МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФI

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

3) замечаем, что для Φ_2 верно то, что замечено для Φ_1 в п. 2, т.е. Φ_2 ~~пере~~ имеет два реш-ия при $a \in (4; 100]$

$\Rightarrow$ ~~2 нужно найти такие a, чтобы либо Φ_1 и Φ_2~~

посмотрим по промежуткам значений.

1) $\sqrt{a} \in (0; 2)$ – нет реш-ий - ни одна из окр-ей не касается и не пересекает квадрат, заданный (1) (далее - ~~квадра~~ к-т);

2) $\sqrt{a} = 2$ – два реш-ия – Φ_1 и Φ_2 пересекают к-т в одной точке каждая;

3) $\sqrt{a} \in (2; 2\sqrt{10})$ – 4 реш-ия: Φ_1 и Φ_2 пересекают к-т в двух точках каждая;

4) $\sqrt{a} = 2\sqrt{10}$ – 4 реш-ий: ~~Φ_1 и Φ_2~~ каждая окр-ть пересекает (пересечения) либо касается к-та, но точки кас-ия для Φ_4 и Φ_4, Φ_2 и Φ_3 совпадают

5) $\sqrt{a} \in (2\sqrt{10}; 10)$ – 4 реш-ия: Φ_3 и Φ_4 не пересекают и не касаются к-та, Φ_1 и Φ_2 имеют по две точки общих с к-ом;

6) $\sqrt{a} = 10$: 2 реш-ия: Φ_1 пересекает в $(10; 0)$ и $(12; 0)$ Φ_2 – в $(0; 0)$ и $(12; 0)$, Φ_3 и Φ_4 – в $(0; 0)$ – всего две точки;

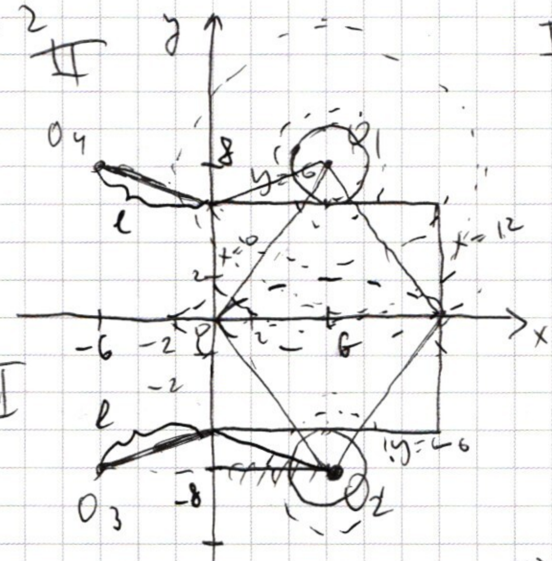
7) $\sqrt{a} > 10$: 0 реш-ий - ни одна из окр-ей не имеет общих точек с кв-ом.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{a} = 2 \\ \sqrt{a} = 10 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4 \\ a = 100 \end{array}\right.$$

Ответ: 4; 100.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рис. 2



$l=\sqrt{6^2+2^2}=\sqrt{36+4}=$

$=\sqrt{40}=\sqrt{4\cdot2\cdot5}=$

$=2\sqrt{10}$

пунктирные линии ничего не обозначают

$\Rightarrow (2)$ $\begin{cases}(x-6)^2+(y-8)^2=a \text{ при } \begin{cases}x\geq0\\y\geq0\end{cases} \text{ — окр-ть } \Phi_1\\ (x-6)^2+(y+8)^2=a \text{ при } \begin{cases}x\geq0\\y<0\end{cases} \text{ — окр-ть } \Phi_2\\ (x+6)^2+(y+8)^2=a \text{ при } \begin{cases}x<0\\y<0\end{cases} \text{ — окр-ть } \Phi_3\\ (x+6)^2+(y-8)^2=a \text{ при } \begin{cases}x<0\\y\geq0\end{cases} \text{ — окр-ть } \Phi_4\end{cases}$

рассмотрим окр-ти:

1) ~~Φ_1~~ Φ_1) при $\sqrt{a}=2$ — одно решение; при $\sqrt{a}=6$ — два реш-ия; ~~при $\sqrt{a}>6$~~ при $\sqrt{a}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{36+64}=10$ — два решения $\Rightarrow$

по рис. 2 замечаем: 1) Φ_3 и Φ_4 не могут иметь двух решений, т.к. сущ-ют только в III и II коорд четвертях соотв; 2) Φ_1 имеет ~~одно~~ ноль реш-ий при $\sqrt{a}<2$; при $\sqrt{a}=2$ — одно реш-ие; при $\sqrt{a}=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$ — два реш-ия; при $\sqrt{a}>10$ — нуль реш-ий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{a}>2\\\sqrt{a}\leq10\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a>4\\a\leq100\end{cases} \Rightarrow a\in(4;100]$

в) $\alpha - \beta = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$2x - 5x + \frac{\pi}{4} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n, n \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$;

$\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

№7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

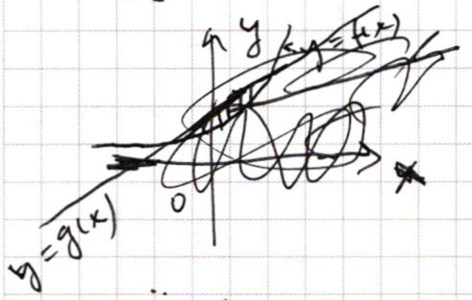
пусть $3^{81} = t$; тогда

пусть $f(x) = 3^x + 4t$

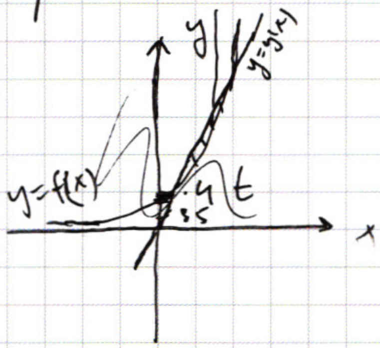
$g(x) = 85 + (t-1)x$

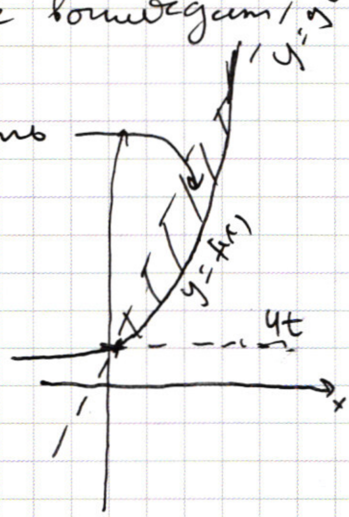
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4t \\ y < 85 + (t-1)x \end{cases}$$

$t - 1 > 0 \Rightarrow$ схематично гр-к системы выглядит так:



рассматриваемая обл-ть





найдём:

$f(x) = g(x)$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - x)x$

~~$3 + 4 \cdot 3^{81}$~~ $f(1) = 3 + 4 \cdot 3^{81} = 3(1 + 4 \cdot 3^{80})$

$g(1) = 85 + (3^{81} - 1) = 84 + 3^{81}$

$4 \cdot 3^{81} > 3^{81} + 84 \Rightarrow f(1) > g(1) \Rightarrow$

см. прод. стр. 17

№1

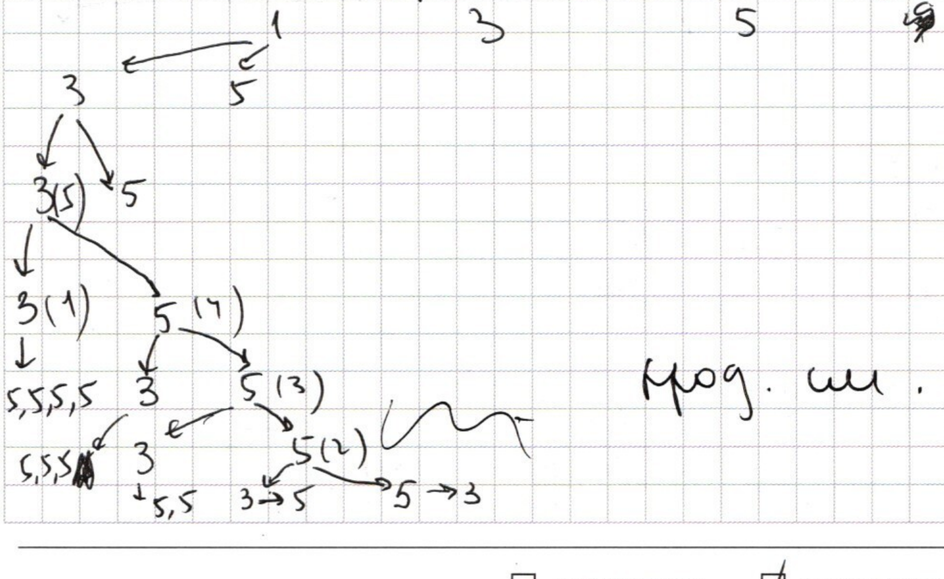
за

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	1
1	

Заметим, что однозначные делители 16 875: 5; 3; 9. ~~Итак~~

Заметим, что при разложении ~~получили~~ мы 8 раз поделили на простое число (7 раз, если не учитывать деление на 1) ... => ~~Чи~~ ~~использовано~~ во восьмизначное ~~число~~ все числа, произв. цифр которого равно 16875, можно записать либо как набор из одной единицы, ~~трёх~~ трёх троек и четырёх пятёрок, либо как набор из двух единиц, одной тройки, четырёх пятёрок и одной девятки.

Составим дерево возможных вар-ов:



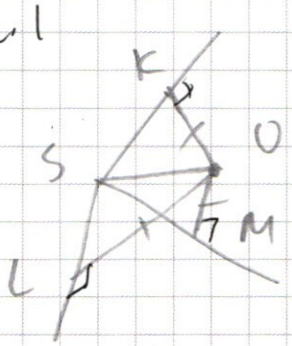
прод. см. стр. 12

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рис. 1



№4

замечаем, что O — равноудалена от K, L, M (т.е. $OK = OL = OM$)

и $OK \perp SK$, $OL \perp SC$, $OM \perp SM$;

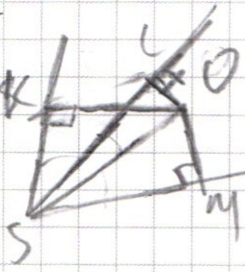
также замечаем, что

$\Leftarrow$ ~~SL~~ $SL = SK$, $SL = SM$, $SM = SK \Rightarrow SK = SM = SL$;

$\Leftarrow$ ~~S~~ $\angle LSO = \angle KSO$, ~~∠MSO = ∠~~ $\angle MSO = \angle LSO$ и $\angle KSO = \angle LSO \Rightarrow$

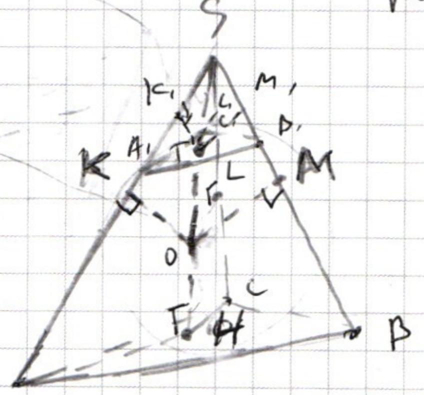
$\Rightarrow \angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$

рис. 2



пусть R — радиус сферы;

рис. 3



достроим трёхгранный угол до пирамиды с вершиной O так, чтобы

$K \in SA$, $M \in SB$,

$L \in SC$

тогда ~~$O \in (ABC)$~~ и ~~пусть~~ $SO \perp (ABC)$ и пусть $SO \cap (ABC) = H$

пусть $T \in SO$ и $OT = OM = R$

пусть $TK_1 \perp SA$, $K_1 \in SA$, $TM_1 \perp SB$, $M_1 \in SB$;

~~TM_1~~ $TL_1 \perp SC$, $L_1 \in SC$, проведем пл-ть α так, чтобы $T \in \alpha$ и $\alpha \parallel (ABC)$; тогда пусть $\alpha \cap SA = A_1$, $\alpha \cap SB = B_1$, $\alpha \cap SC = C_1$

тогда $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9} = k^2 \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k = \frac{2}{3}$

$SO \perp (ABC) \Rightarrow SO \perp MC,\ SO \perp AH$

$\frac{A_1T}{AH} = k = \frac{2}{3}$; заметим, что $\triangle SKO \sim \triangle SAH$ ($\angle SKO = \angle SHA = 90°$, $\angle ASH$ - общий) $\Rightarrow$ ~~$\triangle S$~~

$\Rightarrow$ ~~$\frac{SA}{SH}$~~ ~~$\triangle A_1B_1C_1$~~ $\triangle SK_1T \sim \triangle SKO \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SK_1}{SK} = \frac{ST}{SO} = \frac{ST}{ST+R}$

пусть $ST = 2a$, тогда $SH = 2a + 3a = 5a \Rightarrow$

$\Rightarrow TH = SH - ST = 5a - 2a = 3a$

$TO = R = 1{,}5a$

$\Rightarrow SO = ST + R = 2a + 1{,}5a = 3{,}5a \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{SK_1}{SK} = \frac{2a}{3{,}5a} = \cancel{\frac{2\cdot 2a}{3a} = \frac{4a}{3a} = \frac{4}{3}} = \frac{20a}{35a} =$

$= \frac{4a}{7a} = \frac{4}{7}$

$\triangle SA_1T \sim \triangle SOK \Rightarrow \frac{SA_1}{SO} = \frac{ST}{SK} = \frac{A_1T}{KO}$

SA ~~$SO = 1{,}5a$~~ $R = 1{,}5a$

$SO = 3{,}5a$

$\frac{SA_1}{3{,}5a} = \frac{A_1T}{1{,}5a}$

$\frac{SA_1}{3{,}5} = \frac{A_1T}{1{,}5}$ $\frac{SA_1}{A_1T} = \frac{3{,}5}{1{,}5} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow \frac{A_1T}{SA_1} = \frac{3}{7} = \sin\angle A_1ST$

$\angle A_1ST = \angle KSO$ (один и тот же угол) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{3}{7}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16875	5
3375	5
675	5
135	5
27	3
9	3
3	3
1	

$16875 : 5 = 3375$ (-15, 18, -15, 37, -35, 25)

$3375 : 5 = 675$ (30, 37, -35, 25)

$675 : 5 = 135$ (5, 17, -15, 25)

$135 : 5 = 27$ (-10, 35)

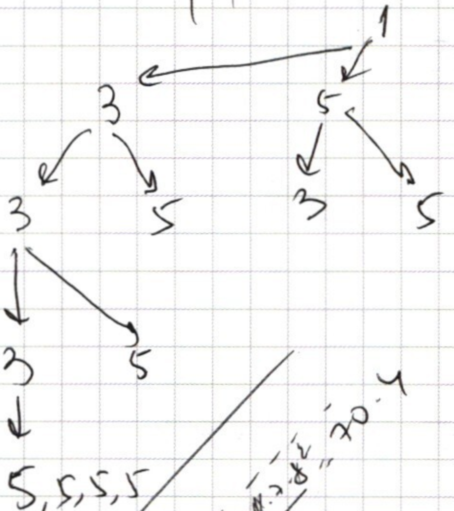
258×13: 774, 258, 3294

$169 - 50 = 119$

$119 \times 2 = 238$

n

3 5



$\frac{8!}{4!4!} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2\cdot3\cdot4} = 70\cdot4$

$\cos\alpha + \cos\beta =$

$= \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(\frac{\pi}{2} - \beta) =$

$= \sin(\gamma) + \sin(\varphi) =$

$= 2\sin\frac{\gamma+\varphi}{2}\cos\frac{\gamma-\varphi}{2} =$

$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\frac{\pi}{2}+\beta}{2} =$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) =$

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

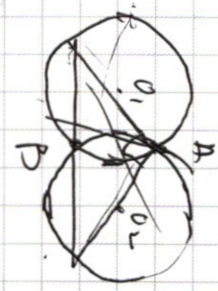
$\cos 7x + \cos$

$169 \times 2 = 238$ $\quad 169 - 50 = 119$

$\sin(\arccos x) =$

$= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} =$

$= \sqrt{1 - x^2}$



$\cos 7x - \sqrt{2}\cos 7x \cos 3x + \cos 3x =$

$= \sin 7x - \sqrt{2}\sin 7x \sin 3x + \sin 3x$

$\cos 7x (1 - \sqrt{2}\cos 3x) + \cos 3x =$

$= \sin 7x (1 - \sqrt{2}\sin 3x) + \sin 3x$

$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x$

$2\cos 5x \cos 2x - 2\sin 5x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 10x$

$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\cos 5x - \sin 5x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \frac{2\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$

$\cancel{2\cos}\ 2\sqrt{2}\cos 2x \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{2}\cos 10x$

$\sqrt{2}\cos 10x = \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$

$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) =$

$= \sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$

$\underline{2}\cos 2x \underbrace{(\cos 5x - \sin 5x)} - \underbrace{\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)}(\cos 5x + \sin 5x) = 0$

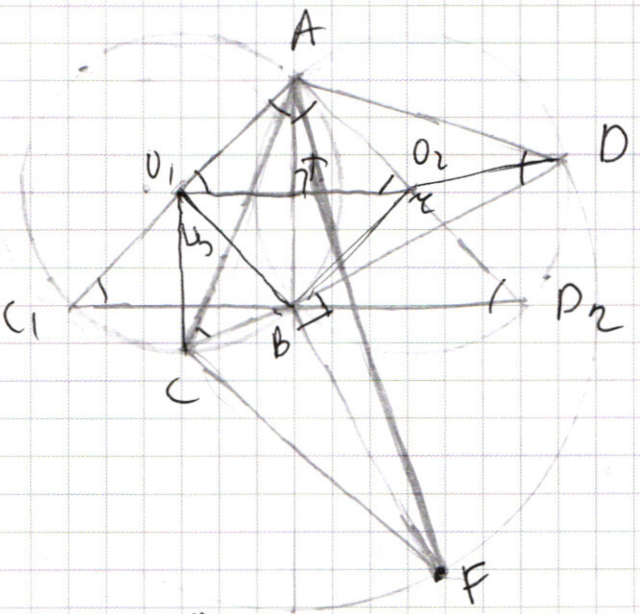
$\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$

1) $\cos 5x - \sin 5x = 0$

$\cos 5x = \sin 5x$

$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



$O_1A = 13 \Rightarrow O_1T = \frac{13}{\sqrt{2}}$

$AB = 2AT = 2O_1T = \cancel{2} \cdot \frac{13\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 13\sqrt{2} = C_1B$

$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{(BC+BD)^2 - 2BC \cdot BD}$ ~~=~~

$= \cancel{\sqrt{\quad}}$ пусть $R = 13$; ~~тогда~~ пусть $\angle CO_1B = \cancel{A}\ \varphi$, $\angle BO_2D = \psi$; тогда
(буква „пси")

BC

$BC^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos\varphi = 2R^2 - 2R^2\cos\varphi =$
$= 2R^2(1 - \cos\varphi)$

$BD^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\psi = 2R^2(1 - \cos\psi)$

$BC^2 + BD^2 = 2R^2(1 - \cos\varphi + 1 - \cos\psi) =$
$= 2R^2(2 - \cos\varphi - \cos\psi) =$
$= 2R^2(2 - (\cos\varphi + \cos\psi)) \ominus$

$\varphi + \psi = \smile BC + \smile BD = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 180^\circ - \psi \Rightarrow$

$\Rightarrow \ominus\ 2R^2(2 - (\cos\varphi + \cos(\pi - \varphi)) =$
$= 2R^2(2 - (\cos\varphi - \cos\varphi) = 2R^2 \cdot 2 = 4R^2$

$\Rightarrow BC^2 + BD^2 = 4R^2 \Rightarrow CF = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{4R^2} = 2R =$
$= \underline{26}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n,\ n \in \mathbb{Z}$

2) $\sqrt{2}\cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$\sqrt{2}\cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$

$\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cancel{\sqrt{2}}\cos 2x = \cancel{\sqrt{2}}\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$

пусть $2x = \alpha$, $5x - \frac{\pi}{4} = \beta$; тогда

$\cos\alpha = \cos\beta$

$\cos\alpha - \cos\beta = 0$

$-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0 \\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} \frac{\alpha+\beta}{2} = \pi n,\ n\in\mathbb{Z} & \cancel{(1)}\ (A) \\ \frac{\alpha-\beta}{2} = \pi n,\ n\in\mathbb{Z} & \cancel{(2)}\ (B) \end{array}\right.$

1) A) $\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7},\ n \in \mathbb{Z}$

$\cos\alpha - \sin\beta = \cos\alpha + \sin(-\beta) = \sin(-\beta) + \cos\alpha =$

$= \sin(-\beta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\varphi + \sin\gamma =$

$= 2\sin\frac{\varphi+\gamma}{2}\cos\frac{\varphi-\gamma}{2} =$

$= 2\sin\frac{-\beta+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{-\beta-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2} =$

$= 2\sin\left(-\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2} =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\alpha-\frac{\pi}{2}}{2} = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) =$

$=$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha + \sin\gamma =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha}{2} =$

$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{2\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\alpha - \cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) =$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\gamma + \sin\varphi =$

$= 2\sin\frac{\gamma+\varphi}{2}\cos\frac{\gamma-\varphi}{2} =$

$= 2\sin\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta+\frac{\pi}{2}}{2} = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos^2 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2\cos\left(\frac{10x}{2}\right)\cos\left(\frac{4x}{2}\right) = 2\cos 5x \cos 2x$

$\sin 7x + \sin 3x = 2\sin\frac{10x}{2}\cos\frac{4x}{2} = 2\sin 5x \cos 2x$

$\cos 10x = \cos(7x+3x) = \cos 7x\cos 3x - \sin 7x \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 7x\cos 3x + \sqrt{2}\sin 7x \sin 3x =$

$= \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x - \sqrt{2}\cos 7x \cos 3x + \cos 3x =$

$= \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2}\sin 7x \sin 3x$

пусть ~~$\sin x = a, \cos x$~~ $\sin 7x = a$, $\cos 7x = b$, $\sin 3x = p$, $\cos 3x = q$, тогда

~~$b - \sqrt{ } ab\sqrt{2} + a =$~~

$b - \sqrt{2}\, bq + q = a + p - \sqrt{2}\, ap$

$b - bq\sqrt{2} + q = a - ap\sqrt{2} + p$

$b^2 + 2b^2q^2 + q^2 + 2bq - 2bq^2\sqrt{2} - 2b^2q\sqrt{2} =$

$= a^2 + 2a^2p^2 + p^2 + 2ap - 2a^2p\sqrt{2} - 2ap^2\sqrt{2}$

$1 - a^2 + 2b^2q^2 + 1 - p^2 + 2bq - 2bq^2\sqrt{2} - 2b^2q\sqrt{2} =$

$= a^2 + 2a^2p^2 + p^2 + 2ap - 2a^2p\sqrt{2} - 2ap^2\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~их~~ из оставшихся 4-ёх ячеек выберем одну для ~~дев~~ девятки (4 способа) => $70 \cdot 4 = 280$ способов.
из оставшихся трёх ячеек выберем одну для тройки (3 способа) => всего $280 \cdot 3 = 840$ способов.
Это ответ для случая, когда в записи числа есть девятка.

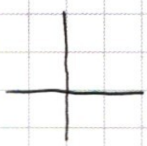
III. Всего:

$840 + 280 = 1120$ способов

Ответ: 1120 способов.

№5

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 & (1) \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a & (2) \end{cases}$$



1) ~~x-6~~ рассмотрим случаи:

~~1.1) $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6 \geq y \\ y \geq 6-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \end{cases} \Rightarrow y =$~~

~~1.2) $\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$~~

пусть $x-6=p$; тогда
$|p-y| \cancel{+|p+y|} = 12$

1.1) $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ $x-6-y+x-6+y=12$
$2x-12=12$
$x-6=6$
$x=12$

1.2) $\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\cancel{6}+y\cancel{-x}\cancel{+x}\cancel{-6}+y=2y=12$
$y=6$

1.3) $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{x}-6-y-\cancel{x}+6-y =$

$= -2y = 12$

$y = -6$

1.4) $\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{6}+\cancel{y}-x-x+6-\cancel{y} = 12$

$12-2x=12$

$6-x=6$

$x=0$

$\Rightarrow$ имеем:

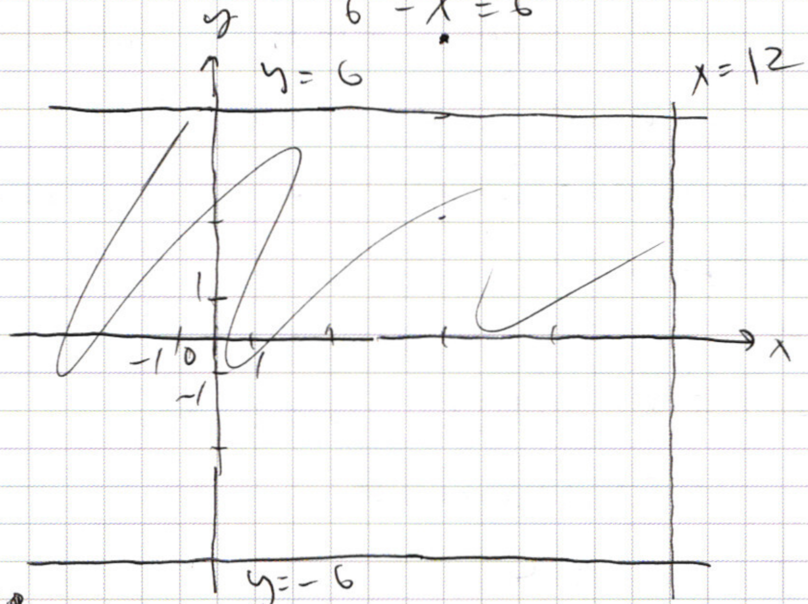
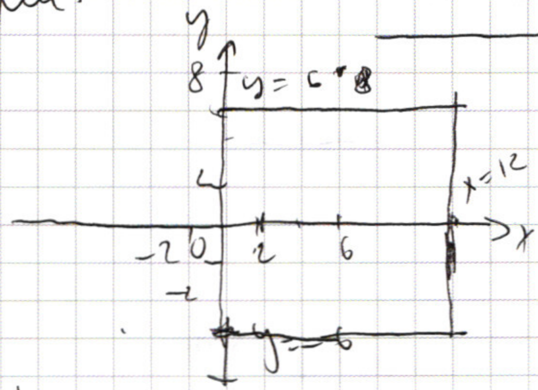


рис. 1



2) рассмотрим все случаи:

2.1) $x \geq \cancel{0} y$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-6)^2+(y-8)^2=a$

$\Rightarrow$ окр-ть с центром в $O_1(6;8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

2.2) $\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow (x-6)^2+(-y-8)^2 = (x-6)^2+(y+8)^2=a \Rightarrow$

$\Rightarrow$ окр-ть с центром в $O_2(6;-8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

2.3) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-x-6)^2+(-y-8)^2=a \\ (x+6)^2+(y+8)^2=a \end{matrix}$ $\Rightarrow$ окр-ть с радиусом $\sqrt{a}$ и центром $O_3(-6;-8)$

2.4) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (-x-6)^2+(y-8)^2=a \\ (x+6)^2+(y-8)^2=a \end{matrix}$ $\Rightarrow$ окр-ть с центром ~~O_4 и рад~~ $O_4(-6;8)$ и радиусом $\sqrt{a}$

рис. 1

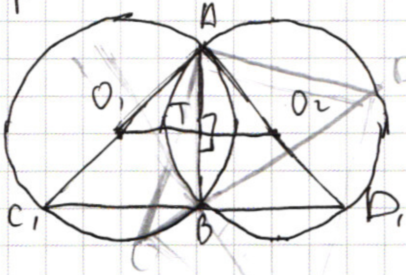
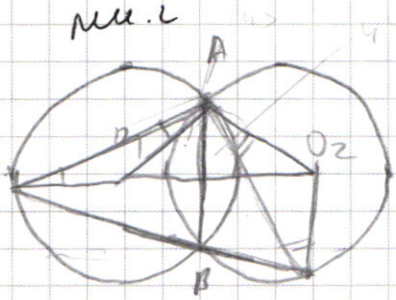
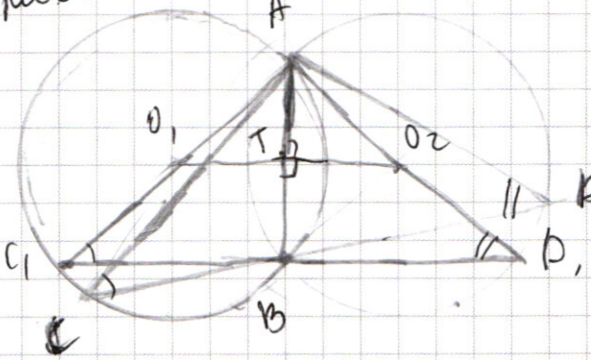


рис. 2



пусть O_1 – центр окр-ти Φ_1, O_2 – центр Φ_2; пусть ~~O_1O_2~~

рис. 3



$O_1O_2 \cap AB = T$;

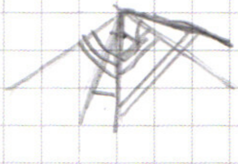
$O_1O_2 \perp AB$

$O_1B = O_1A$, $O_2A = O_2B$; $AT = TB$; пусть $\angle CAB = \alpha$, $\angle DAB = \beta$; пусть $\angle O_1AT = \angle O_2AT = \gamma$, тогда

$\alpha + \beta = 90^\circ$

пусть $C_1 \in \Phi_1$, $C_2 \in \Phi_2$ так, что $O_1 \in AC_1$ и $O_2 \in AD_1$, и ~~$B \in C_1D_1$~~ тогда $\rho(C_1, B) = TA = BT \Rightarrow$

$\Rightarrow B \in C_1D_1$ (см. рис. 1)



$\alpha = \frac{\cup BC}{2}$; $\beta = \frac{\cup BD}{2}$

$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \frac{\cup BC + \cup BD}{2} = 90^\circ$

$\cup BC + \cup BD = 180^\circ$

все усл-ия выполняются в случае, когда ~~∠TAB~~ $\angle CAB = \angle BAD = 45^\circ$ (т.к. C_1 и D_1 совпад. с C и D соотв.)

предположим, что это не так (рис. 3);

$\angle AC_1B = \angle ACB$ (опир. на $\cup AB$) и $\angle AD_1B = \angle ADB$ (опир. на $\cup AB$); пусть $\angle AC_1B = \varphi$, $\angle AD_1B = \tau$, ~~∠CAD =~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{= 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$

$\angle C_1AD_1 = 180^\circ - \varphi - \tau$

$\angle CAD = 180^\circ - \varphi - \tau$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle C_1AD_1$ при любом расположении C и D, удовлетворяющем условию задачи $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle C_1AD_1 = 90^\circ = \angle CAD = \angle O_1AO_2$;

рис. 4

$O_1A = O_2A$; $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle O_1AT = \angle O_2AT = 45^\circ = \angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1 \Rightarrow O_1T = O_2T = AT$

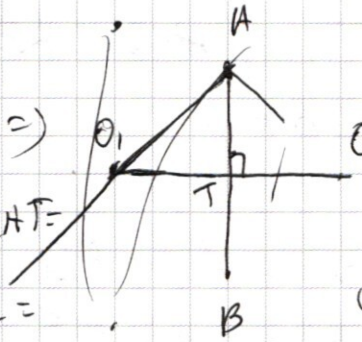
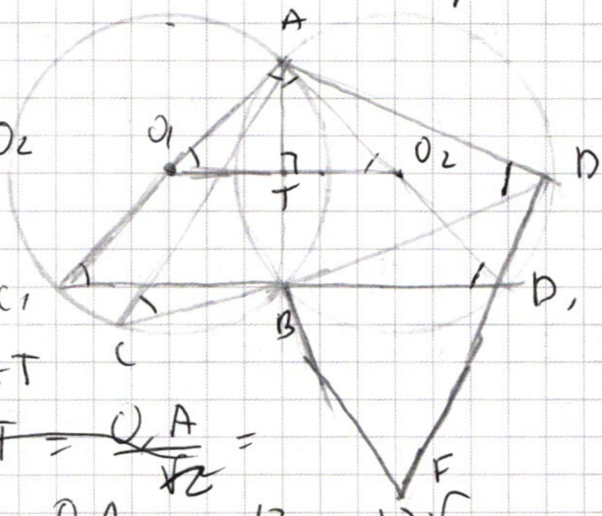


рис. 4



$2O_1T^2 = O_1A^2 \Rightarrow$ $\cancel{O_1T = \frac{O_1A}{\sqrt{2}}} =$

$O_1T^2 = \frac{O_1A^2}{2}$; $O_1T = \frac{O_1A}{\sqrt{2}} = \frac{13}{\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$

$\angle AO_1T = \angle AO_2T = \angle AC_1D_1 = \angle C_1D_1A = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

проведём $FB \perp CD$ (F и A по разные стороны от CD) так, что $BF = BD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(0) = 1 + 4 \cdot 3^{81}$ $\quad \cancel{\int 3^x = \frac{3^x}{\ln}}$

$\cancel{g(0)}\; g(0) = 85 < f(0)$

$\int (g(x) - f(x))\, dx = \cancel{\int (3^x + 4 \cdot 3^{81}}$

$= \int (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4t)\, dx =$

$= 85x + \frac{(3^{81}-1)x^2}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} - 4tx =$

$= 85x + \frac{(t-1)x^2}{2} - \frac{3^x}{\ln 3} - 4tx$ — ли. прод. упр. 18.

№3 $\quad \cancel{x^2\ (x^4 = x^6}$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} -xy > 0 \\ y > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{+x > 0} \\ y > 0 \end{cases} \cancel{\Rightarrow x < 0}$ $\quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$(-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} =$

$= \cancel{(\lg(-x))^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}}$ $\quad 10^{\lg(-x) \cdot \lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$

$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} (-x)^{\lg y}$

$x^4 = (-x)^4$

$\frac{(-x)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} (-x)^{\lg y}$

$\frac{(-x)^{4\lg y}}{(-x)^{\lg y}} = \frac{(-x)^{\lg(-x)}}{y^{2\lg y}}$

$$(-x)^{3\lg y} = \frac{(-x)^{\lg(-x)}}{y^{2\lg y}}$$

— — —

№ 7

$g'(x) = 3^{81} - 1$

$f'(x) = 3^x \ln 3$ и

$3^x \ln 3 = 3^{81} - 1$

$3^x = \frac{3^{81}-1}{\ln 3}$

$x = \log_3\left(\frac{3^{81}-1}{\ln 3}\right)$ – точки, ~~что~~ в к-ой расстояние между гр-ми ф-ий $f(x)$ и $g(x)$ максимально

$x = \log_3\left(\frac{3^{81}-1}{\ln 3}\right) = \log_3(3^{81}-1) - \log_3(\ln 3) =$

$= \log_3(3^{81}-1) - \frac{\ln(\ln 3)}{\ln 3} =$

$= \log_3(3^{81}-1) - \frac{\log_{(\ln 3)}(\ln 3)}{\log_{(\ln 3)} 3} =$

$= \log_3(3^{81}-1) - \frac{1}{\log_{(\ln 3)} 3}$

$\log_3(3^{81}-1) \in (\log_3 3^{80}; \log_3 3^{81}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3(3^{81}-1) \in (80; 81)$

$\ln 3 > 1$

$\frac{1}{\log_{(\ln 3)} 3}$ ~~> 0~~ $\Rightarrow \in (0; 1)$

$\Rightarrow x \in (81; 82)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle CAB$

$100 = 169 \cdot 2 + AC^2 - 2 \cdot 10 \cdot AC \cdot \frac{12}{13} \Rightarrow$

$\cancel{100} = 50 = 169 + \frac{AC^2}{2} - \frac{10 AC \cdot 12}{13}$

$-119 = \frac{AC^2}{2} - \frac{120 AC}{13}$

пусть $AC = x$; тогда

$-238 = x^2 - \frac{120x \cdot 2}{13} \quad | \cdot 13$

$-3294 = 13x^2 - 240x$

$13x^2 - 240x + 3294 = 0$

— — — — — —

№1

Продолжение.

I. Выберем любые четыре разряда числа, расставим в них пятёрки. Посл-ть не важна => можем выбрать

$\frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$-ю способами

~~Б~~ в одну из оставшихся ячеек поставим единицу. Тогда всего имеем $70 \cdot 4 = 280$ способов расстановки. В оставшиеся ячейки расставим тройки. Это кол-во означает для случая, когда нет девятки.

5555 9 3 1 1

II. Если ~~его~~ в записи числа есть девятка, то выберем расстановку пятёрок 70-ю способами, затем

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

d) $BC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \angle y$

$BC^2 = 2R^2(1 - \cos \angle y)$

$1 - \cos \angle y = \frac{BC^2}{2R^2}$

$\cos \angle y = 1 - \frac{BC^2}{2R^2} = 1 - \frac{10^2}{2 \cdot 13^2} = 1 - \frac{100}{2 \cdot 169} = 1 - \frac{100}{238} =$

$= 1 - \frac{50}{169} = \frac{169 - 50}{169} = \frac{119}{169}$

$\cos \angle CO_1A = \cos\left(90^\circ + \arccos \frac{119}{169}\right) =$

$= -\cancel{\cos} - \sin\left(\arccos \frac{119}{169}\right) = -\sqrt{1 - \left(\frac{119}{169}\right)^2}$

$AC^2 = 2R^2(1 - \cos \angle CO_1A) = 2R^2\left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{119}{169}\right)^2}\right) =$

$= 2 \cdot 169\left(1 + \sqrt{1 - \frac{119^2}{169^2}}\right)$

$AC = 13\sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{119^2}{169^2}}\right)}$

$\frac{\sin \angle ACB}{AB} = \frac{\sin \angle KAB}{BC}$

$\sin \angle CAB = \frac{BC \sin \angle ACB}{AB} = \frac{10}{13\sqrt{2}} \cdot \sin 45^\circ = \frac{10}{13\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2} =$

$= \frac{10}{13 \cdot 2} = \cancel{\frac{5}{1}} \; \frac{5}{13}$

~~cos~~ $\cos \angle CAB = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{169 - 25}{169}} = \frac{12}{13}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)