МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4a^{2\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg\frac{a^2}{2}}$

$4a^{2\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg\frac{a}{2}} \cdot a^{\lg a}$

$4a^{\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg a}$

$(4a)^{\lg a} \cdot (4a)^{\lg\frac{1}{2}} = a^{\lg 4}$

$4^{\lg a} \cdot (4a)^{\lg\frac{1}{2}} = 1$

$4^{\lg a + \lg\frac{1}{2}} \cdot a^{\lg\frac{1}{2}} = 1.$

$(10^{\lg 4})^{\lg a + \lg\frac{1}{2}}$

$(\frac{1}{2}a)^{\lg 4} \cdot (\frac{1}{2})^{\lg a} = 1.$

$a = 10^{\lg a}$

$(\frac{1}{2})^{\lg 4} \cdot 4^{\lg a} = (\frac{1}{2})^{\lg 4}$

$2^{2\lg 4} = 2^{-\lg 4}$

$\left(\frac{a^4}{(4-a)^2}\right)^{\lg(4-a)} = a^{\lg a(4-a)}$

$a^{\lg(4-a)^4 - \lg a(4-a)}$

$a^{\lg\frac{(4-a)^3}{a}} = (4-a)^{\lg(4-a)^2}$

$a^{\lg(4-a)^2 + \lg\frac{4-a}{a}}$

$\left(\frac{a}{4-a}\right)^{\lg(4-a)^2} \cdot a^{\lg(\frac{4-a}{a})}$

$4^{\lg 2} = 2^{\lg 4}$

$2^{\lg}$

$\lg_{10}\frac{1}{2} = x.$

$\log_{10} 2 = -x$

$\log_{10} 4 = -2x$

$\log_4 10 = \frac{1}{-2x}$

$-2x = \frac{1}{\log_4 10}$

$\left(\frac{4^4}{4}\right)^{\lg 2} = 4^{\lg 8}$ $\quad x = \frac{1}{-2\log_4 10}$

$4^{3\lg 2} = 4^{\lg 8}$

$4^{\lg 8}$

$\frac{a^{2\lg a + 2\lg\frac{1}{2}}}{a^{\lg a^2 + \lg\frac{1}{2}}}$ $\quad \frac{a^{\lg a^2 + \lg\frac{1}{4}}}{a^{\lg a^2 + \lg\frac{1}{2}}}$

$\lg\frac{a^2}{4} - \lg\frac{a^2}{2}$ $\quad \frac{a^{\lg\frac{1}{4}}}{a^{\lg\frac{1}{2}}}$ $\quad \frac{a^a}{a^b} = a^{a-b}$

$\lg\frac{a^2}{4} + \lg\frac{2}{a^2}$ $\quad a^{\lg\frac{1}{4} - \lg\frac{1}{2}}$

$\lg\frac{1}{2}$ $\quad \frac{(\frac{1}{4})^{\lg a}}{(\frac{1}{2})^{\lg 4}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

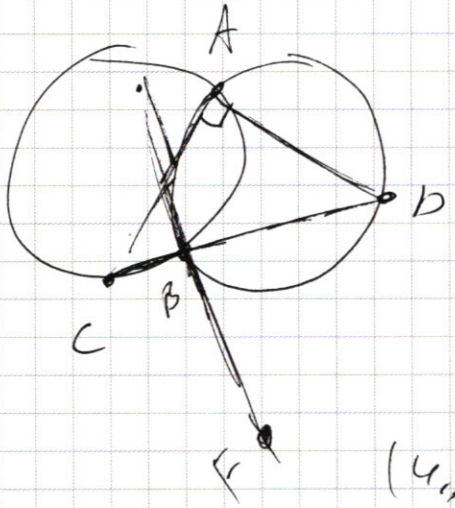
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{a \pm \sqrt{17}}{2}$ $\quad \frac{\pm\sqrt{17}}{2} - 4,5 = x$ $\quad \boxed{\frac{\sqrt{17}}{2} - 4,5}$

$\frac{\pm\sqrt{17}}{2} + 0,5 = y$ $\quad \frac{\sqrt{17}-9}{2} = x$ $\quad \frac{\sqrt{17}-1}{2} = y$

$x = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$ $\quad y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$



$\frac{(\sqrt{17}-9)^2}{(\sqrt{17}-1)^2}$ $\quad \lg \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$ $\quad \lg \frac{1}{4}$ $26-10\sqrt{17}$

$(4,5)^2$

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{11}$

$y < 85 + (3^{11}-1)x$

$\cos(a+b)\cos(a-b)$

$45 \times 45 = 225$

180

225

$2\cos a\cos b - \sqrt{2}\cos 2a =$

~~$2\cos a\sin b$~~

$2\sin a\cos b.$

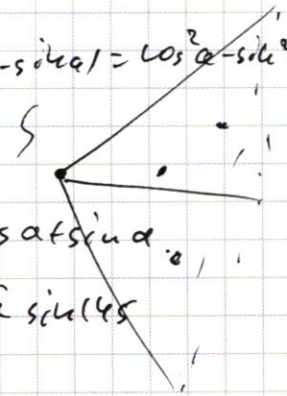
$\cos(a+b) + \cos(a-b) - \sqrt{2}\cos(a+b+a-b)$

$= \sin(a+b) + \sin(a-b)$

$a = 5x$

$b = 2x$

$\sqrt{2}\cos^b(\cos a - \sin a) = \cos^2 a - \sin^2 a$



$\sqrt{2}\cos b = \cos a + \sin a$

$\sqrt{2}\cos b = \sqrt{2}\sin(45$

~~$\cos a\cos b - \sin a\sin b$~~

$2\cos a\cos b - \sqrt{2}\cos 10x =$

$= 2\sin a\cos b$

$\sqrt{2}\cos a\cos b - \sqrt{2}\sin a\cos b = \cos 2a$

~~$\cos b \sin(45^\circ - a)$~~

$\cos b \sin(45^\circ - a) = \cos 2a$

$\sqrt{2}\cos b(\cos a - \sin a) = (\cos^2 a - \sin^2 a)$

$\frac{\sin(90^\circ - 2a)}{2\cos a}$

$\sqrt{2}\cos b = \cos a + \sin a$

$(8k+1)28$

$(4k+1)20$

$(8k+1)12$

$2\cos^2 b = 1 + \sin 10x$

$\cos 4x = \sin 10x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x-6-y \geq 0$

$x-6+y \geq 0$

2) $x-6-y<0$

$x-6+y>0$

$y+6-\cancel{x}\cancel{x}-6+y$

$2y=12$

$y=6$

$x-12<0$

$x>0$

$\boxed{0<x<12}$

$\boxed{y=6}$

$x-y \geq 6$

$x+y \geq 6$

$2x-12=12$

$\boxed{x=12}$

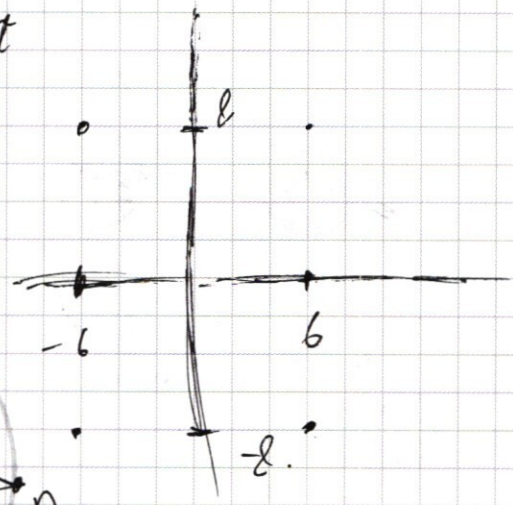
$12-y \geq 6$

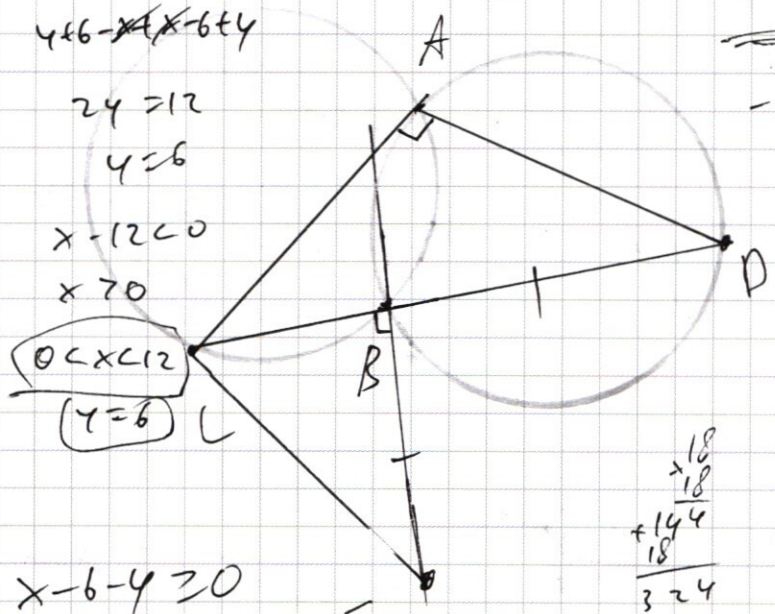
$12+y \geq 6$

$6-y \geq 0$ $y \leq 6$

$6+y \geq 0$ $y \geq -6$

$\boxed{-6 \leq y \leq 6}$





524
-146
520

14
$\times 46$
56
14

$c^2+(c+\sqrt{2}x)^2=26^2$

18
$\times 18$
144
$+18$
324

360
-16

$x^2+y^2=26^2$

$c+\sqrt{2}x^2+z$

1) $x-6-y \geq 0$

1/1) $x-6+y \geq 0$

$x=12$

$-6 \leq y \leq 6$

1/2) $x-6+y<0$

$-2y=12$

$y=-6$

$\boxed{0 \leq x<12}$

2) $x-6-y$

$3^x+4\cdot 3^{81}<85+3^{81}x-x$

$3^x+x<3^{81}(x+4)+85$

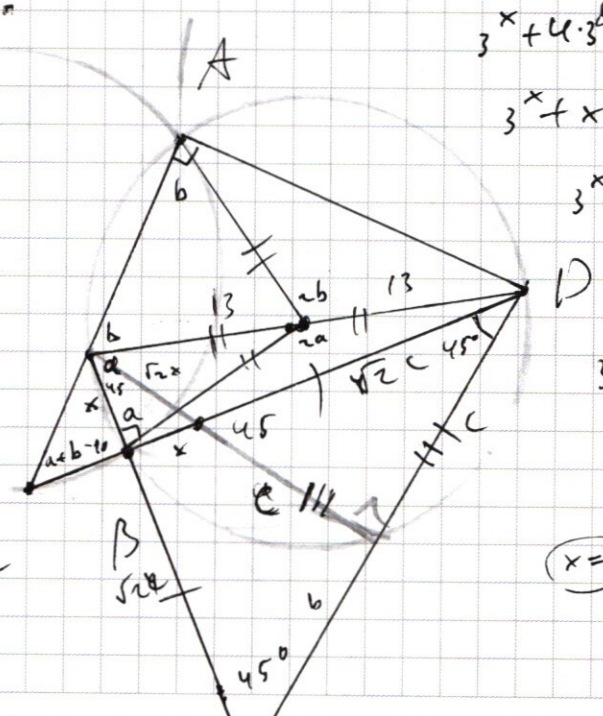
$3^x+x<3^{81}+81+3^{81}x+4\cdot 3^{81}$

$3^x-81<3^{81}(x+4)$

$-x+4$

$3^x-81<(3^{81}-1)(x-4)$

$x=4$ $\cancel{x}>0$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a^2+(b+c)^2=26^2$

$d^2+b^2=26^2$

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{9}$

$\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}$

$2\cdot(\sqrt{2}y+x)^2=(\sqrt{2}x+y)^2$

$3^x+4\cdot3^{81}<85+(3^{81}-1)x$

$3^x<85+4\cdot3^{81}+(3^{81}-1)x$

$3^x-81<$

$81+4\cdot3^{81}$

$81+4\cdot3^{81}$

$3^x=e^{\ln3^x}=e^{x\ln3}$

$e^{x\ln3}\cdot\ln3$

$a=3^x+4\cdot3^{81}$

$a'=3^x\cdot\ln3$

$b'=3^{81}-1$

a' увеличивается

b' положит.

$y^2+(\sqrt{2}x+y)^2=x^2+(\sqrt{2}y+x)^2$

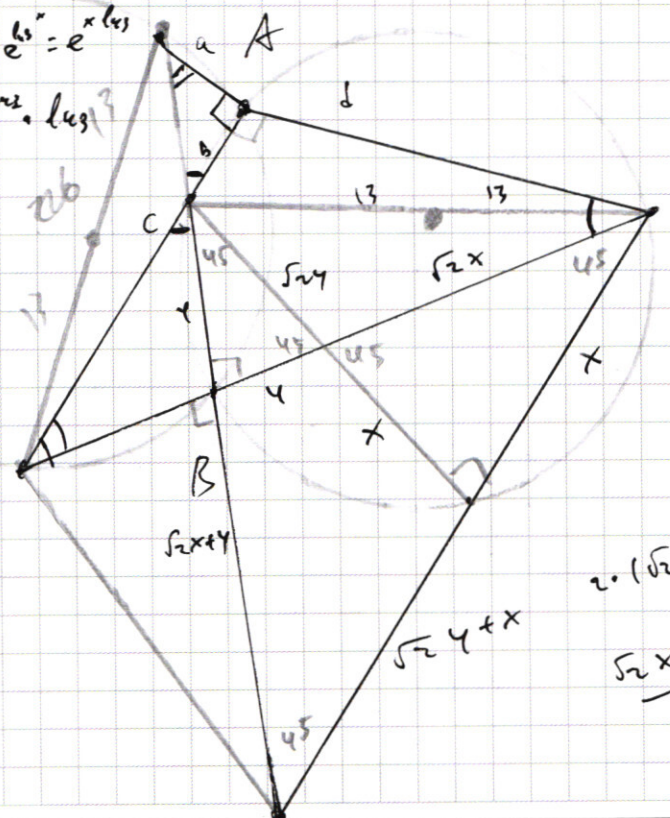
$y^2+2x^2+2\sqrt{2}xy+y^2=x^2+2y^2+2\sqrt{2}xy+x^2$

$2x^2+2y^2+2\sqrt{2}xy=26^2$

$x^2+y^2+\sqrt{2}xy=13\cdot26$

$2\cdot(\sqrt{2}x+y)^2=(x+a)^2$

$\frac{\sqrt{2}x+y}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}y+2x}\cdot\frac{x}{x}=1.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_8 = 16825$

$\frac{3^{a}-1}{a} > \frac{3^{81}-1}{81}$

$16825 : 5 = 3325$, -15, 18, -15, 32, 35, 25

$3325 : 25 = 133$, -25, 82, -75, 125

$5^3 \cdot 133$

$133 : 5 = 26$, -10, 33

$5^4 \cdot 26$

$5^4 \cdot 3^3$

$\boxed{5^4 \cdot 3^3}$

$280 \times 3 = 840$

$25 \times 25 = 125 + 50 = 625$

$625 \times 26 = 3750 + 1250 = 16825$

4 пятерки

$\cos a \sin a$, $\cos b \sin b$, $\times 4$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \sin a$

синус, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ кос

$3^3 = 1333$

$3^7 = 1913$

122, 212, 221

C_4^2

$\frac{3!}{2!1!}$

$\cos a + \cos b - \sqrt{2}\cos(a+b) = \sin a + \sin b$

$\frac{8!}{4!3!} =$ 8 чел

$\cos a \cos b - \sqrt{2}(\cos a \cos b - \sin a \sin b) = \sin a + \sin b$

$\cos a + \cos b - \sqrt{2}\cos a \cos b = \sin a + \sin b - \sqrt{2}\sin a \sin b$

$\frac{8!}{4!2!}$

$\frac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6}{6} + 1 \cdot 7$

$x + z - \sqrt{2xz} = y + t - \sqrt{2}yt$

$\sin(135^\circ - a) + \sin(135^\circ - b) = \sqrt{2}\cos(a+b)$

$84 + 28 = 112$

$\frac{8!}{4!}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)$

$\frac{8!}{4!} \cdot \frac{4}{6}$

$\frac{8!}{36}$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 + 3^{81}x - x$

$28 \times 4 = 112$

$8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4$

$40 \cdot 28$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} > 81 + 4 + 3^{81}x - x$

$3^x > 81 - (x-4) + 3^{81}(x-4)$

$3^x - 81 > (3^{81} - 1)(x-4)$

$81(3^{x-4} - 1)(3^{81} - 1)(x-4)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cos a + \cos b - \sqrt{2}\cos(a+b) = \sin a + \sin b$

$\log_x ab = \log_x a + \log_x b$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin a$

$\sin(45^\circ - a) \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}$

$(4x^2)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg\frac{x^2}{2}}$

$4a^{2\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg\frac{a^2}{2}}$

$\sin(45^\circ - a) + \sin(45^\circ - b) = \cos(a+b)$

$\cos a + \cos b - \sqrt{2}\cos a\cos b = \sin a + \sin b - \sqrt{2}\sin a\sin b$

$(2a)^{2(\lg\frac{a}{2})}$

$(2a)^{\lg\frac{a^2}{4}} = a^{\lg\frac{a^2}{2}}$

$\left(\frac{x^4}{4^2}\right)^{\lg 4} = (-x)^{\lg(-x4)}$

$(4a)^{\lg\frac{a}{2}} = a^{\lg\frac{a^2}{2}}$

$4a^2$

$\left(\frac{x^4}{4^2}\right)^{\lg 4} = (-x)^{\lg(-x/2)}$

$x^{\lg ab} = (x^{\lg a})^{\log_a b}$

$\log_{10} a \cdot \log_a b = \log_{10} b$

$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$

$\log_a b = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}$

$D = (x+8)^2 + (4x^2 + 16x)2$

$1)\left(\frac{x^4 \cdot 4}{x^2}\right)^{\lg(-\frac{x}{2})} =$

$x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$9x^2 + 48x + 64$

$(3x+8)^2$

$= (-x)^{\lg(\frac{x^2}{2})}$

$y_1 = \frac{x+8 - (3x+8)}{4}$

$y_2 = \frac{x+8+(3x+8)}{4}$

$(4x^2)^{\lg(-\frac{x}{2})}$ $x \le 0$

$= (-x)^{\lg(\frac{x^2}{2})}$

$y_1 = \frac{x+8-3x-8}{4}$

$\boxed{\frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2}}$

$\boxed{y_2 = x+4}$

$(2a)^{2\lg a} \cdot (4a^2)^{\lg\frac{1}{2}} = a^{2\lg a} \cdot a^{\lg\frac{1}{2}}$

$2^{2\lg a} \cdot (4a)^{\lg\frac{1}{2}}$

$4^{\lg a} \cdot 4a^{\lg\frac{1}{2}} = 1.$

$4^{\lg a} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложим 16875 на простые делители.

$16875 = 625 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$

То есть цифрами могут быть только 1, 3, 5 и 9 $(=3^2)$

5^4 может получиться только при наличии ровно 4 пятерок в числе.

3^3 может получиться при оставшихся цифрах:

1333 либо 1139

~~Число~~ Количество восьмизначных чисел с цифрами 13335555:

$$\underset{\text{куда поставить 5}}{C_8^4} \cdot \underset{\text{куда поставить 1}}{C_4^1} = \frac{8!}{4!\cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{1!\,3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{3 \cdot 2}} = 280$$

Кол-во восьмизначных чисел с цифрами 11355559:

$$\underset{\text{и } 5^4}{C_8^4} \cdot \underset{\text{и } 1^4}{C_4^2} \cdot \underset{\text{и } 3^4}{C_2^1} = \frac{8!}{4!\cancel{4!}} \cdot \frac{\cancel{4!}}{2!\cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{1!\,1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 840$$

Суммарно: $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$$

$$D = (x+8)^2 + 4\cdot 2\cdot(x^2+4x) = x^2+16x+64+8x^2+32x =$$

$$= 9x^2+48x+64 = (3x+8)^2$$

$$y_1 = \frac{x+8-|3x+8|}{4} \qquad y_2 = \frac{x+8+|3x+8|}{4}$$

Тут вне зависимости от того, больше ли $3x+8$ нуля, в одном корне отбрасываем с $+$, в другом – с $-$.

Можно заменить модуль на скобки.

(1) $y_1 = \frac{x+8-3x-8}{4} = \frac{-2x}{4} = -\frac{x}{2}$

(2) $y_2 = \frac{x+8+3x+8}{4} = \frac{4x+16}{4} = x+4$

(1) $\left(\frac{x^4\cdot 4}{x^2}\right)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(\frac{x^2}{2})}$; $x<0$,

$(4x^2)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg\frac{x^2}{2}}$

~~$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$~~

~~Чтобы~~ Произведем замену: $a=-x$, $a>0$

$(4a^2)^{\lg(\frac{a}{2})} = a^{\lg\frac{a^2}{2}}$

$\cancel{a = 10^{\lg a}}$ $\qquad 4^{\lg\frac{a}{2}}\cdot\frac{a^{2\lg(\frac{a}{2})}}{a^{\lg\frac{a^2}{2}}} = 1$

$\cancel{4^{\lg\frac{a}{2}}\cdot 10^{2\lg a\lg\frac{a}{2}}}$

$4^{\lg\frac{a}{2}}\cdot a^{\lg\frac{a^2}{4}+\lg\frac{2}{a^2}} = 1.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4^{\lg\frac{a}{2}} \cdot a^{\lg\frac{1}{2}} = 1$$

$$a = 10^{\lg a}$$

$$4^{\lg\frac{a}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\lg a} = 1$$

$$2^{2\lg\frac{a}{2}} \cdot 2^{-\lg a} = 1$$

$$2^{2\lg\frac{a}{2} - \lg a} = 1$$

$$2\lg\frac{a}{2} - \lg a = 0$$

$$\lg\frac{a^2}{4} + \lg\frac{1}{a} = 0$$

$$\lg\frac{a}{4} = 0$$

$$\frac{a}{4} = 1$$

$$a = 4$$

$$x = -4$$

$$y = -\frac{x}{2} = 2$$

② $y = x + 4$

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))} \quad ; \quad x+4>0$$

$$\underbrace{x > -4}$$

$$\left.\begin{aligned} -x(x+4) &> 0 \\ -x &> 0 \\ x &< 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow -4 < x < 0$$

$a = -x$; ~~0<~~ $0 < a < 4$

$$\left(\frac{a^4}{(4-a)^2}\right)^{\lg(4-a)} = a^{\lg a(4-a)}$$

$$a^{\lg(4-a)^2 - \lg a(4-a)} = (4-a)^{\lg(4-a)^2}$$

$$a^{\lg\frac{(4-a)^3}{a}} = (4-a)^{\lg(4-a)^2}$$

$$\left(\frac{a}{4-a}\right)^{\lg(4-a)^2} \cdot a^{\lg\left(\frac{4-a}{a}\right)} = 1$$

$$a = 10^{\lg a}$$

$$\left(\frac{a}{4-a}\right)^{\lg(4-a)^2} \cdot \left(\frac{4-a}{a}\right)^{\lg a} = 1$$

$$\left(\frac{a}{4-a}\right)^{\lg(4-a)^2 - \lg a} = 1$$

1) $\frac{a}{4-a} = 1$

$a = 4-a$; $a = 2$; $x = -2$; $y = 2$

2) $\frac{a}{4-a} = -1$, $\lg(4-a)^2 - \lg a \vdots 2$

$a = -4+a$ – неверно

3) $\lg(4-a)^2 - \lg a = 0$

$\lg\frac{(4-a)^2}{a} = 0$

$\cancel{\lg(4-a)^2 = \lg a}$

$\cancel{(4-a)^2 = a}$

$\cancel{16 - 8a + a^2 = a}$

$\cancel{a^2 - 9a + 16 = 0}$

$\cancel{D = 81 - 64 = 17}$

$\cancel{a_1 = \frac{9-}{}}$

$\frac{(4-a)^2}{a} = 1$

$16 - 8a + a^2 = a$

$a^2 - 9a + 16 = 0$

$D = 81 - 64 = 17$

$a_1 = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$ $a_2 = \frac{9+\sqrt{17}}{2} > 4$ не подходит

$x = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$ $y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\begin{cases} x=-4 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ y=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$

№5

$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=9 \end{cases}$; если $(x;y)$ - решение, то $(x;-y)$ - тоже.

Рассмотрим первое уравнение:

1) $x-6-y \geq 0$

1) 1) $x-6+y \geq 0$

$x-6-y+x-6+y=12$

$2x-12=12$

$x=12$

$\left.\begin{array}{l} 12-6-y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 6 \\ 12-6+y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -6 \leq y \leq 6, \\ x=12 \end{array}$

1) 2) $x-6+y<0$

$x-6-y-x+6-y=12$

$-2y=12$

$y=-6$

$\left.\begin{array}{l} x-6-(-6) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ x-6-6<0 \Rightarrow x<12 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 0 \leq x<12 \\ y=-6 \end{array}$

2) $x-6-y<0$

г) 1) $x-6+y \geq 0$

$-x+6+y+x-6+y=12$

$2y=12$

$y=6$

$\left.\begin{array}{l} x-6-6<0 \Rightarrow x<12 \\ x-6+6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0 \leq x < 12 \\ y=6 \end{array}$

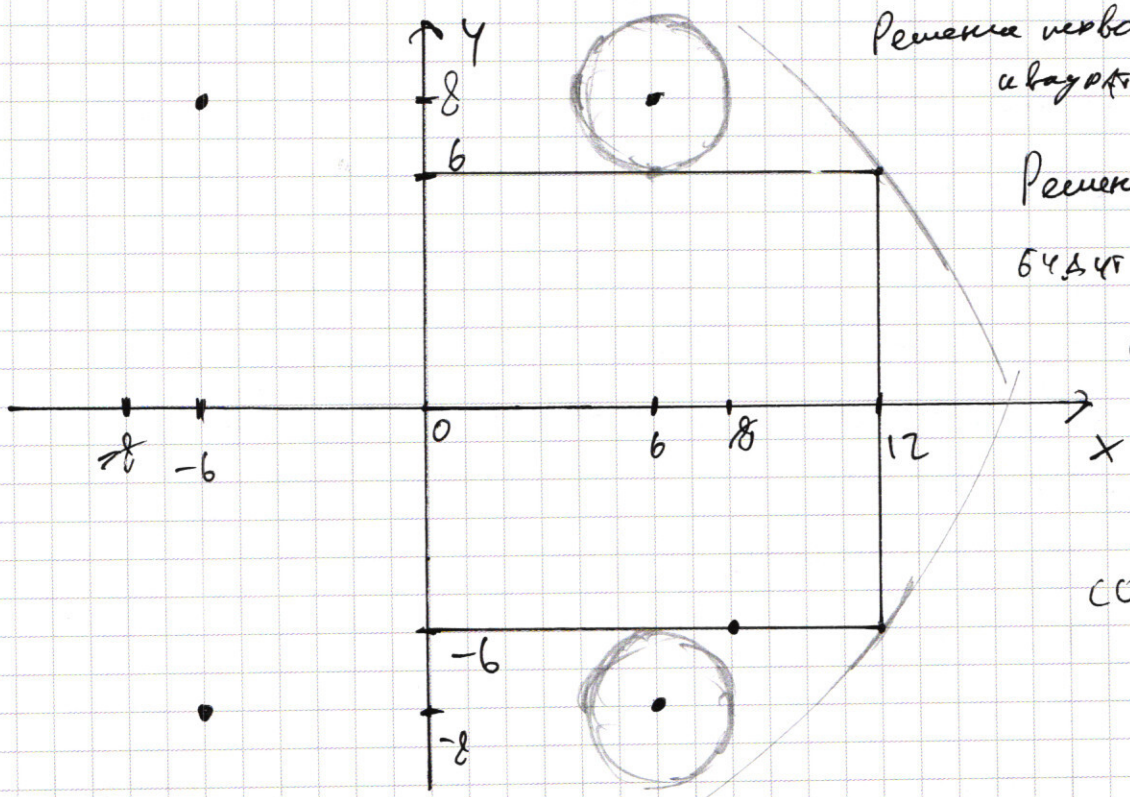
г) 2) $x-6+y<0$

$-x+6+y-x+6-y=12$

$-2x+12=12$

$x=0$

$\left.\begin{array}{l} -6+y<0 \Rightarrow y<6 \\ -6-y<0 \Rightarrow y>-6 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -6<y<6 \\ x=0 \end{array}$



Решения первого: квадрат $(0;6)$; $(12;-6)$

Решением второго будут части окружностей с центрами $(\pm 6; \pm 8)$, располагающиеся в соответствующих четвертях

Если мысленно увеличивать радиус окружностей ($\sqrt{a}$), то поймем, что два корня будет только когда:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) 2 окружности касаются квадрата

2) Только 2 окружности касаются углов квадрата (показано на рисунке)

I случай:

~~alte~~ $a = |8-6|^2 = 4$

Радиус $= 2$

II случай:

$a = (12-(-6))^2 + (6-(-8))^2 =$

$= 18^2 + 14^2 = 324 + 196 = 520$

Ответ: $a = 4$

$a = 520$

№2.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \end{cases}$$

Пусть $a(x) = 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$b(x) = 85 + (3^{81}-1)x$

Чтобы нашлось y, $a(x)$ должно быть строго меньше $b(x)$.

$a'(x) = 3^x \cdot \ln 3$ – увеличивается с $\uparrow x$

$b'(x) = 3^{81}-1$ – постоянна.

При $x \le 0$:

$4 \ge 3^x + 4\cdot 3^{81} \ge 4\cdot 3^{81}$

$4 < 85 + (3^{81}-1)x \le 85$

$4\cdot 3^{81} \le 4 \le 85$ – неверно.

Значит, $x > 0$

~~$a'(x) \ge b'(x)$ значит~~, если в точке пересечения $a(x)$ и $b(x)$ $a'(x)$ будет $\ge b'(x)$, то дальше (при увеличении x) они пересекаться не будут, и $a(x)$ будет $> b(x)$.

Найдем x_0 т.ч. $a(x_0) = b(x_0)$

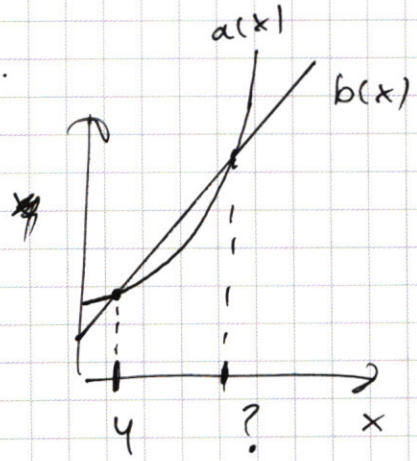
Это $x_0 = 4$

$3^4 + 4\cdot 3^{81} = 81 + 4 + 3^{81}\cdot 4 - 4$

$a'(4) = 3^4 \ln 3 = 81\cdot \ln 3$

$b'(4) = 3^{81} - 1$

График идет примерно так:



Проверим:

$a(0) > b(0)$

$a(1) > b(1)$

$a(2) > b(2)$

$a(3) > b(3)$

То есть все x находятся на $(4; +\infty)$

Найдем x т.ч. $x > 4$ и $3^x + 4\cdot 3^{81} \ge 85 + (3^{81}-1)x$.

$3^x + 4\cdot 3^{81} \ge 81 + 3^{81}x - (x-4)$

$3^x - 81 \ge 3^{81}(x-4) - 1(x-4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$81(3^{x-4}-1) \geq (3^{81}-1)(x-4)$

$$\frac{3^{x-4}-1}{x-4} \geq \frac{3^{81}-1}{81}$$

Пусть $f(x) = \frac{3^x-1}{x}$

Очевидно, что ~~если~~ ~~$f(a)=f(b)$, тогда~~ $a=b \Rightarrow f(a)=f(b)$

$x-4=81$

$x=85$

Проверим:

$3^{85}+4\cdot 3^{81} = 85+85\cdot 3^{81}-85$

$3^{81}(81+4) = 85\cdot 3^{81}$ верно.

$a'(85) = 3^{85}\ln 3$

$b'(85) = 3^{81}-1 < a'(85)$

То есть при $x>85$, $a>b$

$x \in (4; 85)$

Если рассматривать целые числа, то

$x \in [5; 84]$

$3^{81}x - x + 85 - 3^x - 4\cdot 3^{81}$

№ 2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$a = 5x$

$b = 2x$

$\cos(a+b) + \cos(a-b) - \sqrt{2}\cos 2a = \sin(a+b) + \sin(a-b)$

$2\cos a \cos b - \sqrt{2}\cos 2a = 2\sin a \cos b$

$\sqrt{2}\cos b(\cos a - \sin a) = \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

~~$\sqrt{2}\cos b$~~ 1) $\cos a = \sin a$

$a = \frac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z$

~~$b = \frac{2}{5}a = \frac{\pi}{10} + \pi \cdot \frac{2}{5}k, \ k \in Z$~~

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \ k \in Z$

2) $\sqrt{2}\cos b = \cos a + \sin a$

$\sqrt{2}\cos b = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a + \sin a) = \sqrt{2} \cdot \sin(a + 45^\circ)$

$\cos b = \sin(a + 45^\circ)$

$\cos b = \cos(90 - (a + 45^\circ))$

$\cos b = \cos(45^\circ - a)$

1) $b = 45^\circ - a + 2\pi k$

$2x = 45^\circ - 5x + 2\pi k$

$7x = 45^\circ + 2\pi k$

$x = \left(\frac{45}{7}\right)^\circ = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k$

2) $b = -45^\circ + a + 2\pi k$

~~$b = -45^\circ$~~ $2x = -45^\circ + 5x + 2\pi k$

$-3x = -45^\circ + 2\pi k$

~~$x = 15^\circ = \frac{\pi}{12}$~~

$x = 15^\circ + \frac{2}{3}\pi k$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$ $\quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k$

$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k$ $\quad k \in Z$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)