

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $16875 = 5^4 \cdot 3^3$, значит наше восьмизначное число будет состоять из цифр 55553331 или 55559311.

Осталось посчитать кол-во перестановок этих цифр.

$$C_8^4 \cdot C_4^1 + C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^1 = \frac{8!}{4!4!} \cdot \left(\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} + \frac{3!}{2!} \right) =$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2} (1 + 3) = 8 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 = 1120$$

Ответ: 1120.

$$8! + 27 + 9 + 3 + 1 =$$

$$= 108 + 12 + 1 = 121$$

№3 $3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$

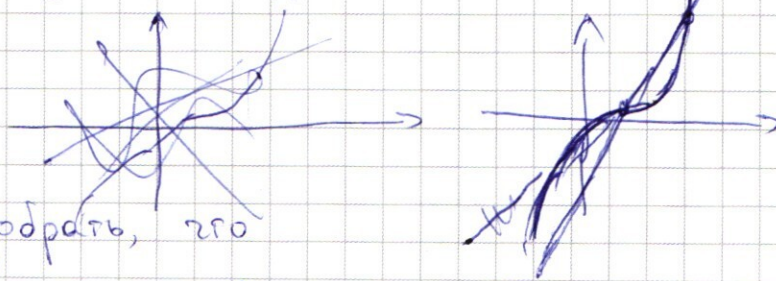
$$3^x - 85 + x \leq y - 85 + x \cdot 3^{81} \quad 3^{81}x - 4 \cdot 3^{81}$$

$3^x - 85 + x < 3^{81}(x - 4)$, а кол-во y = кол-ву
целых чисел в интервале

$$[3^x - 85 + x; 3^{81}(x - 4)]$$

Видно, что обе функции возрастающие,

а их графики



Короче, можно подобрать, что
неравенство верно при $x \geq 4$ и $x < 85$, т.к. при
данных $x \quad 3^x - 85 + x \approx 3^{81}(x - 4)$.

Значит, что кол-во пар, удовлетворяющих системе

столько: $\sum_{x=5}^{84} 3^{81}(x-4) - 3^x + 85 - x = 3^{81} \cdot \left(4 \cdot 80 + \frac{80 \cdot 89}{2} \right) +$

$$+ 85 \cdot 80 - \frac{80 \cdot 89}{2} - \sum_{x=5}^{84} 3^x = 3^{81} \cdot 3880 + 6800 - 3880 - \sum_{x=5}^{84} 3^x$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad (2y)^{4 \lg y} &= (2y)^{\lg 2y^2} y^{2 \lg y} \\
 (2y)^{4 \lg y} &= (2y)^{\lg 2 + 2 \lg y} y^{2 \lg y} \\
 (2y)^{4 \lg y} &= (2y)^{\lg 2} y^{2 \lg y} y^{2 \lg y} \\
 2^{2 \lg y} y^{2 \lg y} &= 2^{\lg 2} y^{\lg 2} y^{2 \lg y} \\
 2^{2 \lg y} - \lg 2 &= y^{\lg 2}
 \end{aligned}$$

$$25 \quad |x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) \quad |x-6-y| \geq 0 \quad \text{и} \quad |x-6+y| \geq 0$$

$$2x - 12 = 12 \quad x = 12$$

$$y \in [-6; 6]$$

$$(12-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$36 + y^2 - 16|y| + 64 = a$$

$$100 + y^2 - 16|y| = a$$

$$y^2 - 16|y| = a - 100$$

при $a = 100$ есть 1 решение,

при $a \in [40; 100)$ 2 решения

$$2) \quad |x-6-y| \leq 0 \quad \text{и} \quad |x-6+y| \leq 0$$

$$-2x + 12 = 12 \quad x = 0$$

$$y \in [-6; 6]$$

$$36 + y^2 - 16|y| + 64 = a$$

$$y^2 - 16|y| = a - 100$$

при $a = 100$ есть 1 решение (всего 2)

при $a \in [40; 100)$ есть 2 решения (всего 4)

$$3) \quad |x-6-y| \geq 0 \quad \text{и} \quad |x-6+y| \leq 0$$

$$x-6-y - x+6-y = -2y = 12 \quad y = -6$$

$$x \in [0; 12]$$

из $\triangle CDF$, где $CD = 34$
 $CF = 26$
 $DF = 24\sqrt{2}$

$$\cos \angle CFD = \frac{34^2 - 24^2 \cdot 2 - 26^2}{2 \cdot 24\sqrt{2} \cdot 26} = + \frac{7\sqrt{2}}{26}$$

$$FK = CF \cdot \cos \angle CFD = 7\sqrt{2}$$

$$DK = 24\sqrt{2} - 7\sqrt{2} = 17\sqrt{2} = AC$$

$$AK \text{ и } CK = \sqrt{26^2 - 7^2 \cdot 2} = \sqrt{578} = AD = 2\sqrt{17}$$

$$AF = \sqrt{34^2 + 578} = \sqrt{1734} = 17\sqrt{6}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \frac{(17\sqrt{2} + 26 + 17\sqrt{6})(-17\sqrt{2} + 26 + 17\sqrt{6})(17\sqrt{2} - 26 + 17\sqrt{6})(17\sqrt{2} + 26 - 17\sqrt{6})}{16} =$$

= сложно посчитать.

$$S_{\triangle ACF} = \frac{AC + DF}{2} AD - \frac{AD \cdot DF}{2} = \frac{17\sqrt{2} + 24\sqrt{2} - 24\sqrt{2}}{2} \sqrt{578} =$$

$$= \frac{17\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{17}}{2} = 17\sqrt{34}$$

Ответ: $17\sqrt{34}$.

13 $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$$y(y-x) + (y-x)(x+y) + 4(x+2y) = 0$$

$$(y-x)(x+2y) + 4(x+2y) = 0$$

$$(y-x-4)(x+2y) = 0$$

Значит есть 2 случая: 1) $y-x-4=0$ 2) $x+2y=0$

$$-x = 4-y$$

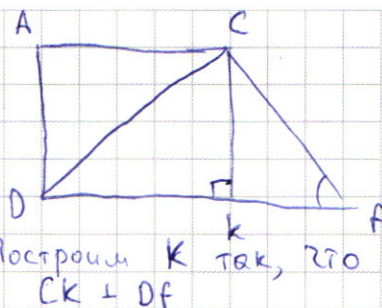
$$-x = 2y$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

$$1) (4-y)^4 \lg y = (4-y) \lg y (4-y)^2 \lg y$$

$$(4-y)^4 \lg y - \lg y - \lg^2(4-y) = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^3 \lg y - \lg(4-y) = y^2 \lg y$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 &= 3^{81} \cdot 3880 + 2920 - \left(\frac{3^{85} - 1}{2} - (3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 + 3^0) \right) = \\
 &= 3^{81} \cdot 3880 + 2920 - \left(\frac{3^{85} - 1}{2} - 121 \right) = 3^{81} \cdot 3880 + 2920 + 121 - \frac{3^{85} - 1}{2} = \\
 &= 3^{81} \left(3880 - \frac{3^4 - 1}{2} \right) + 3041 = 3^{81} \cdot (3880 - 40) + 3041 = 3^{81} \cdot 3840 + 3041 \\
 &\text{Ответ: } 3^{81} \cdot 3840 + 3041.
 \end{aligned}$$

№ а) $\angle BSA = \angle CDA$, т.к. опираются на
дугу AB в равных окружностях.

$\triangle ACD$ — прямоуго. $\Rightarrow \angle C = \angle D$ в нём

$$\Rightarrow \angle BSA = \angle CDA = 45^\circ$$

$\triangle FB = BD$ по усл. $\Rightarrow$ и $FB \perp CD \Rightarrow \angle FDB = \angle BFD = 45^\circ$

Построим $\triangle$ Продлим луч FB , тогда $GB = BF$.

Т.к. $\angle BDA = \angle BDF$, то точка G будет лежать на
продолжении луча DA .

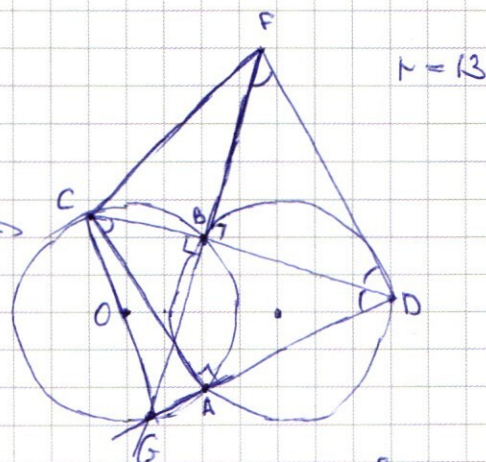
Получается, что $G \in \omega(O; OC)$

А т.к. $\angle CBF = \angle CBG = 90^\circ$, то CG — диаметр этой
окружности. $\Rightarrow CG = 2r = 26$.

$$\triangle CBG = \triangle CBF \Rightarrow CF = 26$$

Ответ: 26.

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \left. \begin{array}{l} CB = 10 \\ CF = 26 \end{array} \right\} &\Rightarrow \text{из прямоугол. } \triangle CBF \quad BF = BD = BG = 24 \\
 &FD = 24\sqrt{2} \quad (\text{из } \triangle FBD)
 \end{aligned}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$$

$$2x - 12 = 12$$

$$x = 12$$

$$y \in [-6; 6]$$

$$\cos^2 + \sin^2 = 1$$

$$36 - 96 = -60 = a - 100$$

$$2^2 \lg_{10} y - \lg_{10} 2 = y \lg_{10} 2$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sqrt{1 - \cos^2 5x} \cos 2x$$

$$2 \cos 5x (\cos^2 x - \sin^2 x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$2 \cos 5x (\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - (1 - \cos^2 5x)) =$$

$$= 2 \sin 5x (\cos^2 x - (1 - \cos^2 x))$$

$$2 \cos 5x (2t - 1) - \sqrt{2} (\sqrt{2} \cos 2k - 1) = 2 \sin 5x (2t - 1)$$

$$2(2\cos^2 x - 1)(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(2\cos^2 5x - 1)$$

$$x^2 - 12x + 36 + 144 = a$$

$$x^2 - 12x = a - 180$$

при $a = \overset{156}{\cancel{180}}$ есть 1 решение

при $a = (156; 180]$ есть 2 решения

$$4) |x - 6 - y| \leq 0 \text{ и } |x - 6 + y| \geq 0$$

$$-x + 6 + y + x - 6 + y = 2y = 12 \quad y = 6$$

$$x \in [0; 12]$$

$$x^2 - 12x = a - 180$$

при $a = 156$ есть 1 решение (всего 2)

при $a = (156; 180]$ есть 2 решения (всего 4)

Ответ: $a \in \{100; 156\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sum_{x=4}^{84} 3^{81}(x-4) - 3^x + 85 - x$$

$$3^{81}(83 \cdot 44 - 4) - \sum_{x=4}^{84} 3^x + 83 \cdot 85 - 83x$$

$$3^{81}$$

$$-17^2 \cdot 2 + 17^2 \cdot 6 + 26^2 + (17\sqrt{6})^2 + 2 \cdot 26 \cdot 17\sqrt{6} =$$

$$= 26^2 + 17^2 \cdot 6 - 17^2 \cdot 2 + 2 \cdot 26 \cdot 17\sqrt{6} =$$

$$= 26 + (26 + 17\sqrt{6})^2 - 17^2 \cdot 2 =$$

$$17^2 \cdot 2 - 26^2 - 17^2 \cdot 6 + 2 \cdot 26 \cdot 17\sqrt{6}$$

$$(26^2 + 17^2 \cdot 6 - 17^2 \cdot 2 + 2 \cdot 26 \cdot 17\sqrt{6})(17^2 \cdot 2 - 26^2 - 17^2 \cdot 6 + 2 \cdot 26 \cdot 17\sqrt{6}) =$$

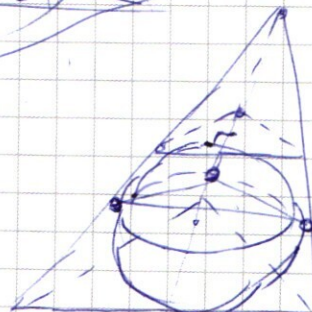
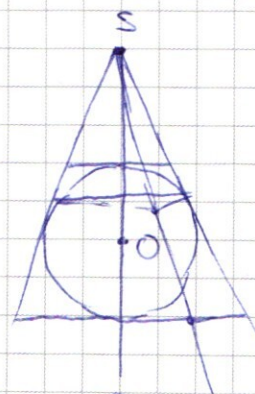
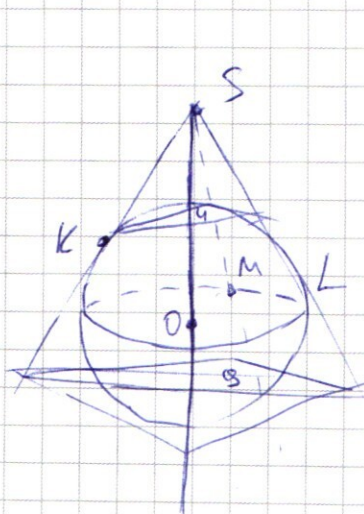
$$= 26^4 - 26^2 \cdot 17^2 \cdot 6 + 2 \cdot 26^3 \cdot 17\sqrt{6} - 17^4 \cdot 12 + 17^4 \cdot 4 - 17^3 \cdot 26 \cdot 4\sqrt{6} - 26^4 - 26^2 \cdot 17^2 \cdot 6 + 2 \cdot 26^3 \cdot 17\sqrt{6} -$$

$$- 2 \cdot 26^3 \cdot 17\sqrt{6} - 17^2 \cdot 26^2 \cdot 6 - 17^4 \cdot 6^2 + 17^4 \cdot 12 - 12 \cdot 26 \cdot 17^3 \sqrt{6} +$$

$$+ 2 \cdot 26^3 \cdot 17\sqrt{6} + 12 \cdot 17^3 \cdot 26 \cdot \sqrt{6} - 17^3 \cdot 4 \cdot 26\sqrt{6} + 4 \cdot 26^2 \cdot 17\sqrt{6} +$$

$$+ 12 \cdot 26 \cdot 17^2 =$$

$$4 \cdot 26^2 \cdot 17^2 + 8 \cdot 17^4$$



$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$(\cos 7x + \cos 3x) - (\sin 7x + \sin 3x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 5x \sin$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

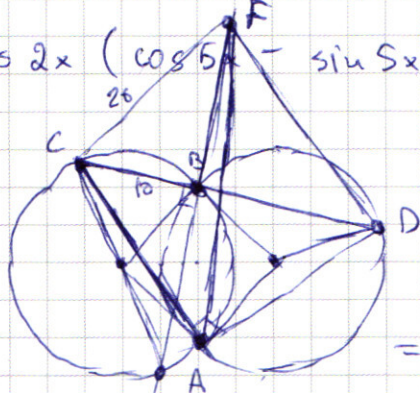
$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos x + y = \cos x \cos x + \sin x \sin y$$

$$b.a) 26$$

b)

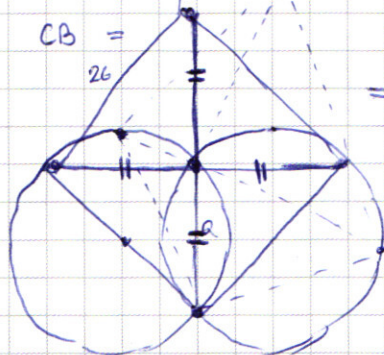


$$180 - 24 =$$

$$= 156$$

$$36 - 60$$

$$= -24$$



$$x^2 - 12x$$

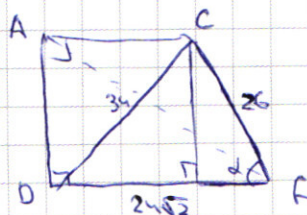
$$2\sqrt{2}$$

$$2r^2 - 2r^2 \cos \alpha$$

$$2r^2 (1 - \cos \alpha) \sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{13 \cdot \sqrt{2}}$$

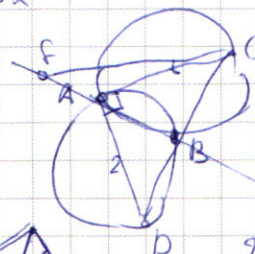
$$\frac{2\sqrt{2}}{13 \cdot 26}$$



$$34^2 = 24^2 \cdot 2 + 26^2 - 2 \cdot 24\sqrt{2} \cdot 26 \cos \alpha$$

$$\frac{34^2 - 24^2 \cdot 2 - 26^2}{2 \cdot 24\sqrt{2} \cdot 26} = -\cos \alpha$$

$$17\sqrt{2} \quad 26 \quad 17\sqrt{2}$$



$$26 \times 26$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \\ - 100 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 96 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ + 34 \\ \hline 136 \\ 102 \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$576$$

$$\cos \alpha$$

$$\begin{array}{r} 288 \\ \times 17 \\ \hline 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 576 \\ \times 2 \\ \hline 1152 \\ \times 676 \\ \hline 1828 \end{array}$$

$$672$$

$$\begin{array}{r} 1828 \\ - 1156 \\ \hline 672 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16875 | 5

15 | 3375 | 5

18 | 30 | 675 | 5

15 | 32 | 5 | 135 | 5

37 | 35 | 17 | 10 | 27

35 | 25 | 15 | 35

25

25

32

35

160

96

1120

$= 5^4 \cdot 3^3$

5 5 5 5 9 9 9 3

6

13

625

27

4375

1250

16875

4 × 5

9 3 11 3 3 3 1

8 · 7 · 6 · 5 · 4 · (1 + 3) = 8 · 7 · 5 · 4 = 32 · 35 = 1120

4 · 32

$\int \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$

$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$(y-x)^2 + xy + y^2 - 4x - 8y = 0$

$(x-y)^2 + y(y-8) + x(x-4) = 0$

$x < 0$

$y > 0$

$\lg a = ?$

$\lg 16 = 1$

$\lg 32 = 1.5$

$\lg 32 = 1.5$

$\lg 32 = 1.5$

$\int \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = x \lg xy$

$2y^2 + xy - x^2 + 4x - 8y = 0$

$x^4 \lg y = x \lg x + \lg y$

$x \lg y^4 = x \lg x \lg y y \lg y^2$

$x \lg y^3 = x \lg x y \lg y^2$

$x \lg y^3 - \lg x = y \lg y^2$

320

40

89

3560

320

3880

85

80

6800

$x, y > 0$

$y^2 + xy + (y-x)(y+x) + 8(x-y) - 4x = 0$

$y^2 + xy + (y-x)(y+x+8) - 4x = 0$

$2y$

$y(x+y)$

$y \lg_2 y = y$

$y \lg_2 y = y$

$y(y-x) + (y-x)(x+y) - 4(x+y) - 4y = 0$

$(y-x)(x+2y) - 4(x+2y) = 0$

$(y-x-4)(x+2y) = 0$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y(y-x) + (y-x)(y+x) + 4(x+2y) = 0$$

$$(y-x)(2y+x) + 4(2y+x) = 0$$

$$(y-x+4)(2y+x) = 0$$

$$1) -x = 2y$$

$$2) -x = 4 - y$$

$$\begin{array}{r} 672 \overline{) 2} \\ \underline{336} \\ 336 \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 8$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

$$\left(\frac{(2y)^4}{y^2}\right) \lg y = (2y) \lg 3y$$

$$16 y^4 \lg y = (2y) \lg 3y \cdot 2 \lg y$$

$$16 y^2 \lg y = (2y) \lg y \lg 3$$

$$16 y \lg y = 2 \lg 3y \cdot y \lg 3$$

$$2^4 \lg 3y \cdot y \lg y - \lg 3 = 1$$

$$y \lg y/2 = 2 \lg 3y - 4$$

$$\frac{(4-y)^4 \lg y}{y^2 \lg y} = (4-y) \lg y(4-y)$$

$$(4-y)^4 \lg y - \lg y - \lg(4-y) = y^2 \lg y$$

$$(4-y)^3 \lg y - \lg(4-y) = y^2 \lg y$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 9} \\ \underline{119} \\ 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 98} \\ \underline{119} \\ 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 981} \\ \underline{119} \\ 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 981} \\ \underline{119} \\ 578 \end{array}$$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$x^2 - 12|x| + 36 + y^2 - 16|y| + 64 = a$$

$$x^2 + y^2 - 12|x| - 16|y| + 100 = a$$

$$|x-y-6| + |x+y-6| = 12$$

$$x+y-6 < 0 \quad x-y$$

$$3^x - 85 + x = 3^{81} x - 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x - 85 + x \leq 3^{81} (x-4)$$

$$x \geq 4 \quad x \leq 85$$

$$3^{85} - 85 + 8^5 \quad 3^{85}$$

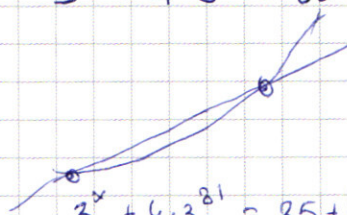
$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x (1 + 4 \cdot 3^{81-x})$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x < 100 \\ x < 86 \end{matrix}$$



$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x - 3^{81} x + x = 85 - 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^x + x - 85 = -(4+x) 3^{81}$$