

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16845 = 5^4 \cdot 3^2$$

Для восьми ~~чисел~~ ^{цифр} возможно 2 способа.

I) $4^4 5^4, 3^4 3^4, 1^4 1^4$.

II) $4^4 5^4, 1^4 9^4, 1^4 3^4, 2^4 1^4$.

I.

$$4^4 5^4 : \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3} \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40 \cdot 40$$

$$3^4 3^4 : \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!} = 4. \text{ Цифры - оставшиеся числа}$$

Итого $4 \cdot 40 \cdot 280$ способ разложить числа.

II.

$$4^4 5^4 : \frac{8!}{4! \cdot (8-4)!} = 40$$

$1^4 9^4$ и $1^4 3^4$ расставляются в 4 позиции $4 \cdot 3 = 12$ способами. Цифры - оставшиеся числа

и Итого $40 \cdot 12 = 480$ ~~способов~~ разложить числа.

Итоговый ответ: $480 + 280 = 760$ чисел.

Ответ: ~~1120~~ 1120.

N2

$$\cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$$

Един
Реш $\cos 5x + \sin 5x = 0$.

$$\sin(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$5x + \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{5} - \frac{\pi}{20}, k \in \mathbb{Z}$$

Тогда $\cos 10x = 0$

$$\cos 2x = 0$$

$\cos 5x - \sin 5x \neq 0$, т.е. равенство не выполняется

Значит, можно разделить обе части на $(\cos 5x + \sin 5x)$

$$\sqrt{2} \cos 10x (\cos 5x + \sin 5x) = 2 \cos 2x \cos 10x$$

$$\begin{cases} \cos 10x = 0 & (2) \\ \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 2 \cos 2x & (1) \end{cases}$$

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x) = \cos 2x$

$$\cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$$

$$\cos(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 2x$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} (*)$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} (**)$$

(*)

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(**)

$$5x - \frac{\pi}{4} = -2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}.$$

(2)

~~cos 2x = 0~~

$$\cos 10x = 0$$

$$10x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ, $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}.$

N3

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1)$$

$$2y^2 - xy + x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2)$$

Реш,

$$\begin{matrix} y > 0 \\ x < 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} \lg \\ \lg \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \quad (1)$$

(1)

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$\frac{x^{4\lg y}}{e^2} = e \cdot (-x)^{\lg y}$$

$$(-x)^{4\lg y} = (-x)^{\lg y + 3\lg(-x)}$$

$$4\lg y = \lg y + 3\lg(-x)$$

$$\lg y = \lg(-x)$$

$$y = -x$$

~~Заменяем~~ Подставим в ур-е (2) $y = -x$:

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+2) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \text{ — не подходит} \\ x=-2 \end{cases} \text{ Поскольку } x < 0 \text{ по ОДЗ.}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: $(-2; 2)$.

№5

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1)$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \quad (2)$$

(1)

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

Рассмотрим все случаи раскрытия модулей:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|6+y-x| + |6-y-x| = 12$$

1.

$$\begin{cases} 6+y-x \geq 0 \\ 6-y-x \geq 0 \\ 12-2x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y \leq 6 \\ y \geq -6 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} 6+y-x \geq 0 \\ 6-y-x \leq 0 \\ 6+y-x-6+y+x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=6 \\ x \leq 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} 6+y-x \leq 0 \\ 6-y-x \geq 0 \\ -6-y+x+6-y-x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-6 \\ x \geq 0 \\ x \leq 12 \end{cases}$$

4.

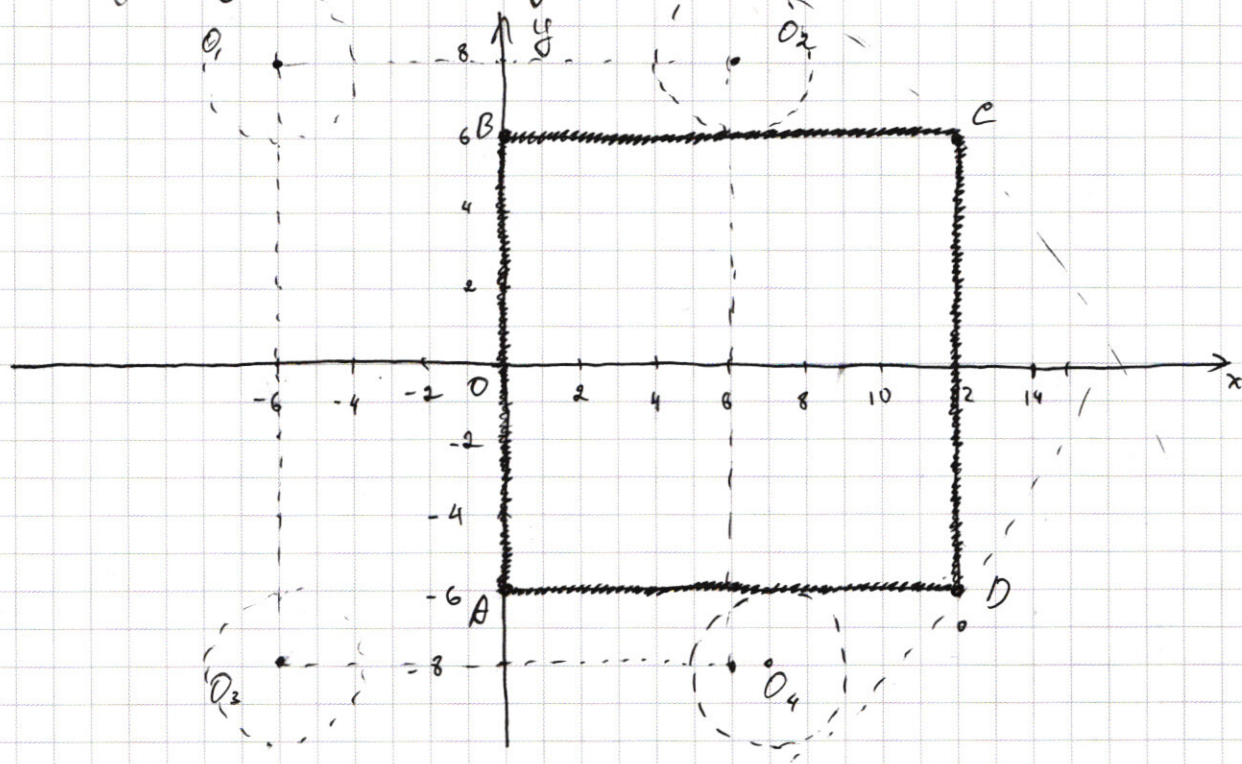
$$\begin{cases} 6+y-x \leq 0 \\ 6-y-x \leq 0 \\ -6-y+x-6+y+x=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y \leq 6 \\ x \geq -6 \end{cases}$$

Графики этого уравнения являются прямоугольниками с вершинами в точках $(0; 6)$; $(6; -6)$; $(12; 6)$; $(12; -6)$.

Графики ур-я (2) являются четырьмя окружностями с центрами в точках $(6; 8)$; $(-6; 8)$; $(6; -8)$; $(-6; -8)$.

и радиусами $r = \frac{a}{2}$.

Изобразим в Oxy :



Ровно 2 решения будет в 2-х случаях:

I. Окружности $\omega_1(O_1; 2)$ и $\omega_4(O_4; 2)$ касаются отрезок BC и AD прямоугольника ABCD соответственно.

В этом случае $r = 2 \Rightarrow a = 4$.

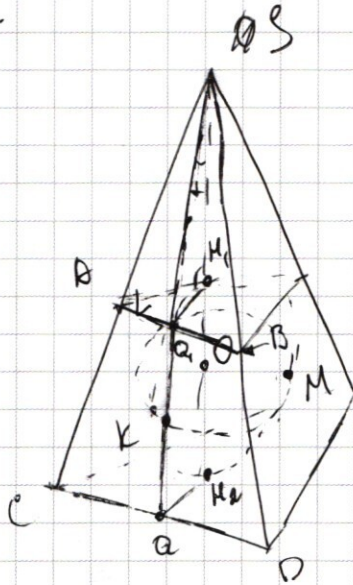
II. Окружности $\omega_1(O_1; \sqrt{18^2 + 14^2})$ и $\omega_3(O_3; \sqrt{18^2 + 14^2})$ проходят через точки D и C прямоугольника ABCD соответственно.

$$a = 18^2 + 14^2 = 324 + 196 = 520.$$

Ответ: 4; 520.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

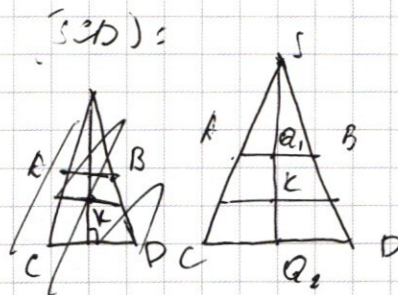
№4.



$$\frac{S_{SAO}}{S_{SOA}} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{S_{KAQ_1}}{S_{Q_2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{S_{H_1}}{S_{H_2}} = \frac{2}{3}$$



Радиус сферы $= 4\pi$

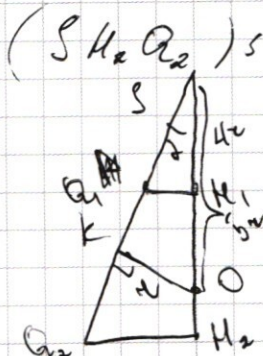
$$\frac{S_{H_1}}{S_{H_1} + 24} = \frac{2}{3}$$

$$S_{H_1} = 4\pi$$

$$2 < kSO$$

$$\sin \angle = \frac{kO}{OS} = \frac{\pi}{5\pi} = \frac{1}{5}$$

$$\sin \angle = \frac{1}{5}$$



$$Sk = \sqrt{24} \cdot z$$

$$SQ_1 = \frac{4z}{\cos 2} \cdot \frac{4z \cdot 6}{\sqrt{24}}$$

$$\frac{SQ_1}{SE} = \frac{20}{24} = k$$

$$\frac{4}{f_{\text{уч}}}, k^2$$

$$f_{\text{уч}} = \frac{4}{k^2} = \frac{4 \cdot 24^2}{20^2} = \frac{4 \cdot 6^2}{5^2} = \frac{4 \cdot 36}{25}$$

$$= \frac{144}{25}$$

Ответ: $\frac{144}{25}$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (2) \end{cases}$$

Если рассмотреть одно посещение школы

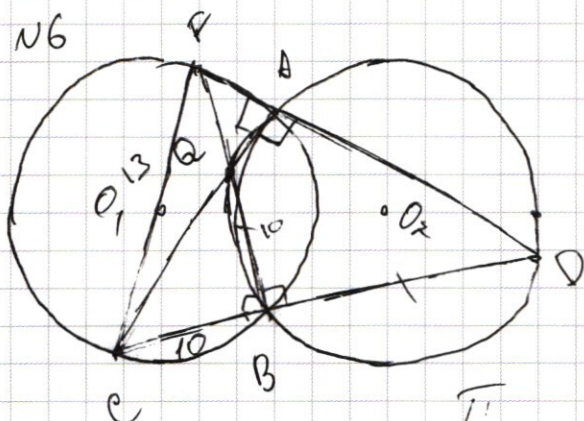
$$3^x + 3^{81}(4-x) + x - 85 < 0$$

Пусть $x = 4$

$$x \geq 85 \cdot 25$$

т.е. Ответ = $\sum_{x=4}^{85 \cdot 25} (85 + (3^{81} - 1)x - 3^x - 4 \cdot 3^{81})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть $Q = FB \cap AC$.

Запомним, что ω_2 окружность $\omega_2(O_2, 13)$

и конструируем $\omega_1(O_1, 13)$.

Поворотом относительно точки B на 90° .

Тогда $\triangle CFB \rightarrow \triangle QDB$

$CF \rightarrow QD$, а QD — диаметр т.к. на

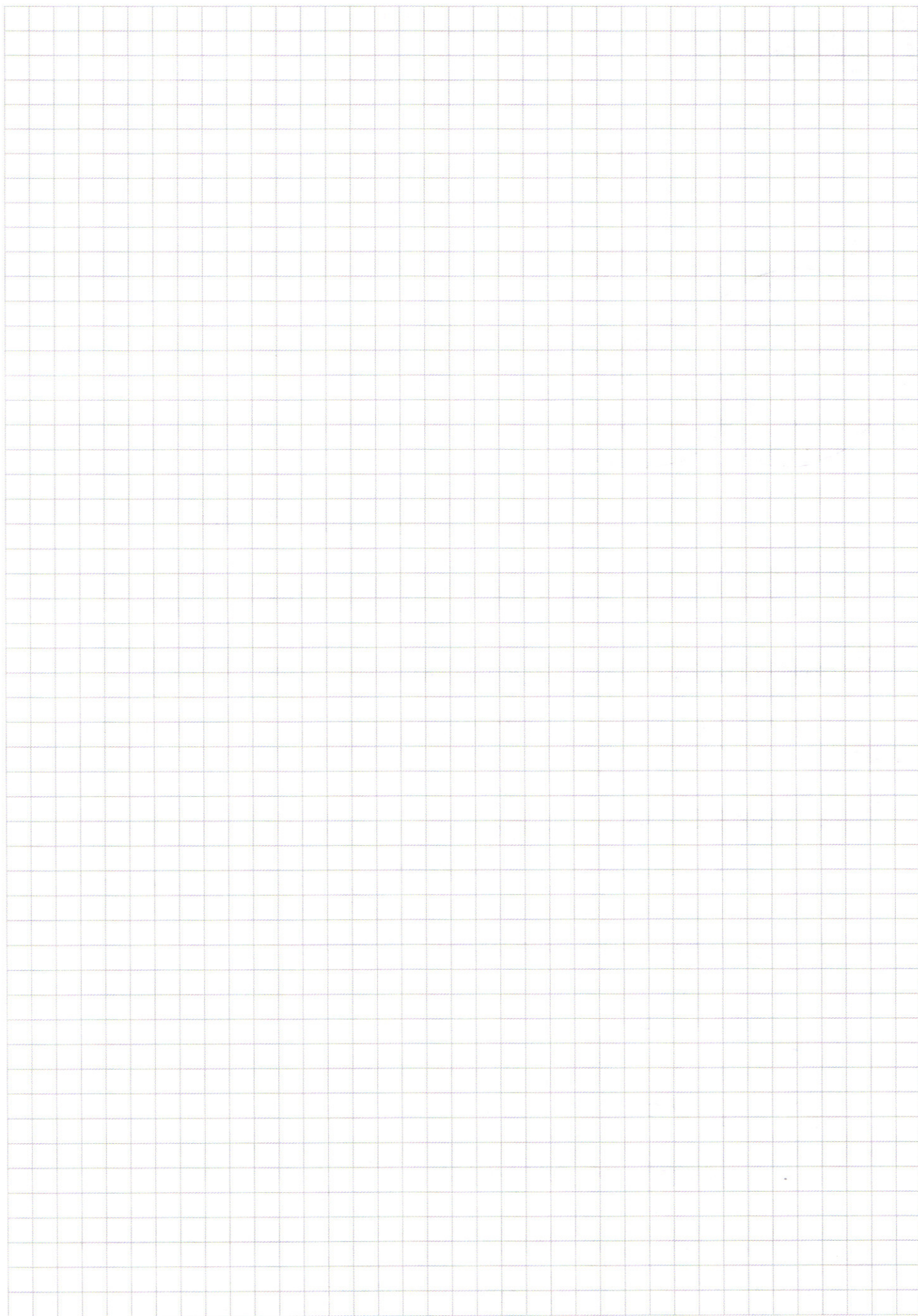
него опирается прямой угол.

$$a) \quad \boxed{CF = B.}$$

$$b) \quad \triangle ACF$$

$\angle A = 80^\circ$, т.к. опирается на диаметр

т.к. ω_2 конструируем из ω_1 поворотом на 90° , то $AF = BC$. $\Rightarrow \angle ACF = CF \cdot AF / 2 = 65^\circ$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

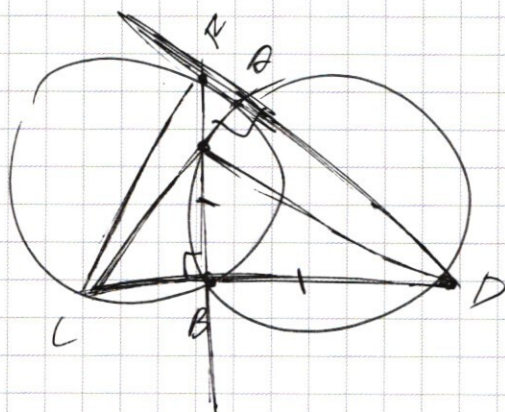
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

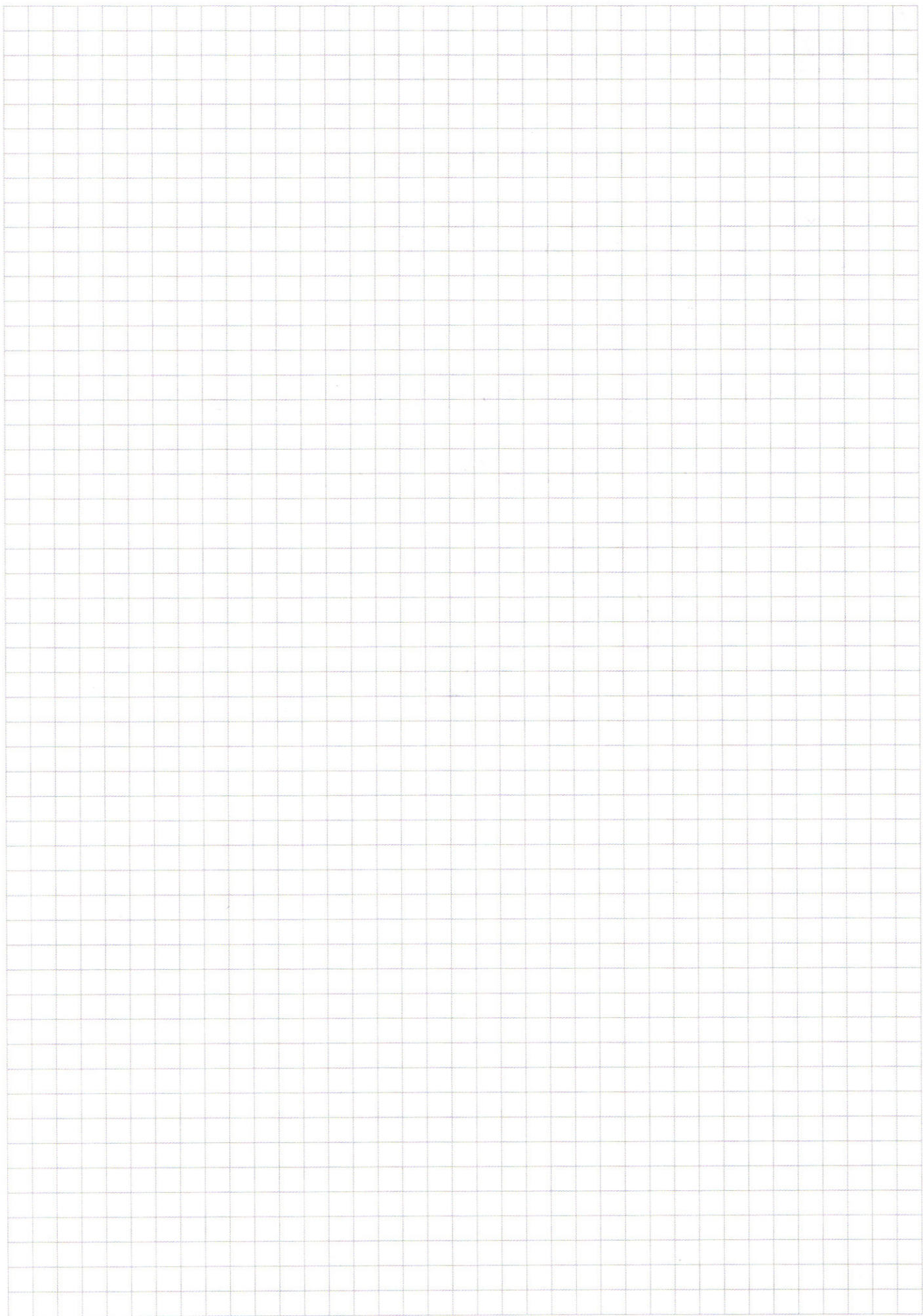
$$3^x \cdot 85 + (3^{81} - 1) \cdot x - 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$

при $x = x + 1$

$$85 + (3^{81} - 1)(x + 1) - 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{81}$$

$$85 + (3^{81} - 1) + 3^{81} - 1 - 3 \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{81}$$





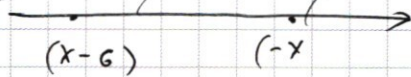
☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|y-x+6| + |y+x-6| = 12$$

При фиксированном x



$$|6+y-x| + |6-y-x| = 12$$

$$12 + y - x = y - x + 12$$

$$\begin{cases} 6+y-x \geq 0 \\ 6-y-x \geq 0 \end{cases}$$

$$6-y-x + 6-y-x = 12$$

$$-2x = 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 6+y \geq 0 \\ 6-y \geq 0 \end{cases}$$

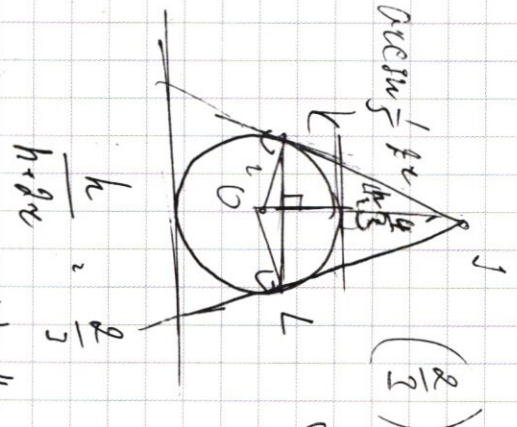
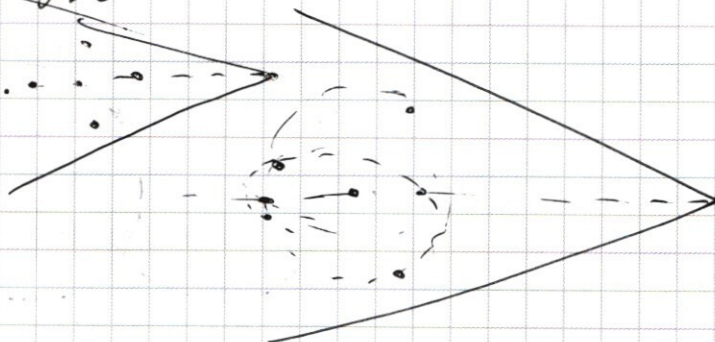
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -6 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6+y-x \geq 0 \\ 6-y-x \leq 0 \end{cases}$$

$$6+y-x - 6+y+x = 12$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ 12-x \geq 0 \\ 0-x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 6 \\ x \leq 12 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 6+y-x \leq 0 \\ 6-y-x \geq 0 \end{cases}$$

$$-6-y+x + 6-y-x = 12$$

$$\begin{cases} -2y = 12 \\ -x \leq 0 \\ 12-x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -6 \\ x \geq 0 \\ x \leq 12 \end{cases}$$

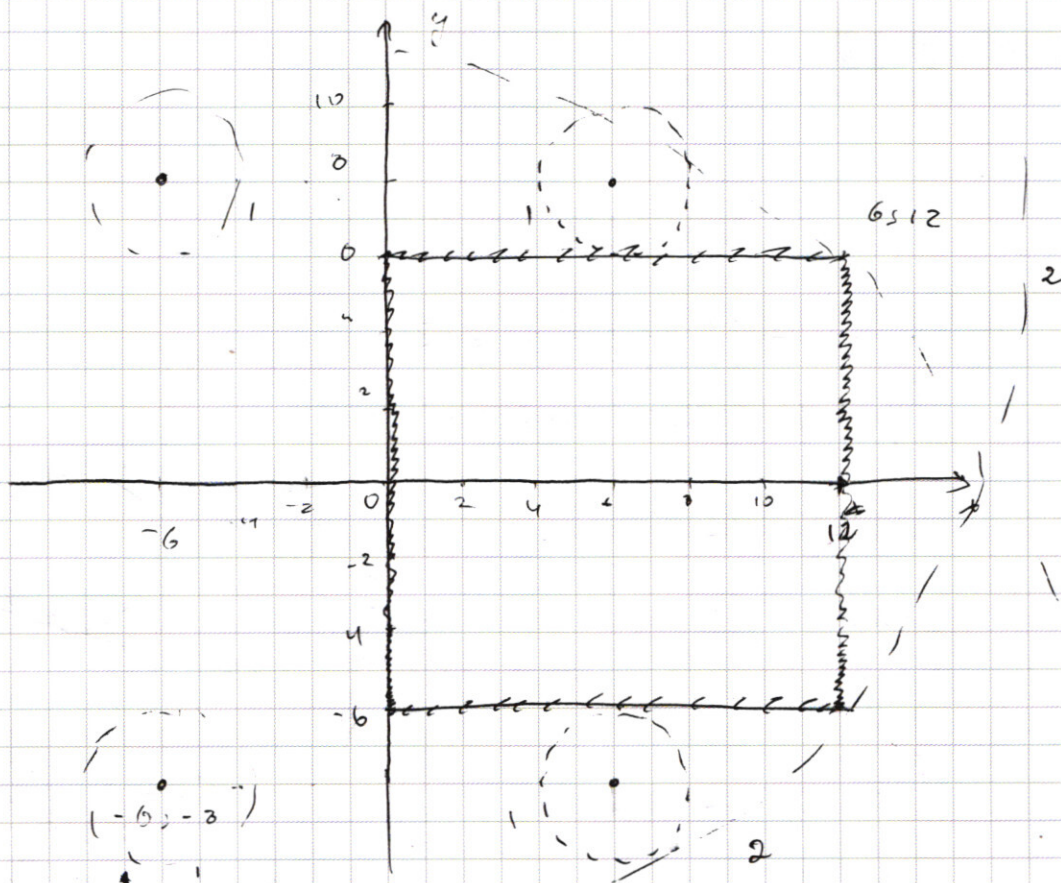
$$\begin{cases} 6+y-x \leq 0 \\ 6-y-x \leq 0 \end{cases}$$

$$-6-y+x - 6+y+x = 12$$

$$-12+2x = 12$$

$$2x = 24$$

$$\begin{cases} x \geq 12 \\ -6+y \leq 0 \\ -6-y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 12 \\ y \leq 6 \\ y \geq -6 \end{cases}$$



1: $a = 2$

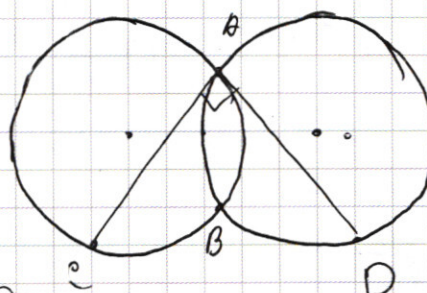
$$\begin{array}{r} 144 \\ -400 \\ \hline 544 \\ 12, 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 544 \overline{) 224} \\ 4 \overline{) 10136} \quad \overline{) 4} \\ 14 \quad \overline{) 12} \quad \overline{) 234} \\ 12 \quad \overline{) 16} \\ \hline 24 \quad 42, 34 \end{array}$$

$$a = \sqrt{12^2 + 80^2} = \sqrt{544} = 4\sqrt{34}$$

6, 12

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (2) \end{cases}$$

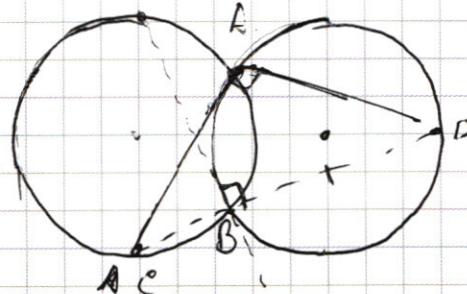


(1) (2)

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81}x - x$$

$$3^x + 3^{81}(4 - x) + x - 85 < 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^4}{y^2} \cdot \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\log y} = (-xy)^{\log(-xy)} \end{array} \right.$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 3y = 0$$

$$2y^2 + \cancel{y^2} + 4y - 3y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 3y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$$2y^2 + y(-x-3) - x^2 - 4x = 0$$

$$D = (x+3)^2 - 4 \cdot (-x^2 - 4x) \cdot 2 =$$

$$= x^2 + 16x + 64 + 8 \cdot (x^2 + 4x) =$$

$$x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 =$$

$$(3x+8)^2$$

~~✗~~

$$y = \frac{x+8 \pm \sqrt{3x+8}}{4}$$

$$\frac{x+8 + 3x+8}{4}$$

$$\frac{x+8 - 3x-8}{4}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$= \frac{4x+16}{4}; \frac{-2x}{4} = x+4; -\frac{x}{2}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{x^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$$

$$\frac{x^{4\lg y}}{e^2} = (-x)^{\lg y} \cdot e$$

$$x^{4\lg y} \cdot (-x)^{\lg y} \cdot e^3$$

$$(-x)^{4\lg y} = (-x)^{\lg y + 3\lg(-x)}$$

$$3\lg y = 3\lg(-x)$$

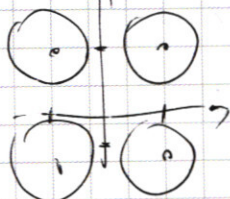
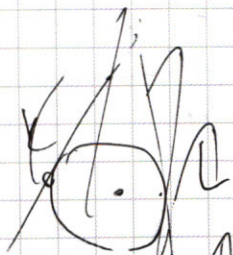
$$(y = -x)$$

$$\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \\ y > 0 \\ y = x + 4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

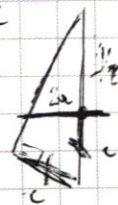
Ответ: $(-2; 2)$.



б.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 9 \end{cases}$$

$$|y-x+6| + |y+x-y+6| = 12$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21

$$16875 \div 5$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ \times 25 \\ \hline 84375 \\ + 33750 \\ \hline 421875 \\ \div 250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 25 \\ \underline{15} \\ 18 \\ \underline{15} \\ 34 \\ \underline{30} \\ 4 \\ \underline{3} \\ 15 \\ \underline{15} \\ 0 \end{array}$$

(1) либо $3^3 \cdot 5^4$, 4^5 и одна 2
(2) либо 1^9 , 1^3 , 4^5 и 2^1 .

(1)

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 6}{3} = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$$

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 3$$

$$4^5 : \frac{8!}{5! \cdot (8-5)!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$3^3 : \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4 \quad 56 \cdot 4$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 12 \\ \hline 800 \\ + 800 \\ \hline 1600 \end{array}$$

(2)

4°5'. 56 способов (из кр. способ)

$$2 \cdot 1^4 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4} = 6$$

1°8" и 1°3" 2-м способом

3

$$\begin{array}{r} 56 \\ + 16 \\ \hline 72 \\ \times 2 \\ \hline 144 \\ + 72 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$56 \cdot 6 \cdot 2 = 672$$

(1) + (2):

$$672 + 224 = 896.$$

N2

$$\cos 4x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$= 2 \sin 5x \cos 2x.$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = 2 \cos 2x (\sin 5x - \cos 5x)$$

$$\sqrt{2} \cos 10x (\cos 5x + \sin 5x) = 2 \cos 2x \cdot \cos 10x$$

$$\cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 5x - 2 \cos 2x = 0$$

$$2 \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cos 2x$$

$$\cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 2x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin \alpha \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos x = -\sin x$$

$$\sin x + \cos x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi k}{2} = \frac{3\pi k}{4}$$