

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

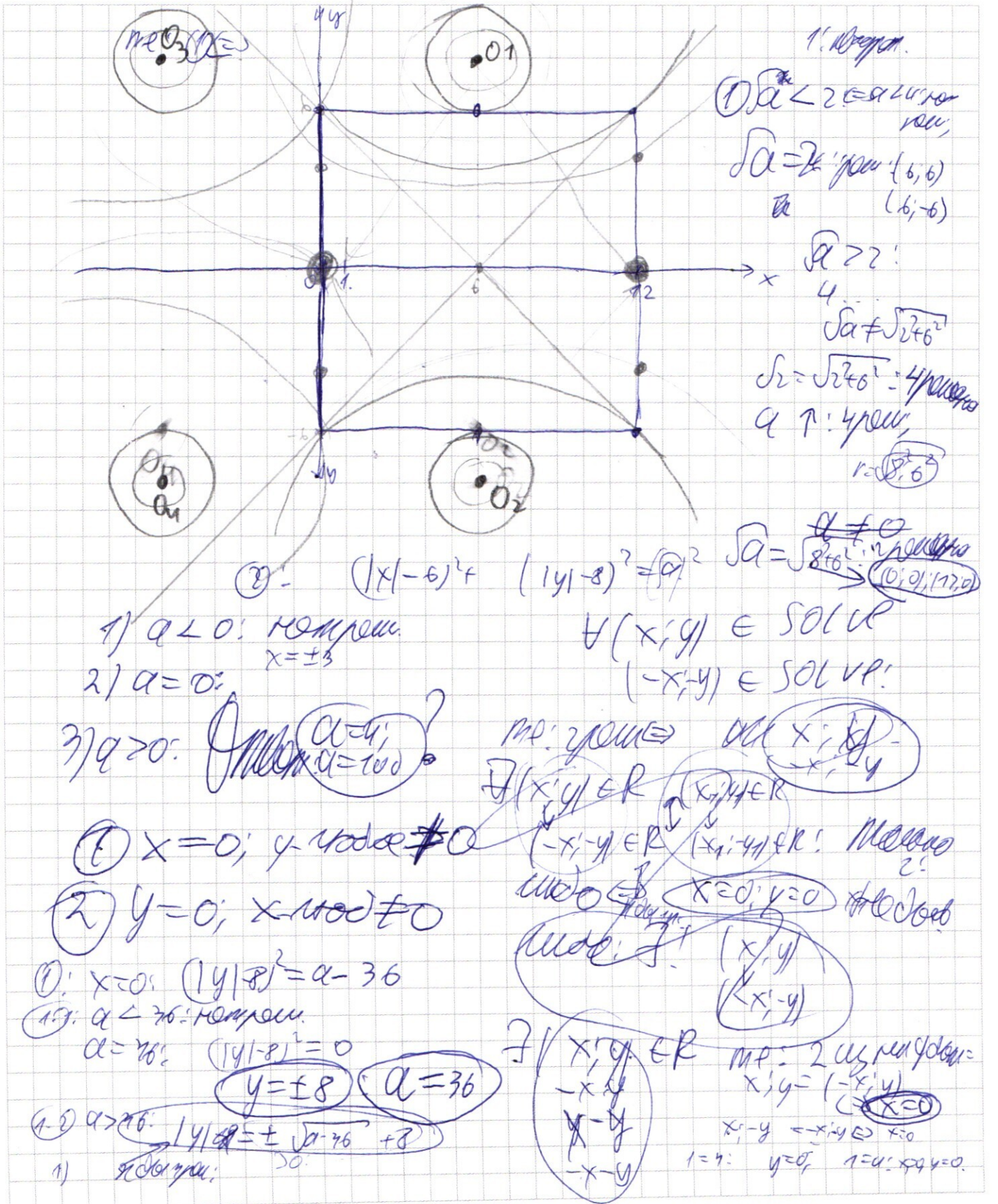
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y \leq 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad | \quad 3^x + 4 \cdot 3^{81} \quad (x; y) \in \mathbb{Z} - ?$$

$$\begin{cases} x=4 \\ x=85 \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y \leq 84 + 3^{81}x - x$$

задана функция x :

$$\begin{aligned} \text{на } (0; y) &= 84 + 3^{81}x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} + 1 \\ &= 85 + 3^{81}x - x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} \\ &= 85 + 3^{81}(x-4) - 3^x - x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &\geq 3^x + 4 \cdot (3^{81} - 1) + 4 &= 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} \\ y &\leq 85 + (3^{81} - 1)x \end{aligned}$$

$$(n+y) = 85 + (3^{81} - 1)x - 4 - 3^x - 4 \cdot (3^{81} - 1)$$

$$(n+y) = 81 + (3^{81} - 1)(x-4) - 3^x$$

найдём $\min x$; $\max x = 0$:

$$f(x) = 81 + (3^{81} - 1)(x-4) - 3^x \geq 0$$

$$x=4: 0 \text{ прогн. у-на}$$

$$f(x) = 81 + (3^{81} - 1)(x-4) \geq 3^x \quad x \geq 4: \text{прогн.}$$

$$x=4: \text{OK}$$

$$\max x = ?$$

$$f(4) = g(4)$$

$$f'(x) = 3^{81} - 1$$

$$g'(x) = x \ln 3$$

$$g'(x) = 3^x \ln 3$$

$$81 + (3^{81} - 1) \cdot 4 \geq 3^{85}$$

$$81 + 3^{86} - 3^{85} \geq 3^{85}$$

$$x=85$$

$$x=4, x=85$$

$$\forall x_0 \in [4, 85] \quad x_0 \in \mathbb{N}$$

$$(n+y) = 81 - 3^x + (3^{81} - 1)(x-4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

всего:

$$81 - 3^4 + (3^{81} - 1)(4 - 4) + 8$$

$$A = \sum_{x=4}^{85} (81 - 3^x + (3^{81} - 1)(x - 4)) = 82 \cdot 81 - \sum_{x=4}^{85} 3^x + (3^{81} - 1) \sum_{x=4}^{85} (x - 4)$$

$$n_{\text{ка}} = 85 - 4 + 1 = 85 - 3 = 82$$

$$m = \sum_{x=4}^{85} (x - 4) = \sum_{x=0}^{81} (x) = 0 + \dots + 81 = \frac{81 \cdot 82}{2} = 81 \cdot 41$$

$$A = 81 \cdot 3^4 + 3^5 + \dots + 3^{85} \quad S = \frac{3^4 \cdot (3^{82} - 1)}{2}$$

$$b_1 = 3^4, \quad q = 3, \quad n = 82$$

$$A = 82 \cdot 81 + (3^{81} - 1) \cdot 81 \cdot 41 - \frac{3^4 \cdot (3^{82} - 1)}{2}$$

$$A = \frac{82 \cdot 81 - 81 \cdot 41 + 81 \cdot 41 \cdot 3^{81} - 81 \cdot \frac{3^{82} - 1}{2}}{81 \cdot 41}$$

$$A = 81 \cdot 41 + 8$$

$$41 \cdot 3^{81} - 3 \cdot \frac{3^{82}}{2} + \frac{1}{2} = 3^{81} \left(4 - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} = 3^{81} \cdot 2,5 + 0,5$$

$$\frac{8 \cdot 3}{2} = \frac{6}{2}$$

$$A = 81 \cdot 41 + 81 \cdot 3^{81} \cdot 2,5 + 81 \cdot 0,5$$

$$A = 81 \cdot 41,5 + 81 \cdot 2,5 \cdot 3^{81}$$

$$A = 3361,5 + 202,5 \cdot 3^{81}$$

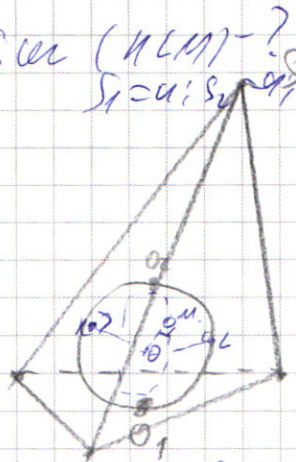
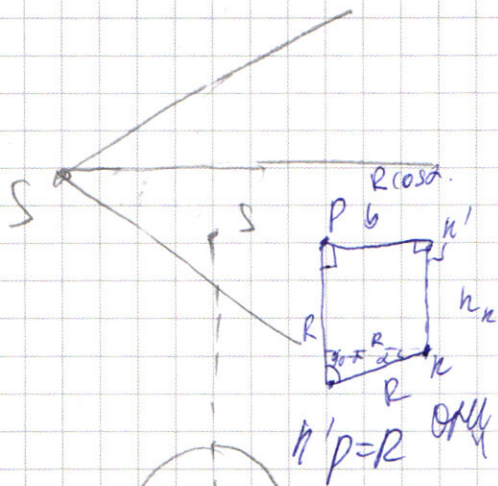
$$\begin{array}{r} \times 2,5 \\ 81 \\ \hline 202,5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 41,5 \\ \hline 4115 \\ + 3320 \\ \hline 3361,5 \end{array}$$

1/4

$\angle KSO - ?$

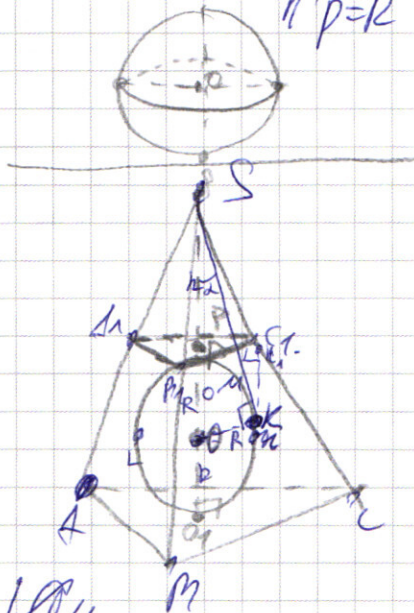
$S_{KLM} - ?$
 $S_1 = a; S_2 = b$



$$\Delta = R \sin \alpha$$

$$h_k = R(1 - \sin \alpha)$$

ордера R -уменьшения γ
 перед. диаметра $= SO$



1) прямая SO : $2R - \text{диаметр } SO \Rightarrow \text{орд.}$
 $(A, M, C) \parallel (A, M, C)$

$$S_{AKMC} = 4'; S_{AMC} = 9$$

$$\frac{SP}{SO} = \frac{PA}{OA} = \frac{PM}{OM} = \frac{PC}{OC} = \text{орд.}$$

$$\frac{AP}{AM} = \frac{AC}{AC} = k$$

$$S_{AMC} = k^2 S_{AKMC}$$

$$k^2 = \frac{S_{AKMC}}{S_{AMC}} = \frac{4}{9}$$

$$k = \frac{2}{3}$$

as орд.

$$\frac{2}{3} = \frac{h}{h+2R}$$

$$t = \frac{h}{R}$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{1}{1+\frac{h}{R}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{t}{t+2}$$

$$5 - \frac{1}{5} = \frac{25-1}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{5}$$

$$S_1 = \frac{4-26}{26}$$

$$3t = 2t + 4$$

$$\frac{4 \cdot 6}{24} = \frac{5}{6}$$

$$t = 4$$

$S_{KLM} - ?$

$$p(k, l, m; (A, M, C)) = \text{орд.}$$

$$\frac{h_k}{S_1} = \frac{26}{26}$$

$$S_k = S_L = S_{KLM}$$

$$\frac{4}{S_1} = \left(\frac{h}{h_k - m} \right)^2 = \frac{h}{R(1 - \sin \alpha) + h} = \frac{4}{5 - \sin \alpha} = \frac{6}{5}$$

$$h_k - m = R(1 - \sin \alpha) + h$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 2x \cos(\frac{3\pi}{4} - 6x) = \frac{1}{2} (\cos(\frac{3\pi}{4} - 3x) + \cos(7x - \frac{3\pi}{4}))$$

$$\cos(\frac{3\pi}{4} - 7x) + \cos(\frac{3\pi}{4} - 7x) + \cos 10x = 0$$

$$b - a = 7x - \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} + 4x = 10x - \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos a + \cos b = \cos(b - a + \frac{3\pi}{2}) = 0$$

$$\cos a + \cos b + \sin(b - a) = 0$$

$$\cos a + \cos b + \sin b \cos a - \cos b \sin a = 0$$

$$\cos a (1 + \sin b) + \cos b (1 - \sin a) = 0$$

$$\frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\cos b} + \tan b - \tan a = 0$$

$$\tan x = 2 \cos 2x \sin(\frac{5x - \pi}{4}) + \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \sin a - \sin(2a) = 0$$

$$2 \cos 2x \sin a - 2 \sin a \cos a = 0$$

$$2 \sin a (\cos 2x - \cos a) = 0$$

$$-2 \sin a + 2 \sin(x + \frac{a}{2}) \sin(x - \frac{a}{2}) = 0$$

$$\sin a = 0 \Rightarrow \sin(\frac{5x - \pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(x + \frac{a}{2}) = 0 \Rightarrow \sin(x + 2(5x - \frac{\pi}{8})) = 0$$

$$\sin(x - 3,5x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\pi - 3,5x + \frac{\pi}{4} = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k + \frac{\pi}{4}}{3,5}$$

$$5x = \pi k + \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi k + \frac{\pi}{4}}{5}$$

$$x = \frac{\pi k + \frac{\pi}{4}}{3,5}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad \text{№3.}$$

$$\begin{cases} 2y^2xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

MP: $x > 0, y < 0$.

$$\left(\frac{x^2}{y} \right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad x > 0, y < 0 \quad x_{\text{н}} = -x$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(xy)} \quad \left(\frac{x^2}{y^2} \right)^{2\lg y} = y^{\frac{1}{2\lg y}}$$

19: $\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = (\lg(-xy) \lg(-x))$

$$\lg y \cdot (4\lg|x| - 2\lg y) = (\lg|x| + \lg y) \lg|x|$$

$a = \lg|x| \quad b = \lg y \quad b \cdot (4a - 2b) = (a + b)a$

19 $4ab - 2b^2 = a^2 + ab \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$

$(a - b)/(a - 2b) = 0$

$$(\lg|x| - \lg y) \cdot (\lg|x| - a \lg y) = 0$$

$\lg|x| - \lg y = 0 \Leftrightarrow y = x$

$\lg|x| - a \lg y = 0 \Leftrightarrow y^2 = -x$

MP: $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ y^2 = -x \end{cases}$

20: $-2y^2 + xy + x^2 + 4x + 8y = 0$

$(x+y)^2 - 4 - 2y^2 + xy + 8y = 0$

$(x+y)^2 - 2(y-2)^2 + 4 + xy = 0$

21: $\left(\frac{x^2}{y} \right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$

22: $\begin{cases} \frac{x^2}{y} > 0 \\ y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \\ -x > 0 \\ -xy > 0 \end{cases}$

$$\left(\frac{x^2}{y^2} \right)^{2\lg y} = y^{\frac{1}{2\lg y}}$$

23: $(a+b)/(a+b) = 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2 - 3\left(\frac{a}{b}\right) = 0$

$t_1 = 1 \quad t_2 = 2$

$\parallel \left(\frac{a}{b} - 1\right) / \left(\frac{a}{b} - 2\right) = 0$

$(a-b)/(a-2b) = 0$

$2y^2 + 8y = 2(y^2 + 4y) = 2 \cdot (y^2 + 4y + 4) - 8$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - 4x - xy - 8y + 2y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + x^2 + 8x + 2x^2 = 0$$

$$4x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 4x(x+1) = 0$$

$$\textcircled{0;0}: y^2 = -x \quad x = -y^2$$

$$y^4 + 4y^2 + y^3 - 8y + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0$$

$$y(y^3 + y^2 + 6y - 8) = 0$$

$$y_1 = 1$$

$$y(y-1)(y^2+2y+8) = 0$$

$$4y = -4 \rightarrow y = -1$$

$$y = 0; y = 1$$

$$x = 0$$

$$x = -1$$

Ответ: $(-1; 1)$ $(-4; 4)$

$$\textcircled{1} |x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

N 5.

групп. ①

$$t = x - 6$$

$$\textcircled{1}: |x-6+y| + |x-6-y| = 12$$

$$|t+y| + |t-y| = 12$$

$$\textcircled{1}: x-y-6=0 \quad x+y-6=0$$

$$y = 6$$

$$x-y-6=0$$

$$y = x-6$$

$$x = 12$$

$$y = 0$$

$$y = -6$$

$$x = 0$$

$$x = 6$$

$$x = 0$$

$$x = 0$$

$$x = 0$$

$$x=6; y=1$$

$$\textcircled{1}: |x-6| < 0; |y-6| > 0$$

$$-x+y+6+x+y-6=12$$

$$y=6$$

$$\textcircled{2}: |x-6| > 0; |y-6| > 0$$

$$2x-12=12$$

$$x=12$$

$$x=0$$

$$x-y-6=x-y+6=12$$

$$y=-6$$

$$x=0$$

$$x=0$$

$$x=0$$

$$x=0$$

$$\begin{array}{r}
 16875 \div 5 = 3375 \\
 3375 \div 5 = 675 \\
 675 \div 5 = 135 \\
 135 \div 5 = 27 \\
 27 \div 3 = 9 \\
 9 \div 3 = 3 \\
 3 \div 3 = 1
 \end{array}$$

1 2 3 4 5 6 7 8

(1, 3, 5, 9)

пр: $16875 = 5^4 \cdot 3^3$: пр-е цифр 3+3=6
 $\neq 0 \Rightarrow$ нет 0 цифр; все ≥ 1
 м.н. $16875 = 5^4 \cdot 3^3$ по цифровому.

Очевидно, то будет равно 4 цифрам = 5 (м.н. $16875 = 5^4 \cdot 3^3$)
 1+1+1 м.н. 4 цифра даст вклад в степень числа ≤ 1 ,
 най-бо спос. расставить 5: C_8^4 — выбрать 4 из 8

Можно 2 вар-та (числа-водоносные-высшие 5-цифры)

1) нет 9-ов в числе: тогда только тройки.
 4-х 3-х: вар-ов = $C_4^3 = 4$ шт

2) очевидно, то 4-ой ≤ 1 т.к. если 9-ая 0-ая, то
 $16875 : 9^2 = 3^4$: а 3-х 3-х 3-х 3-х

значит, ост вар-та: 1 двойка, 1 тройка, 4-х 3-х
 вар-ов: $C_4^1 \cdot C_3^1 = 12$

еще скажу вар-ов расм. 5-ой $\rightarrow$ вар-та
 расм. 7-ой.

еще най-бо вар-ов $A = C_8^4 \cdot (C_4^3 + C_4^1 \cdot C_3^1) =$
 $A = C_8^4 \cdot 16 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} \cdot 16 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 16 = 20 \cdot 16 = 320$

$A = 1120$

Ответ: 1120 вариантов

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

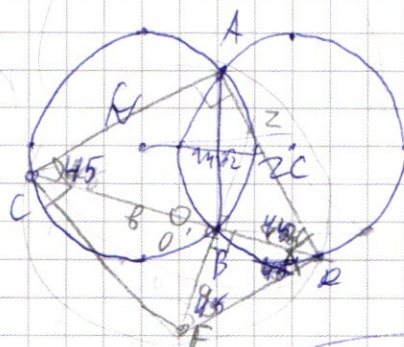
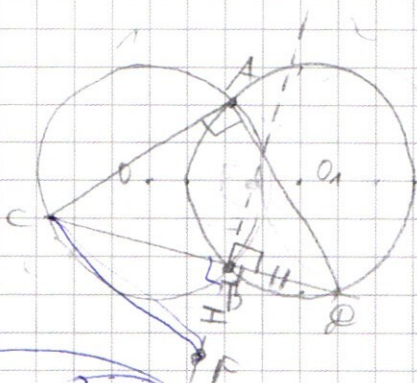
Вариант,

№.

$R=17$

$CF=?$

$BF=132$



$$AC^2 + AD^2 = CD^2$$

$$AM = 17\sqrt{2}$$

$$AM = 17\sqrt{2}$$

$$CF^2 = CB^2 + a^2$$

$$CF = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$CF = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab}$$

$$b=a$$

$$CF = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a^2} = 0$$

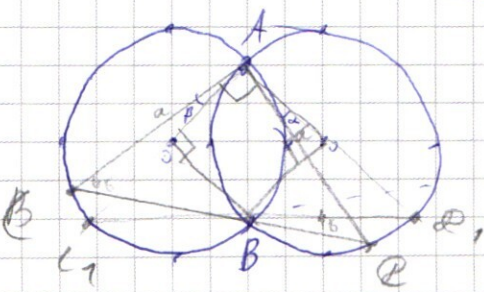
$$AC^2 + AD^2 = (a+b)^2$$

$ACFC$ - трапеция

$$2c^2 = (a+b)^2$$

$$c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

$$AD = AC$$



$$AM = 17\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\angle AOM = 90^\circ$$

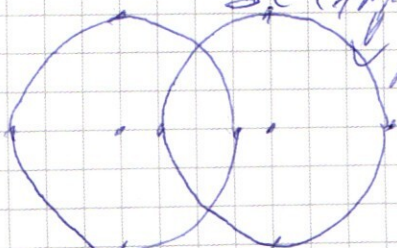
AC - диаметр

$OO_1 AM$ - перпендикуляр

CF - радиус

OC - диаметр CF - радиус $OC \neq CF \Rightarrow \angle F \neq 90^\circ$

параллельно



$$\frac{17\sqrt{2}}{2} = 12.02$$

$$\cos 7x + \cos 3x \stackrel{12.}{=} \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 5x - \sin 5x = \sqrt{2} \sin(-5x + \frac{\pi}{4})$$

$$2 \sqrt{2} \cos 2x \sin(-5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x \cdot \sqrt{2}$$

$$2 \cos 2x \sin(5x - \frac{\pi}{4}) + \cos 10x = 0$$

$$a = 5x - \frac{\pi}{4}$$

$$2a = 10x - \frac{\pi}{2}$$

$$10x = 2a + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(10x) = \cos(2a + \frac{\pi}{2}) = -\sin(2a)$$

$$2 \cos 2x \sin a - \sin 2a = 0$$

$$2 \cos 2x \sin a - 2 \sin a \cos a = 0$$

$$\cos 2x - \cos a = -2 \sin(x + \frac{a}{2}) \sin(x - \frac{a}{2})$$

$$2 \sin a (\cos 2x - \cos a) = 0$$

$$-2 \sin a \sin(x + \frac{a}{2}) \sin(x - \frac{a}{2}) = 0$$

$$a = 5x - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{a}{2} = 2.5x - \frac{\pi}{8}$$

$$\sin a = 0$$

$$\sin(x + \frac{a}{2}) = 0$$

$$\sin(x - \frac{a}{2}) = 0$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$3.5x - \frac{\pi}{8} = \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$-1.5x + \frac{\pi}{8} = -\pi k_3, k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{a}{2} = x + 2.5x - \frac{\pi}{8} = 3.5x - \frac{\pi}{8}$$

$$x - \frac{a}{2} = x - 2.5x + \frac{\pi}{8} = -1.5x + \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{3.5}{2}x = \pi k_2 + \frac{\pi}{8}$$

$$x = \frac{2}{7}\pi k_2 + \frac{1}{28}\pi$$

$$\frac{3}{2}x = \pi k_3 + \frac{\pi}{8}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi k_3 + \frac{1}{12}\pi$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi k_1}{5} + \frac{\pi}{20}, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{7}\pi k_2 + \frac{1}{28}\pi, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi k_3 + \frac{1}{12}\pi, k_3 \in \mathbb{Z}$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi k_1}{5} + \frac{\pi}{20}, k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{7}\pi k_2 + \frac{1}{28}\pi, k_2 \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2}{3}\pi k_3 + \frac{1}{12}\pi, k_3 \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \textcircled{1} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ \textcircled{2} y^2 - xy - x^2 - 4x + 8y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -x > 0 \\ -xy > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

прологарифмируем:

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$$

$$\lg y \cdot (4\lg(-x) - 2\lg y) = \lg(-x) \cdot (\lg(-x) + \lg y)$$

$$a = \lg(-x); b = \lg y$$

$$b \cdot (4a - 2b) = a(a + b)$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab \Leftrightarrow a^2 + 2b^2 - 3ab = 0 \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2\lg y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = y \quad \textcircled{1} \\ -x = y^2 \quad \textcircled{2} \end{cases}$$

используя второе ОДЗ: пропустим второе:

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x + 8y = 0$$

$$\textcircled{1}: -x = y \Rightarrow 2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$\text{ит. решение: } (-2; 2)$$

$$2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x+2) = 0 \xrightarrow{\text{ноль}} \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{2}: -x = y^2 \Rightarrow 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y - 8y = 0$$

$$-y^4 + y^3 + 2y^2 - 4y = 0 \Leftrightarrow y^4 - y^3 - 2y^2 + 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow y(y^3 - y^2 - 4y + 4) = 0 \Leftrightarrow y(y-1)(y^2-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \\ y = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$-x = y^2$$

и 3-й координате

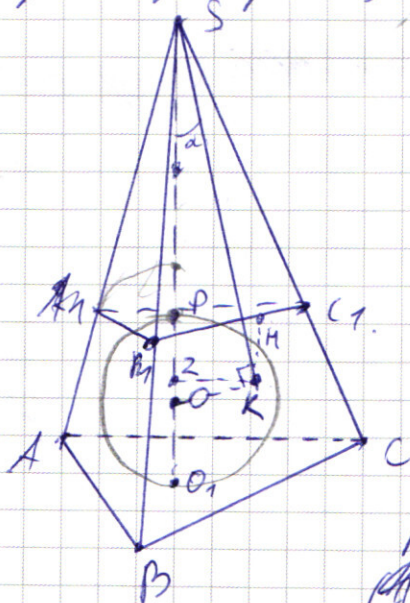
$$\begin{cases} y=0 \Rightarrow x=0 \leftarrow \text{точка } O(0;0;0) \\ y=1 \Rightarrow x=-1 \\ y=2 \Rightarrow x=-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1; -1 \\ 2; -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1; 1 \\ -4; 2 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{cases} x=-2 \\ y=2 \\ x=-1 \\ y=1 \\ x=-4 \\ y=2 \end{cases}$ и 4

т.к. сфера вписана в 3-й угол, то центр ее лежит на линии пересечения дилсекторов 2-го угла; т.к. S-точка лежит на этой линии, то SO-линия пересечения дилсекторов.

Пусть плоскость с боковой площадью пересек. ребра 3-го угла в точках A_1, B_1, C_1 (линейной- A_1, B_1, C_1), тогда AA_1, BB_1, CC_1 - четыре ребра угла, содрж. ребра 3-го угла.



$SP, SO_1 \perp (AMC)$

пусть P-точка кас. сферы $\Pi(A_1B_1C_1)$, O_1 -точка кас. сферы $\Pi(AMC)$
 $(AB_1C_1) \parallel (A_1B_1C_1)$ т.к. эти две-ли
 параллельны SO по условию.

$\perp OO_1, OP \perp (AMC);$

$\perp \perp (A_1B_1C_1)$

O, O_1, P - на 1 прямой;

т.к. $SO \perp (AMC)$ и $OO_1 \perp (AMC) \Rightarrow O, O_1, S$ - на 1 прямой

S, P, O, O_1 - на 1 прямой лежат

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

и 4 продолжение 1

т.н. (АМС) // (А₁М₁С) по А₁М₁С // АМ; А₁С₁ // АС; М₁С₁ // МС
(2//м-ти пересекатом прямого) ⇒ ∠А₁М₁С ~ ∠АМС

пусть

$$\triangle A_1 M_1 C \sim \triangle A M C$$

пусть $k = \frac{SC_1}{SC}$ - коэффициент подобия, ∠А₁С₁ ~ ∠АС; $\frac{A_1 M_1}{AM} = k$

тогда ∠А₁М₁С₁ соответственно ∠АМС (центр радиуса = S;
коэффициент = $\frac{1}{k}$) ⇒ $\frac{S_{\triangle A_1 M_1 C_1}}{S_{\triangle A M C}} = k^2$ (т.н. АМВ к радиусу

или: $\frac{4}{9} = k^2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$

А₁М₁,
АС - выражены
А₁С₁,
∠А₁М₁С₁ = ∠АМС

SP = h; R - радиус окружности

пусть сфера (МС) в точке К;

$$B = ab \sin \alpha$$

SO = h + R; OK = R; ∠KSO = α

из треугольника SKO (OK ⊥ МС) ⇒ $\sin \alpha = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{R+h}$

т.н. (АМС) ~ (А₁М₁С₁) тогда $SC_1/P \sim (SC/O_1)/k$:

$\frac{SC_1}{SC} \sim \frac{SC_1}{SC}$ тогда отношение с центром S и коэффициент $\frac{1}{k}$

переводит в треугольник (S₁М₁С) в S₁М₁С ⇒
все линейные размеры уменьш. в k раз ⇒

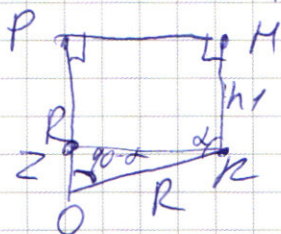
$$\frac{SP}{SO_1} = k = \frac{h}{h+R} = k = \frac{2}{3} \Rightarrow t = \frac{h}{R}$$

$$\frac{t}{t+2h} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3t = 2t + 4h \Leftrightarrow t = 4h$$

Учтено расстояние

$$\sin \alpha = \frac{R}{R+h} = \frac{1}{1+\frac{h}{R}} = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{5}$$

$KH \perp (A_1P_1C_1)$, $H \in (A_1P_1C_1) \Rightarrow P, H, O$: в 1 пл-ти
 $KH = h_1$; $(PO \parallel HK)$



$PO \perp PH$; $KH \perp PH$

$\angle SOK = 90^\circ - \alpha$ (SOK - прямоугольный)

м.п. P, O, K : в 1 пл-ти $\Rightarrow S$: в плоскости

$\angle MKO = \alpha$ (из Σ углов $PHKO$)

$KZ \perp PO$, $Z \in PO$,

тогда $OZ = R \sin \alpha$; $HK = PR = R - R \sin \alpha = R(1 - \sin \alpha)$

$h_1 = R(1 - \sin \alpha)$: м.п. расчетом можно K, L, M $90^\circ (A_1P_1C_1) =$

(м.п. расц с др точками $\Rightarrow (KLM) \parallel APC$

$d(KLM; APC) = h + h_1 = h + R(1 - \sin \alpha)$

м.п. и введя переменную: $\frac{S_{O_1P_1C_1}}{S_{OKLM}} = K_1^2$, где $K_1 = \frac{h}{h + R(1 - \sin \alpha)}$

$$\sqrt{\frac{4}{S}} = \frac{h}{h + R(1 - \sin \alpha)} \Rightarrow \frac{4}{4 + 1 - \sin \alpha} = \frac{4}{5 - \sin \alpha} \quad \frac{SP}{SZ} \quad \text{коэффициент подобия}$$

$$\frac{h}{R} = 4 = 4$$

$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5 - \sin \alpha} = \frac{4}{5 - \frac{1}{5}} = \frac{4 \cdot 5}{24} = \frac{5}{6}$$

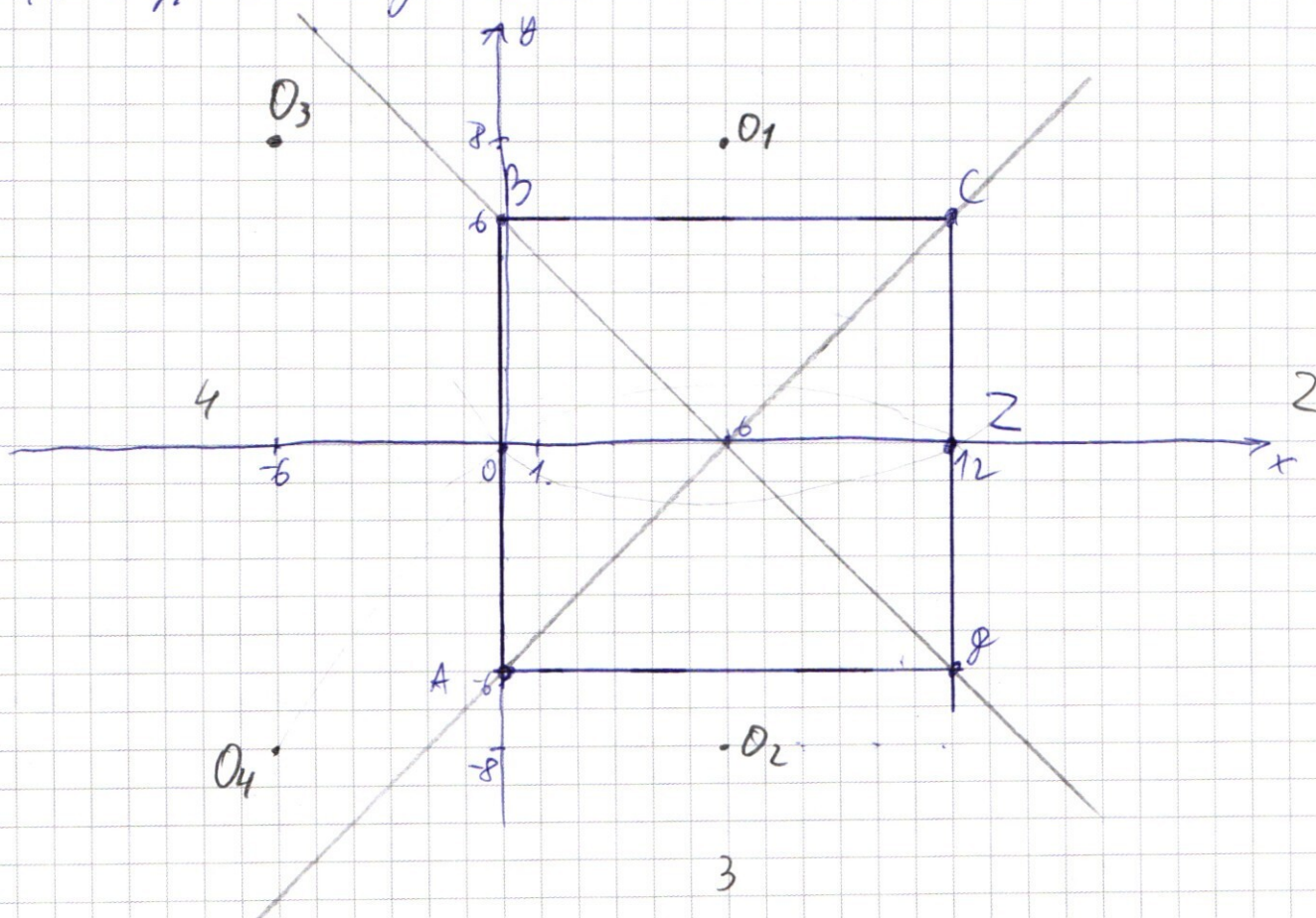
$$\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{5}{6} \Leftrightarrow \frac{25}{36} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow S = \frac{4 \cdot 36}{25} = \frac{144}{25}$$

Ответ: $S = \frac{144}{25}$; $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Уб.
① $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$
② $(|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = 4$

Построим график ①:
п. 1) построим прямые, где 11 обнуляются:
 $|x-6-y| = 0 \Leftrightarrow y = x-6$
 $|x-6+y| = 0 \Leftrightarrow y = 6-x$
пр. 2) разделим на 4 области.



где знаки раскрыты и по формулам;
в 1: $\Leftrightarrow -x+y+6+x+y-6=12 \Leftrightarrow y=6$ в 2: $\Leftrightarrow -x+6+y+x+6-y=12$
в 2: $\Leftrightarrow x-6-y+x-6+y=12 \Leftrightarrow x=12$ в 3: $\Leftrightarrow -x+6+y+x-6-y=12 \Leftrightarrow 0=12$
в 4: $\Leftrightarrow x-6-y-x+6-y=12 \Leftrightarrow y=-6$ Строим график 1:

и 6 продел.
 например: квадрат $AB(2)$

заменим: $O_1 A = O_1 C$; $O_2 A = O_2 B$

$$②: (1 \times 1 - 6)^2 + (1 \times 1 - 8)^2 = 0$$

$a < 0$: не применим,

попробуем это $\forall$ при $x, y > 0$: $(x-6)^2 + (y-8)^2 = a =$
~~это чужие~~

это 4 точки окружности (раск. x, y брахмат
 квадратах хорд хорд; или центр

$\{6; 8\} (-6; 8) (-6; -8) (6; -8)$ и радиус $= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
 они 3 точек в своей квадрате.

дуги построим у себя и радиус:

1) $r < 2$: окруж. не как квадрата $\Rightarrow$ решение

2) $r = 2$: 2 кас, 2 - перес $\Rightarrow$ решения: $(6; -6)$

3) $2 < r \leq 0,22 = \sqrt{6^2 + 8^2}$: окруж. 1 и 2: $(6; 6)$

почти - 4 решения перес. $M(4) \& B(2)$ раз

4) $r \geq 0,22 = \sqrt{6^2 + 8^2}$

1) $\sqrt{6^2 + 8^2} < r < \sqrt{6^2 + 8^2}$: O_2 и O_1 перес. $A(1)$ и $B(2)$ раз
 O_2 и O_1 образуют
 $\downarrow$ 4 решения.

4) $r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$: O_1 и O_2 перес. $A(1)$ и $B(2)$ раз.

окр. O_1 и O_2 только при $x < 0 \Rightarrow$ O_3 перес. $A(1)$ и $B(2)$ раз
 O_3 и O_4 образуют
 $\downarrow$ 4 решения.

2 решения: $(0; 0); (12; 0)$

5) $r > \sqrt{6^2 + 8^2}$: O_1 и O_2 перес. $A(1)$ и $B(2)$ раз
 радиус (они 3 точки в своей квадрате)
 O_3 и O_4 : тоже перес. $\Rightarrow$

$r_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 4$; $r_2 = 10 \Rightarrow a_2 = 100$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 продан т.

Ответ: $\begin{cases} a=4 \\ a=100 \end{cases}$

№7.

xy ∈ Z:

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{целое} \\ 3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{matrix}$$

т.е. левая, правая граница целое, то
нас функция задана. x интерес най-то
целым числ, максимиз $\{3^x + 4 \cdot 3^{81}, 85 + (3^{81} - 1)x\}$
 $K = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} + 1$ най-то

$$K = 85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81} = K(x)$$

проверим: $K(4) = 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 - 3^4 - 4 \cdot 3^{81} = 0$

$$K(85) = 85 + 3^{81} \cdot 85 - 85 - 3^{85} - 4 \cdot 3^{81} =$$

$$= 3^{81}(85 - 4 - 81) = 0$$

проверим, то доказательство короче, но мы не знаем, что

$$K'(x) = 3^{81} - 1 - 3^x \ln x = 0$$

$$3^x \ln x = 3^{81} - 1$$

т.е. $y = 3^x \ln x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3^{81} - 1} = \cos x$

Уже доказано, что $K'(x) = 0$

$$\exists t: K(t) = 0 \text{ и } t \neq 4, t \neq 85$$

и 8 продолжение.

мл: при $x < 4$; $x > 85$: $L > R$: 79 номерной
подмодуль.

мл: на 60 пар:

$$A = \sum_{x=4}^{85} k(x) = \sum_{x=4}^{85} (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81})$$

на 60 пар = $85 - 4 + 1 = 82$ или

$$A = \sum_{x=4}^{85} 85 + (3^{81} - 1) \sum_{x=4}^{85} x - \sum_{x=4}^{85} 3^x - \sum_{x=4}^{85} 4 \cdot 3^{81}$$

$$A = 85 \cdot 82$$

$$k(x) = (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

$$k(x) = (3^{81} - 1)x - 4(3^{81} - 1) - 4 - 3^x + 85$$

$$k(x) = (3^{81} - 1)(x - 4) - 3^x + 81$$

$$A = \sum_{x=4}^{85} k(x) = (3^{81} - 1) \sum_{x=4}^{85} (x - 4) - \sum_{x=4}^{85} 3^x + \sum_{x=4}^{85} 81$$

$$\sum_{x=4}^{85} (x - 4) = \sum_{x=0}^{81} x = \frac{81 \cdot 82}{2} = 81 \cdot 41$$

$$\sum_{x=4}^{85} 3^x : b_1 = 3^4, q = 3, n = 82, S = \frac{3^4 \cdot (3^{82} - 1)}{2}$$

$$\sum_{x=4}^{85} 81 = 81 \cdot 82$$

$$A = (3^{81} - 1) \cdot 81 \cdot 41 - \frac{81}{2} (3^{82} - 1) + 81 \cdot 82$$

$$A = 81 \cdot (41 \cdot 3^{81} - 41 - \frac{3^{82}}{2} + \frac{1}{2} + 82)$$

$$A = 81 \cdot (41,5 + 39,5 \cdot 3^{81})$$

$$41 - \frac{1}{2} = 40,5 = 39,5$$

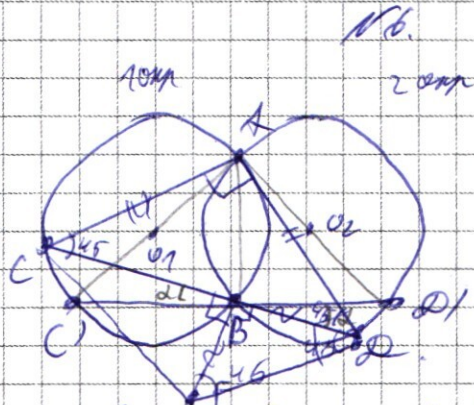
$$\begin{array}{r} \times 4 \\ 395 \\ \times 817 \\ \hline 395 \\ 3160 \\ \hline 31995 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 415 \\ 395 \\ \times 817 \\ \hline 395 \\ 415 \\ 3320 \\ \hline 3361,5 \end{array}$$

$$\text{Ответ: } A = 3361,5 + 3199,5 \cdot 3^{81}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

а)



фра ~~АВ~~

~~фра~~ $\angle ACD = \angle AEB$

т.к. $\angle ACD$ опирается на дугу AB ,
 $\angle AEB$ опирается на ту же дугу AB ;

т.к. $AO_1 = AO_2 = \text{радиусы}$, т.к.
радиусы равны, опираются на одну и ту же дугу,

то $\angle ACD = \angle AEB$. $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AEB$

$AC = AE$; $\angle ACD = \angle AEB = 180^\circ - \angle ADE = 45^\circ$

т.к. $BF = BE$; $\angle BFE = 90^\circ \Rightarrow \angle BFE = \angle BFE = 45^\circ$

$\angle AEF = 90^\circ$; $\Rightarrow AEF$ — прямая линия FE и AC — диаметр

O_1, O_2 — центры из окружностей;

пусть $C' \in O_1O_2$; C' — на O_1O_2 , D' — на O_2O_1

$M \in (C'D')$; тогда C и D — на окружностях O_1 и O_2 соответственно.
Пусть $\angle CMC' = \alpha = \angle DMD'$

$\angle C' = \alpha$; $\angle D' = \alpha$; $\Rightarrow \angle CAD' = \angle ACC'$;

но $\angle CAD' = \angle ACC'$ — это значит, что AC — диаметр окружности O_1 ;
аналогично BD — диаметр окружности O_2 ;

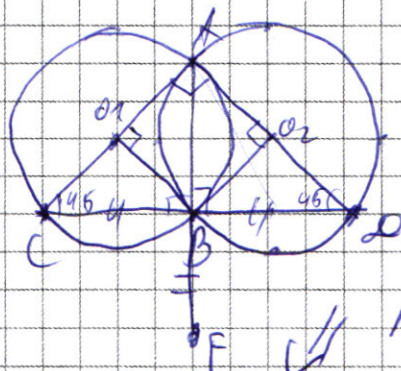
т.к. AC — диаметр, то $\angle AOC = 90^\circ$;

$CD \parallel O_1O_2$; т.к. $AM = 90^\circ \Rightarrow \angle AOM = 90^\circ = \angle AOM$;

т.к. AC — диаметр, то $\angle AOC = 90^\circ$; $\angle AOM = 90^\circ$;

могда: $\angle O_1 A O_2 = 90^\circ = \angle O_1 B O_2$

~~складываю~~
~~из треугольников~~
~~CFP и BFP~~



треугольник, то $\angle 2$

Найдем $\angle C$ при этом
треугольнике, $\angle C = 45^\circ$

найдём

длины BF и CF

$$AB = 13\sqrt{2}$$

$$CM = BM = BF$$

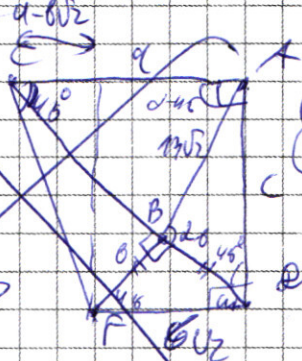
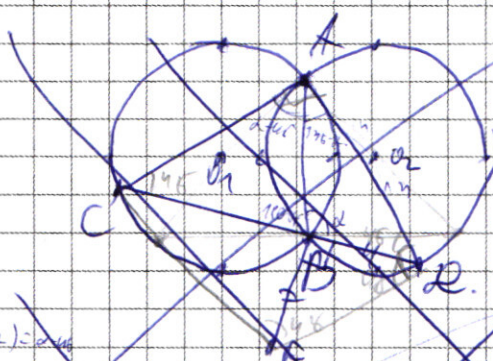
$$CM = AC \cos 45 = 13 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$$

$$CF = \sqrt{CM^2 + BF^2} = \sqrt{13^2 \cdot 2 + 13^2 \cdot 2} = \sqrt{13^2 \cdot 4} = 26$$

Ответ

Ответ: $CF = 26$

или



$$CF^2 = c^2 + (a - b)^2$$

$$CF^2 = c^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$CF = c$$

$$a = 13$$

$$b = 13\sqrt{2}$$

$$\sin \angle A O_1 B = 90^\circ = \angle A O_2 B = \angle O_1 A O_2 = \angle O_1 B O_2$$

$$AB = \sqrt{AO_1^2 + AO_2^2} = 13\sqrt{2} \quad (\text{из } AO_1 \perp O_2 B)$$

$$CF^2 = BF^2 + CM^2 \quad (A = O, \text{ в } F M = 0, F P = 6\sqrt{2}, A R = C)$$

$$\text{Следовательно } CF^2 = CM^2 + 6^2$$

$$\text{необходимо найти } CM: \begin{cases} CM^2 = a^2 + 13^2 - 13 \cdot 13\sqrt{2} \cdot \cos(2 - 45^\circ) \\ C^2 = 13^2 \cdot 2 + 6^2 - 13\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \cos 2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

испр

$$k(\omega) = c' \Rightarrow$$

мех вол в АСМ:

$$kM^2 = k^2 - 2 = cM^2 + c^2 - \sqrt{2} c \cdot cM$$

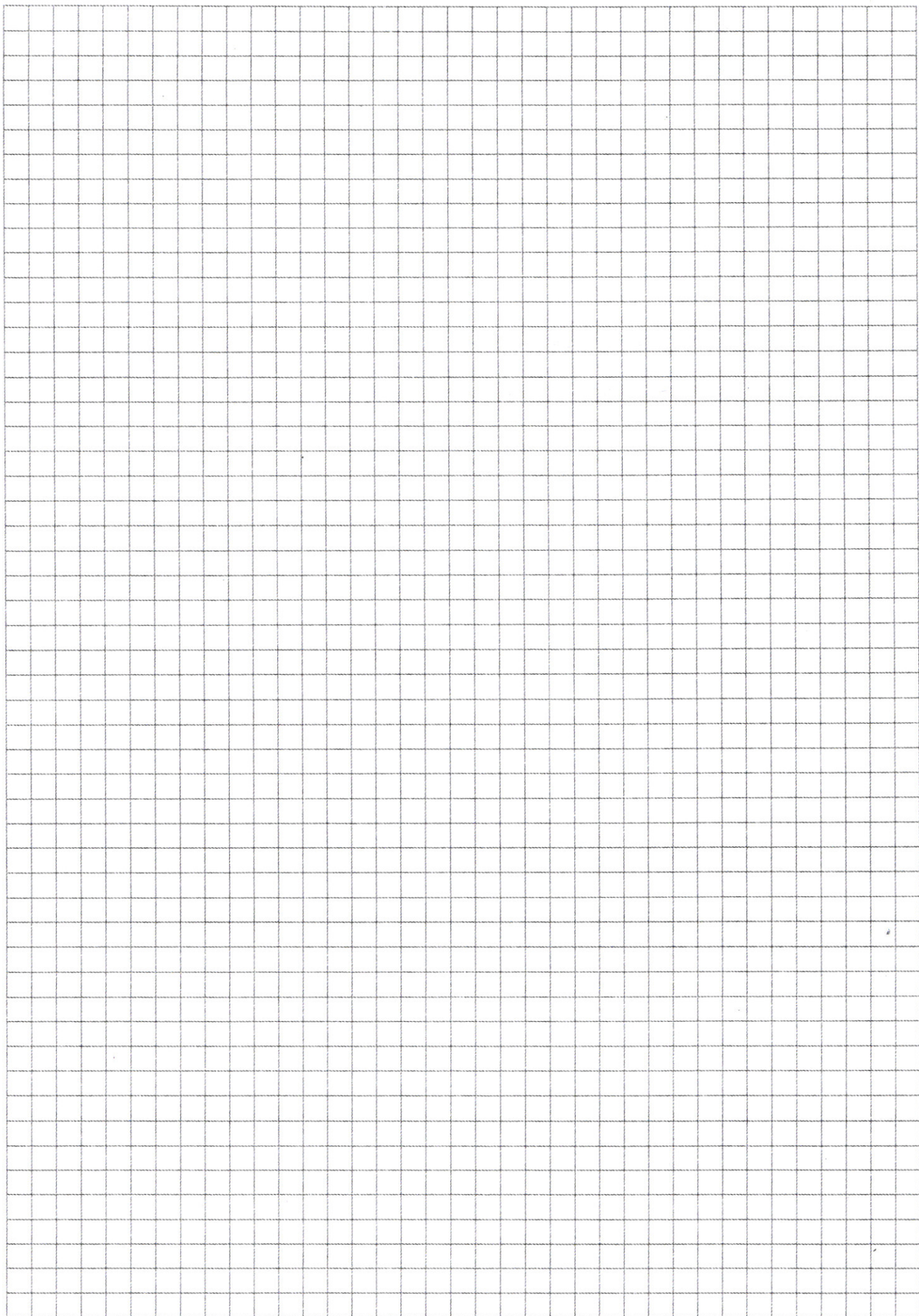
$$q \Rightarrow \text{АСМ: } kM^2 = k^2 - 2 = c^2 + M^2 - \sqrt{2} c M$$

$$M c = c \sqrt{2} - M \Rightarrow c \sqrt{2} - t$$

$$(c \sqrt{2} - t)^2 + c^2 - \sqrt{2} c (c \sqrt{2} - t) = c^2 + 2 c t$$

$$2 c^2 + t^2 - 2 c t \sqrt{2}$$

$$2 c^2 + t^2 - 2 c t \sqrt{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

н.л. ?
 $a_1, a_2, \dots, a_8 : a_1, a_2, \dots, a_8 = 16875 = 5^4 \cdot 3^3$

$$\begin{array}{r} 16875 | 5 \\ 3375 | 5 \\ 675 | 5 \\ 135 | 5 \\ 27 | 3 \\ 9 | 3 \\ 3 | 3 \\ 1 \end{array}$$

кач-во (a₁, ..., a₈):
 топ

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1

распределены
и 7 групп
составе

C_8^5

$C_8^5 = \frac{8!}{5!3!} = 56$

1) вар-ов раз. разм: C_8^4 (м.п. 2 группы из 4-х элементов)
 822 $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$ перебр 3-ки: АВ

Всего: 2;

1) в каждой из C_4^3 вар-ов

2) в каждой из $C_4^1 \cdot C_3^1$ вар-ов

Всего: 10

Ответ $A = C_8^4 \cdot (C_4^3 + C_4^1 \cdot C_3^1)$

$C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = 70$
 $A = 70 \cdot (4 + 12) = 1120$

$2 \cos 2x (\cos 6x \sin 6x) = \cos^2 6x - \sin^2 6x = \cos 12x$

$\frac{2 \cos x}{\sqrt{2}} - \frac{2 \cos 3x}{\sqrt{2}} = 1 - \cos 6x$

$A = 70 \cdot 16 = 1120$

Ответ: 1120

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$
 $\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$

$2 \cos 6x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 6x \cos 2x \Leftrightarrow 2 \cos 2x (\cos 6x - \sin 6x) = \sqrt{2} \cos 10x$
 $\sqrt{2} \cos 10x = \sin 40x + \cos 40x$

$$2\cos 2x (\cos 6x - \sin 6x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 6x - \sin 6x = \sqrt{2} \sin(-6x + \frac{\pi}{4})$$

$$-2\cos 2x \cdot \sqrt{2} \sin(6x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$f(x) = ?$$

$$\cos 2x \sin(6x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} (\sin(7x - \frac{\pi}{4}) + \sin(3x - \frac{\pi}{4}))$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} \cos(3x + 7x) = \sqrt{2} \cdot (\cos 3x \cos 7x - \sin 3x \sin 7x)$$

$$\cos 7x - \sin 7x = \frac{1}{2} \sqrt{2} (\cos 3x - \sin 3x) \quad \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \sin(-3x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} (\sin(-7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(-3x + \frac{\pi}{4})) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin(-7x + \frac{\pi}{4}) + \sin(-3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin(-6x + \frac{\pi}{4}) \cos(x) = \cos 10x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) = \sin 7x + \sin 3x$$

$$a + b - \sqrt{2}ab = c + d - \sqrt{2}cd$$

$$a - c - \sqrt{2}ab = d - b - \sqrt{2}cd$$

$$a(1 - \sqrt{2}b) + b = c(1 - \sqrt{2}c) + d$$

$$1 - \sqrt{2} \cos 3x$$

$$a - c - \sqrt{2}ab = d - b - \sqrt{2}cd$$

$$(a^2 + c^2) + 2a^2b^2 - 2ac + 2\sqrt{2}abc - 2\sqrt{2}a^2b = (d^2 + b^2) + 2c^2d^2 - 2db + 2\sqrt{2}bcd - 2\sqrt{2}d^2c$$

$$\sqrt{2}bc(a - d)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 10x = 2 \cos 5x \cos 5x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \sin 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 6x - \sin 6x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \sqrt{2} \cos 2x \sin(-6x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$f(x) = 2 \cos 2x \sin(6x - \frac{\pi}{4}) + \cos 10x = 0 \quad 10x = 6x - \frac{\pi}{4} + 6x + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(6x - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - 6x) = \cos(\frac{3\pi}{4} - 6x) \quad \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$