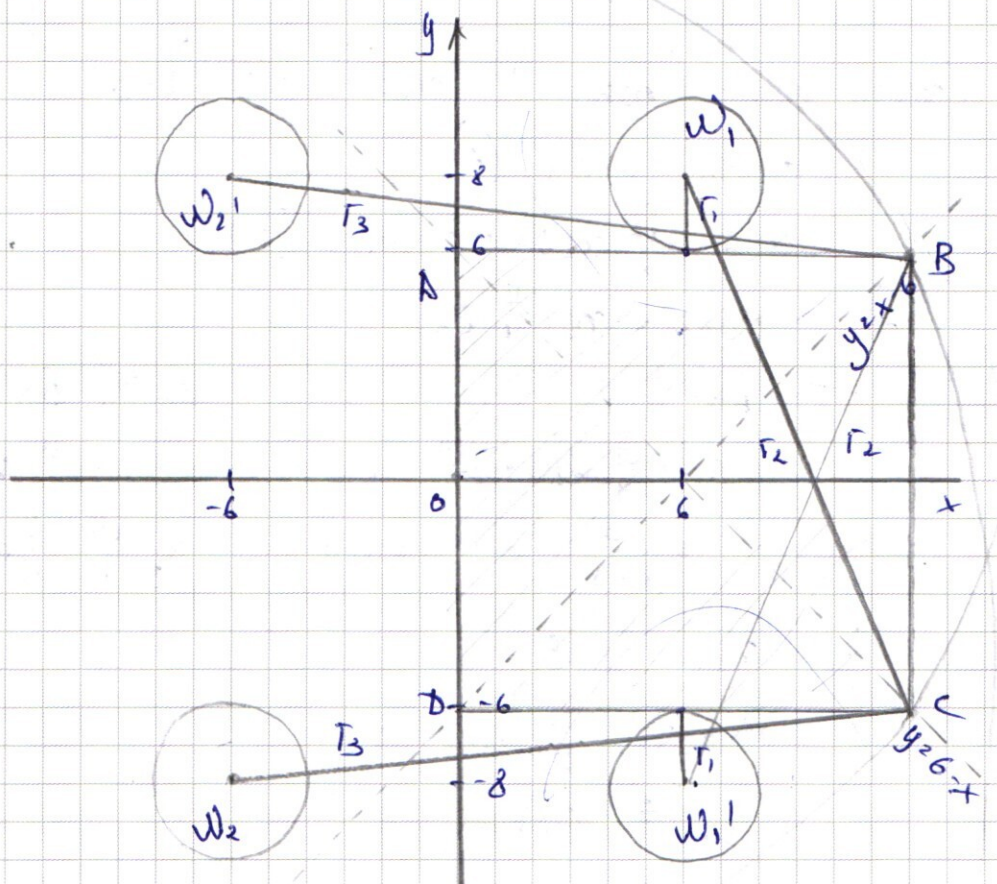
то свойству $S(D; AC) = S(F; AC) \Rightarrow$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} AC \cdot S(F; AC) = \frac{1}{2} S(D; AC) \cdot AC = \frac{1}{2} AC \cdot AD$$

Но $\triangle CAD$ - равнобедренный $\Rightarrow AC = AD = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 49$

8)
Ответ: 49
9) 26

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Из заданной следует что два решения системы
будет иметь когда какие-то две окружности
касаются в квадрате уравнение (1);

1) АВ- касательная АВ $\parallel$ ОА $\Rightarrow$ радиус проведенный АВ
 ООУ тогда $r_1 = 8 - 6 = 2 \Rightarrow$ при $a = 4$ существует
 имеет два решения т.к. ω_1 и ω_2' впервые
 касаются квадрата при $r = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$

2) Максимальный радиус кога ω_1 и ω_1' будут касаться квадрата равен $\sqrt{36 + 144} = \sqrt{180}$, а радиус окружностей ω_2 и ω_2' кога они касаются квадрата в

$$\textcircled{2} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x \sin 5x$$

$$\cos 2x \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \cos 2x \sin 5x$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) \left(\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x) \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x & (1) \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x & (2) \end{cases}$$

$$(2)_1 \quad \cos 2x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right)$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - 5x$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + 5x$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$(1)_1 \quad \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x = 0$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} - \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $x_2 = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$
 $x_3 = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 тоже (кроме случая из пункта 1 т.к. $\sqrt{232} > \sqrt{180}$ и u_1 и u_1' будут пересекать квадраты а будет более двух решений) $r_3 = \sqrt{18^2 + 4} = \sqrt{328}$
Значит т.к. $r_3 > \sqrt{232}$ только u_2' и u_2 в этом случае будут касаться квадрата

~~а $a_1 = \sqrt{328}$ и $a_2 = \sqrt{232}$~~ $a_1 = r_3^2 = 328$
 $a_2 = 4$

Ответ: $a_1 = 4$

$a_2 = 328$

③ $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{by} = (-x)^{by}(-y) \quad (1)$

отв: $\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$

Рассмотрим (2):

$x^2 + xy + 4x + 8y - 2y^2 = 0$

$x^2 + x(y+4) - (2y^2 - 8y) = 0$

$\Delta = y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2 \Rightarrow$

$x = \frac{-(y+4) \pm (3y-4)}{2}$

$x_1 = \frac{y-4}{y-4} = 1$

$x_2 = \frac{y+4-3y+4}{y-4} = \frac{-2y+8}{y-4} = -2$

Подставим полученные значения в (1):

~~$x = y - 4$~~

~~$(y-4)^2 \lg y$~~

~~$(y-4)^2 \lg(-y+4)$~~

Рассмотрим (1):

$$10 \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = 10 \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$10 \lg y \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = 10 \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y (4 \lg x - 2 \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) (\lg(-x))$$

~~$\lg y (4 \lg x - 2 \lg y)$~~

$$4 \lg(-x) \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(y) \lg(-x)$$

$$3 \lg(-x) \lg y - 2 \lg^2(y) - \lg^2(-x) = 0$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

~~$\lg$~~
$$(\lg(-x) - 2 \lg(y)) (\lg(-x) - \lg(y)) = 0$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = 2 \lg(y) \\ \lg(-x) = \lg(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

с учетом (2), получим

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ -x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x = -y \\ -x = y \end{cases}$$

(не подходит по ОДЗ)

$-x = y$ - подходит

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ x = -y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y = y - 4 \\ -y = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

(не входит в ОДЗ)

$$\begin{cases} -x = y^2 \\ -x = 4 - y \end{cases}$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad x = \frac{y - \sqrt{17}}{2}$$

(не входит в ОДЗ)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1 \quad \begin{array}{r} 16875 \\ 15 \overline{) 16875} \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$

$\begin{array}{r} 5 \\ 3375 \\ 30 \overline{) 3375} \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$

$\begin{array}{r} 5 \\ 645 \\ 5 \overline{) 645} \\ \underline{5} \\ 14 \\ \underline{15} \\ 25 \\ \underline{25} \\ 0 \end{array}$

$\begin{array}{r} 5 \\ 135 \\ 10 \overline{) 135} \\ \underline{10} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$

$\begin{array}{r} 5 \\ 275 \\ 22 \overline{) 275} \\ \underline{22} \\ 55 \\ \underline{55} \\ 0 \end{array}$

$\begin{array}{r} 5 \\ 385 \\ 38 \overline{) 385} \\ \underline{38} \\ 5 \\ \underline{5} \\ 0 \end{array}$

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1$

$55 \cdot 55 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

$2 \cos^2 \alpha = 1$

$2 \cos \alpha \cos \beta = 2x$

$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

$|y-(x-6)| + |y+(x-6)| = 12$

$y > x-6$

$y < x-6$

55553331

1178

$300 = 4 \cdot 25 \cdot 3 = 10 \sqrt{3}$

40320

$$2x + 2th = \frac{H}{4} - 5x + 2th$$

$$\frac{H}{28} + \frac{4}{7}$$

$$7x = \frac{H}{4} + 2th$$

$$x = H$$

$$\frac{H}{4} - \frac{5H}{28} - \frac{10H}{7}$$

$$\frac{H}{14} - \frac{10H}{7} + \frac{12H}{7}$$

$$\cos(H-x) = \cos H \cos x - \sin H \sin x$$

$$\frac{H}{14} + \frac{4}{7} Hk$$

$$\frac{H}{4} - \frac{5H}{28} = \frac{10H}{7}$$

$$\frac{H}{14} + \frac{8}{14} Hk$$

$$\frac{7H}{28}$$

$$\frac{H}{14}$$

$$\cos x + \cos x = 2 \cos \frac{x+x}{2} \cos \frac{x-x}{2} = 2 \cos x$$

$$\sin x + \sin x = 2 \cos \frac{x+x}{2} \sin \frac{x-x}{2} = 2 \sin x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 10x \cdot \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 2x \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x \sin 5x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$(2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$$

$$\cos 2x = \cos \left(\frac{H}{4} - 5x \right)$$

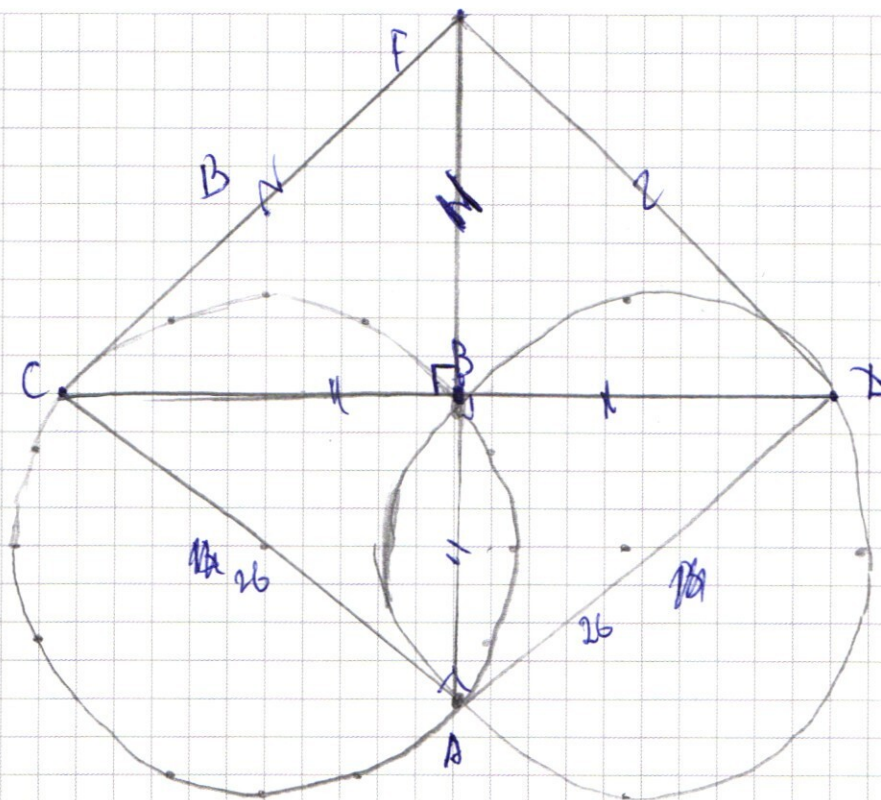
$$2x + 2th = \frac{H}{4} - 5x + 2th$$

$$2x + 2th = 5x + 2th$$

$$91 + 40h + 4h^2$$

$$0 = (h_2 - h_1) - (h_1 + h_2)x + 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~$$\frac{H}{4} - d$$

$$\left(\frac{3H}{4} - d \right) \sim 2R$$

AC~~

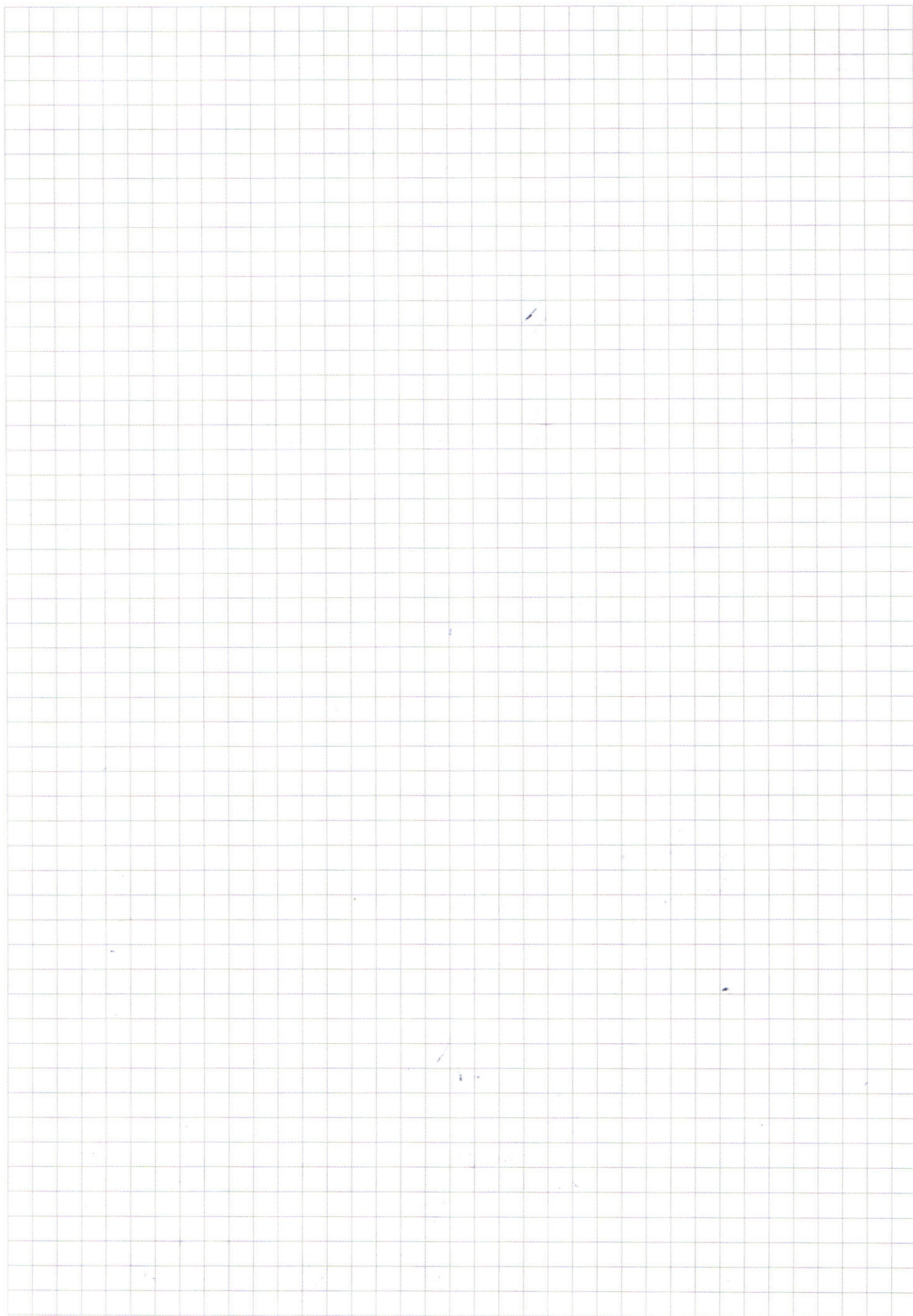
~~AC~~ ~~22R~~

$$\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

AC
 $\frac{1}{2}$ (cold prod)
AC

$$\frac{AC}{\cos 50^\circ} = AP \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$A(z)R(\cos \theta - \sin \theta)$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12 \quad y^2$$

$$\text{Если } \begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y \geq 6 \end{cases} \quad y < x-6 \quad y > 6-x$$

$$x-y-6 + x+y-6 = 12$$

$$2x = 24 \quad x = 12$$

$$\text{Если } \begin{cases} x-y < 6 \\ x+y > 6 \end{cases} \quad y > x-6 \quad y > 6-x$$

$$-x+y+6 + x+y-6 = 12$$

$$y = 6$$

$$\text{Если } \begin{cases} x-y > 6 \\ x+y \leq 6 \end{cases} \quad y < x-6 \quad y \leq 6-x$$

$$x-y-6 - x-y+6 = 12$$

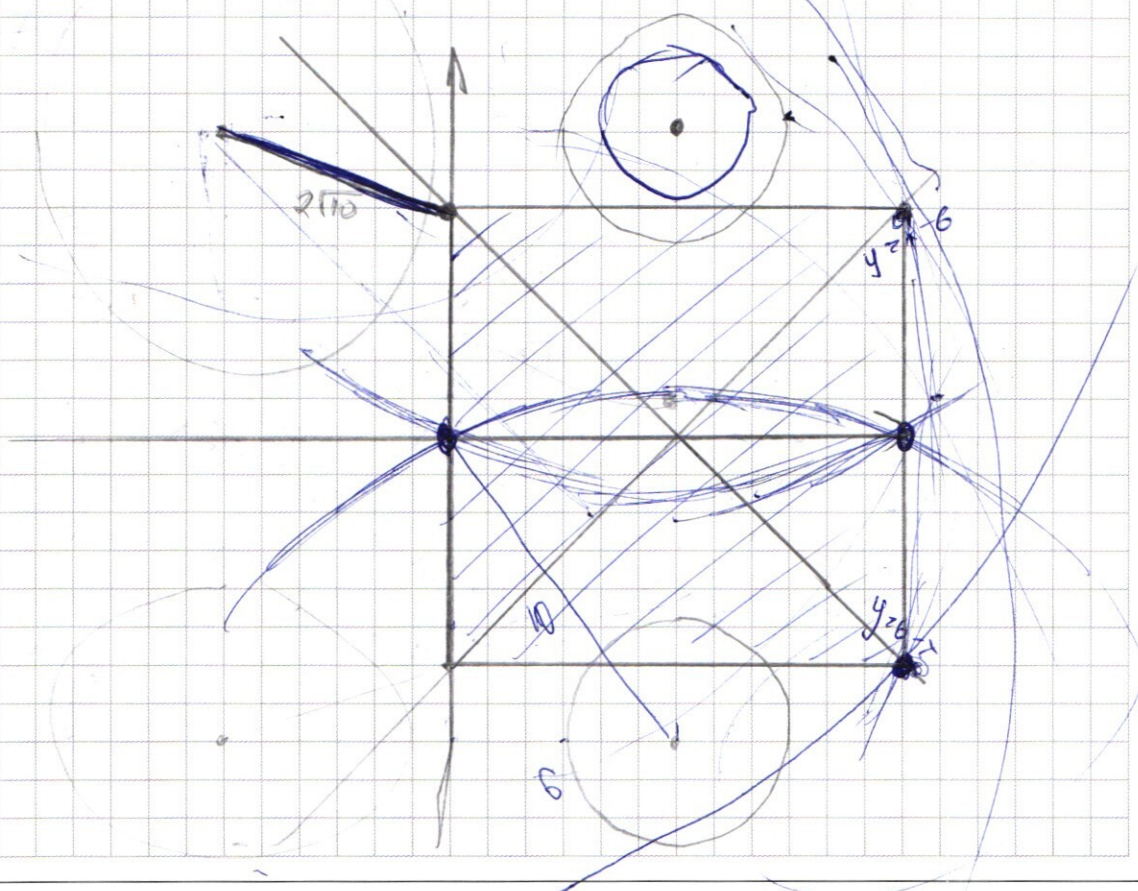
$$y = -6$$

$$\text{Если } \begin{cases} x-y \leq 6 \\ x+y < 6 \end{cases} \quad y > x-6 \quad y < 6-x$$

$$-x+y+6 - x-y+6 = 12$$

$$-2x + 12 = 12 \quad x = 0$$

$$x = 0$$



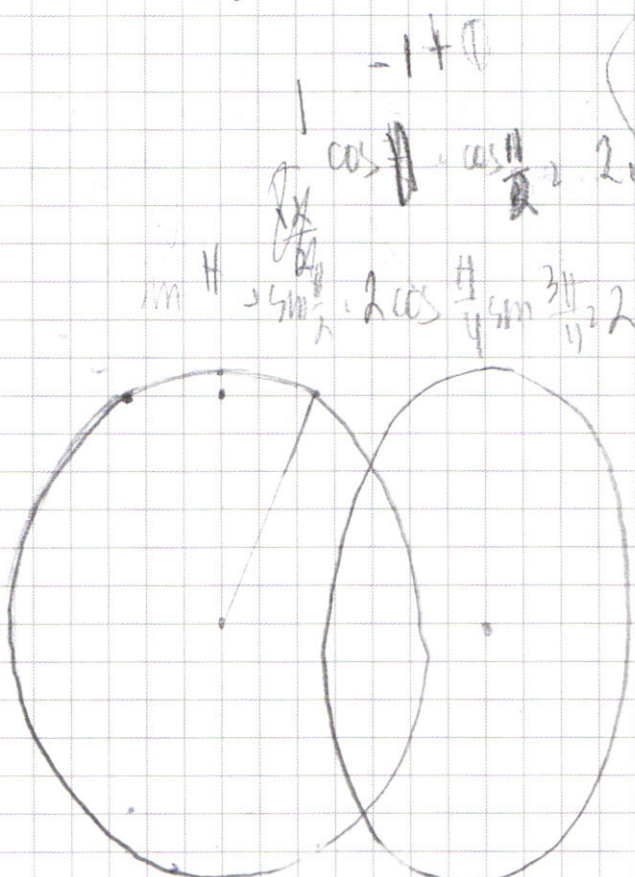
$$\sin \cos 2x + \cos 2x = \cos 2x \cdot \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos 2x \cdot \sin 2x = \sin 4x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x =$$



$$\begin{aligned} & \log(x) + \log(x) = \log(x^2) \\ & \log(x) + \log(x) = \log(x^2) \\ & \log(x) + \log(x) = \log(x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2y^2 - xy + 2y \\ & 2y^2 - y(x+8) + 2y = 0 \\ & 2y^2 + 16y + 64 - 8(x^2 - 4x) = 0 \\ & 2y^2 + 16y + 64 - 8x^2 + 32x = 0 \\ & 2y^2 + 16y + 64 - 8x^2 + 32x = 0 \\ & (2y^2 + 16y + 64) - 8(x^2 - 4x) = 0 \\ & 2(y^2 + 8y + 32) - 8(x^2 - 4x) = 0 \\ & 2(y^2 + 8y + 32) - 8(x^2 - 4x) = 0 \end{aligned}$$