

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

Заметим, что $3+4=7$, поэтому в иско-
мых восьмизначных числах есть, как ми-
нимум, одна единица

1) Если единица ровно одна, то в числе
присутствуют цифры:

"1" - 1 шт.
"3" - 3 шт.
"5" - 4 шт. } 8 шт.

кол-во таких чисел:

$$N_1 = \frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 4!} = 8 \cdot 7 \cdot 5$$

2) Если в числе две единицы, то
две тройки должны "схлопнуться" в
одну девятку (никакие две другие цифры
невозмо "схлопнуть" в одну, чтобы полу-
чилась цифра) $\Rightarrow$ в таких числах
присутствуют цифры:

"1" - 2 шт.
"3" - 1 шт.
"9" - 1 шт.
"5" - 4 шт. } 8 шт.

кол-во таких чисел:

$$N_2 = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 4!} = 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5$$

Р.8. Три единицы
быть не может

3) Use formula:

$$N = N_1 + N_2 = 8 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 8 \cdot 7 \cdot 5(1+3) = 8 \cdot 7 \cdot 20 = 56 \cdot 20 = 1120$$

Answer: 1120

N2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos 5x = \sin 5x \quad | : \cos 5x \neq 0$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$$

$$(2): 2 \cos 2x - \sqrt{2} \left(\sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0 \quad | : 2$$

$$\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{7x - \pi/4}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{3x - \pi/4}{2} \right) = 0$$

$$\frac{7x - \pi/4}{2} = \pi k$$

$$\frac{3x - \pi/4}{2} = \pi k$$

$\Leftrightarrow$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

Answer: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}$

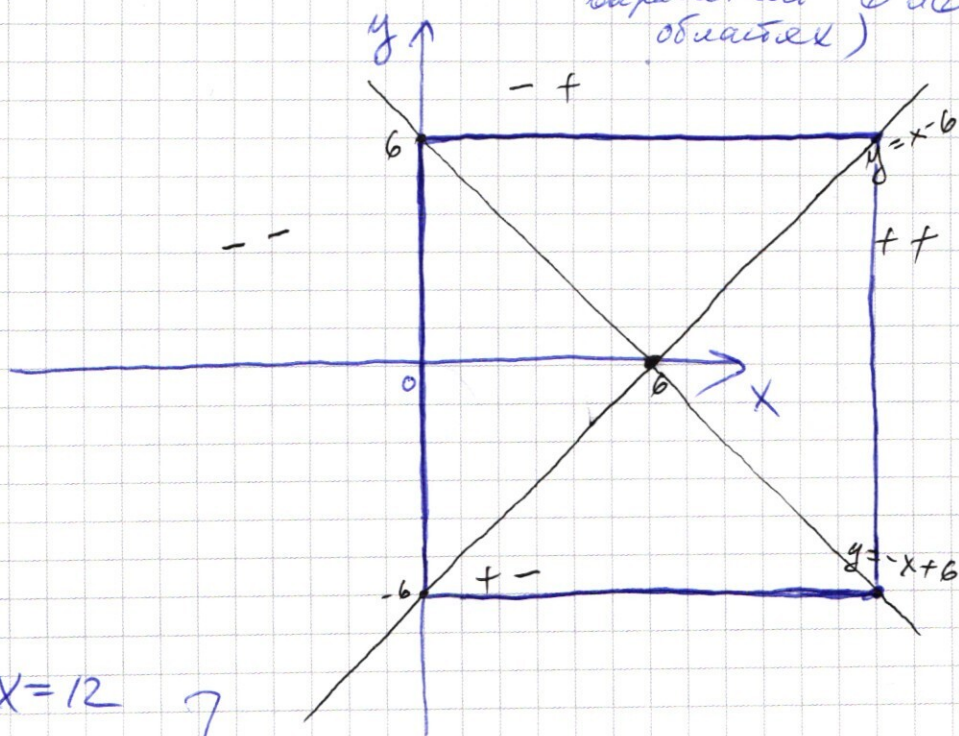
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} 15 \\ a \geq 0 \end{matrix}$$

(1): Изобразим в координатной плоскости
линии, на которых заданы выражения.

① и ② обнуляются: (и отметим знаки
выражений ① и ② в этих
областях)



++) $x=12$

-+) $y=6$

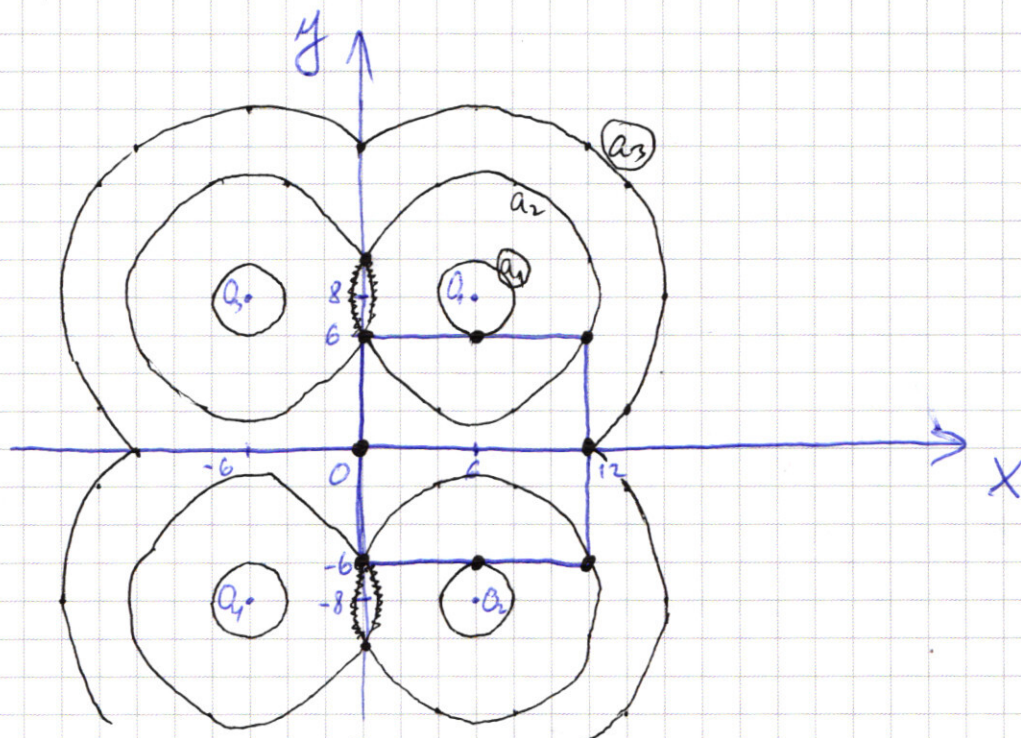
--) $x=0$

+--) $y=-6$

получаем квадрат (см. рис.)

(2): $(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$ — окружность с центром (6, 8)
и радиусом $\sqrt{a}$, отраженная
относительно осей координат.

Исследуем взаимное расположение квадрата и окр-стей при различных a :



- Если окр-сть Q_1 имеет n пересечений с кв, то и окр-сть Q_2 имеет n пересечений $\Rightarrow$ чтобы было 2 решения, нужно, чтобы окр-сть Q_1 пересекала квадрат максимум 1 раз. (или 2, при условии, что окр-сть Q_2 пересекает квадрат в тех же точках).

- Постепенно увеличивая $\sqrt{a}$ (т.е. радиус окр-сти), видим, что ровно 2 р-ня имеются при $\begin{cases} a = a_1 \text{ (касание)} \\ a = a_3 \text{ (окр-сти пересекают квадрат в точках } (0;0) \text{ и } (12;0)) \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{a_1} = 2 \\ \sqrt{a_3} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_3 = 100 \end{cases}$$

Ответ: 4; 100

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

$x < 0$

(2): Разносим на множители:

$$-(x + 2y)(x - y + 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y & (*) \\ x = y - 4 & (**) \end{cases}$$

(1): (*) : $\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(-2y^2)}$

(1): (**) : $\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(y^2-4y)}$

$-2y^2 > 0$
 $y \in \emptyset$

(1): (*) : $\begin{cases} x = -2y \\ \left(\frac{16y^2}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)} \end{cases}$

$y > 0$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$2^{4\lg y} \cdot y^{2\lg y} = 2^{\lg(2y^2)} \cdot y^{\lg 2y^2}$$

$$2^{4 \lg y} \cdot y^{2 \lg y} = 2^{\lg(2y^2)} \cdot y^{\lg^2} \cdot y^{2 \lg y} \quad | : y^{2 \lg y} \neq 0$$

$$(2^{2 \lg y})^2 = 2^{\lg^2} \cdot 2^{2 \lg y} \cdot y^{\lg^2} \quad | : 2^{2 \lg y} \neq 0$$

$$2^{2 \lg y} = 2^{\lg^2} \cdot y^{\lg^2}$$

Учитывая то, что $2^{\lg(y^2)} = (y^2)^{\lg 2}$, получаем:

$$(y^2)^{\lg 2} = (2y)^{\lg 2}$$

$$y^2 = 2y \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=2 \end{cases} \Rightarrow x=4$$

(1): (**):

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ \left(\frac{(y-4)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4y-y^2)} \end{cases} \quad \begin{cases} y \neq 4 \\ 4-y > 0 \\ 4y-y^2 > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(4-y)^{\lg y} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot y^{2 \lg y}$$

$$y^{3 \lg(4-y)} = y^{\lg y \cdot \lg(4-y) \cdot \lg(4-y) + 2 \lg y} \quad \begin{cases} y=1 \\ \text{не явл.} \\ \text{корнем} \end{cases}$$

$$3 \lg(4-y) = \frac{\lg(4-y) \cdot \lg(4-y)}{\lg y} + 2 \lg y \quad | \cdot \lg y$$

$$\begin{cases} \lg(4-y) = u \\ \lg y = v \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3uv = u^2 + 2v^2$$

$$u^2 - 3vu + 2v^2 = 0$$

$$\begin{cases} u = 2v \\ u = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(4-y) = 2 \lg y \\ \lg(4-y) = \lg y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-y = y^2 \\ 4-y = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ 2y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

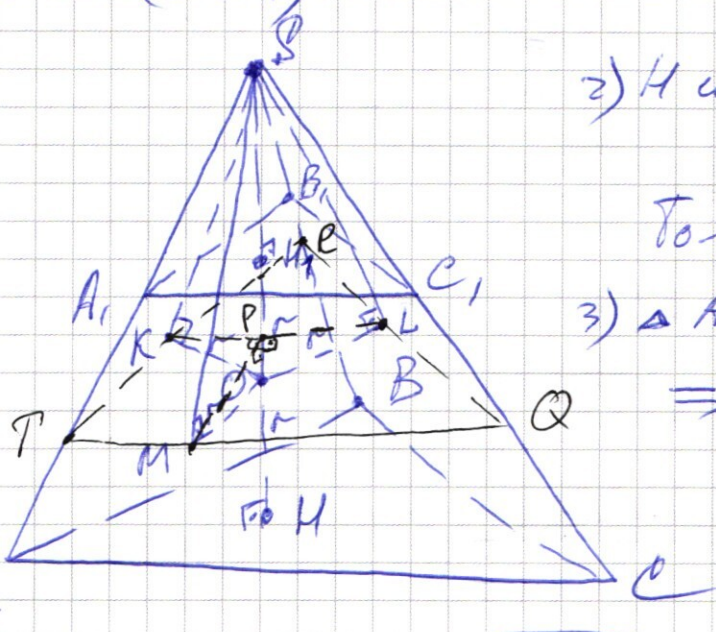
$$\text{Ответ: } (-2; 2); \left(\frac{-9 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

- 1) Пусть ABE и $A_1B_1C_1$ — плоскости сечения угла ($S_{ABE} = 9$; $S_{A_1B_1C_1} = 4$).

$$\begin{cases} SO \perp (ABE) \\ SO \perp (A_1B_1C_1) \end{cases} \Rightarrow (ABE) \parallel (A_1B_1C_1)$$



- 2) H и H_1 — точки касания сферы.

Тогда $OH = OH_1 = r$

- 3) $\triangle ABE \sim \triangle A_1B_1C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{2}{3} \quad \left(\text{т.к. } \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABE}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{SH_1}{SH} = \frac{2}{3}$$

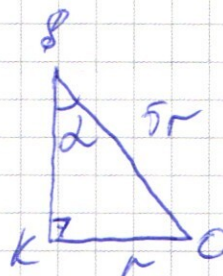
$$HH_1 = 2r \Rightarrow SH_1 = 4r$$

$$KO = HO = r$$

- 4) Рассмотрим $\triangle KSO$:

$$\sin \angle KSO = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$$

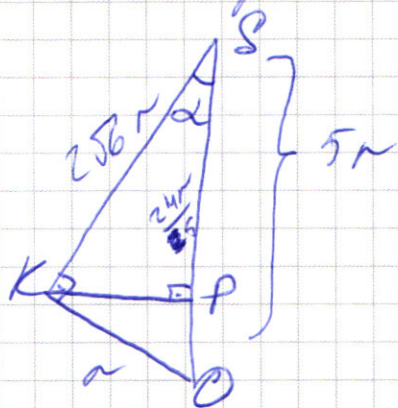
$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$



- 5) $SK = SM = SL$ (как отрезки касательных)
 $\Rightarrow \triangle SOK = \triangle SOM = \triangle SOL$ (по катету и гипот.)
 $\Rightarrow$ точки K, L, M проецируются в одну точку на

прямую SO . $\Rightarrow (KLM) \perp SO \Rightarrow$
 $\Rightarrow (KLM) \parallel (ABE)$

б) Найдем расст. от S до (KLM) ; для
 это рассмотрим $\triangle KSO$:



$$\bullet KS = \sqrt{(5r)^2 - r^2} = 256r$$

$$\bullet \cos \alpha = \frac{256}{5}$$

$$\Rightarrow SP = KS \cdot \cos \alpha = 256r \cdot \frac{256}{5} = \frac{24}{5}r$$

$$2) \frac{SP}{SO} = \frac{24}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{TQ}{AC} = \frac{6}{5}$$

и т.к. $\triangle TQR \sim \triangle ACB$, то

$$\frac{S_{TQR}}{S_{ACB}} = \frac{36}{25}$$

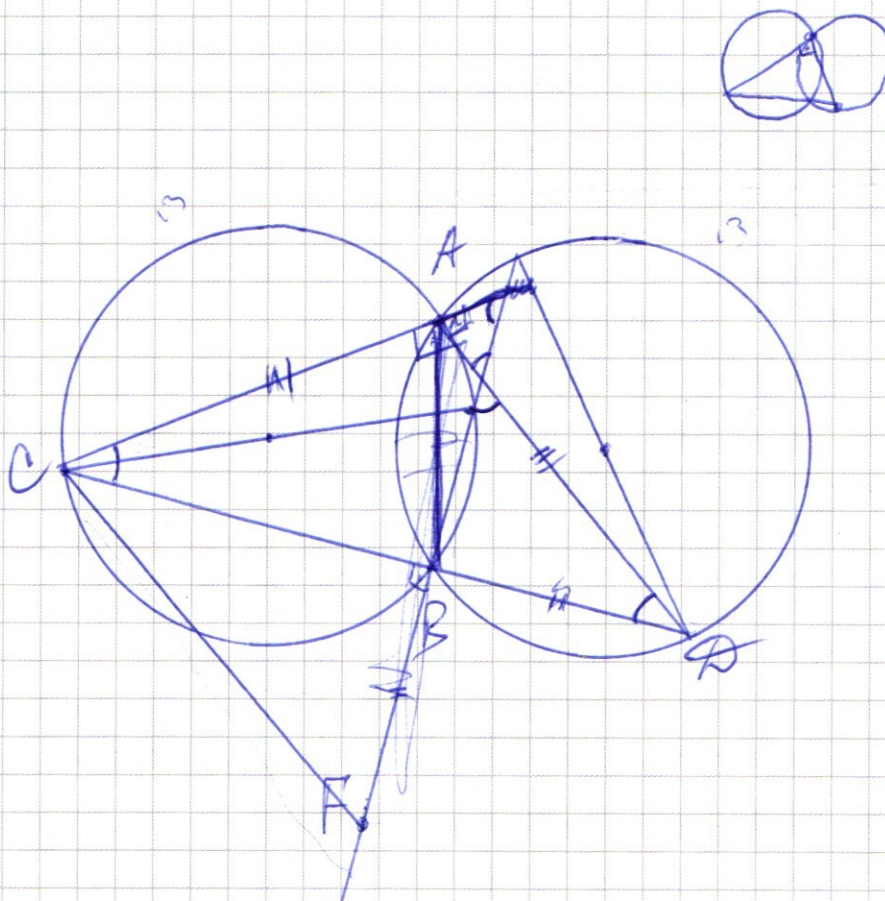
$$\Rightarrow S_{TQR} = \frac{36}{25} \cdot 4 = \frac{144}{25}$$

- площадь
 иск. сечения.

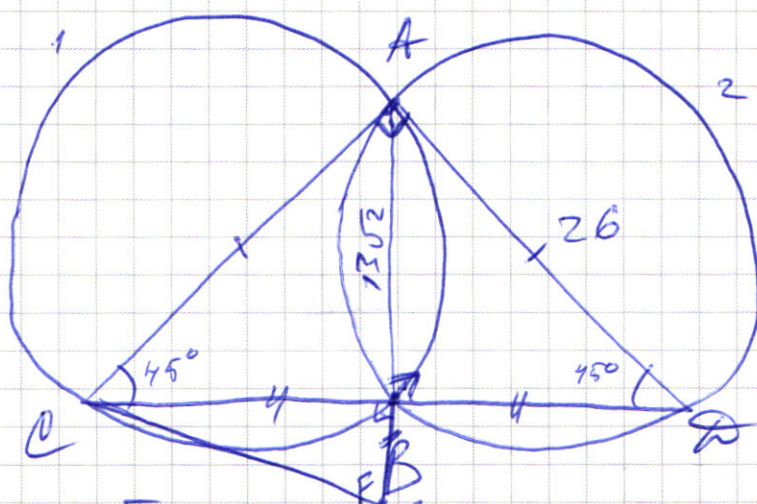
Ответ: а) $\angle KSO = \arccos \frac{1}{5}$

$$б) S_{сеч} = \frac{144}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N6



1) по Т. синусов:

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R_1 ; \quad \frac{AB}{\sin D} = 2R_2 ; \quad \text{по } R_1 = R_2 \Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ$$

Т.е. $\triangle ADC$ - μ/δ .

$$AB = 2 \cdot 13 \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 13 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 13\sqrt{2}$$

2) Допустим, что $\angle ABD = 90^\circ$, тогда AD должен быть диаметром и равен был $\boxed{26}$.

Но т.к. по предположению $\angle ABD = 90^\circ$, то

$$AD = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{13\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{1} = 26 \Rightarrow \text{наше}$$

предположение верно и $\angle ABD = 90^\circ$

$\Rightarrow AB$ - медиана $\Rightarrow \underline{\underline{BC = BD = BF}}$

$\Rightarrow \triangle CBF = \triangle ADB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{CF = AD = 26}.$$

Ответ: а) 26

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16875 = 3^3 \cdot 5^3$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 150} \\ 187 \overline{) 50} \\ 125 \overline{) 175} \\ 125 \overline{) 0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \\ 12500 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{5}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 8 \cdot 7 \cdot 5$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 8 \cdot 7 \cdot 5$$

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y + \cos x \cos y + \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\begin{cases} x+y = \alpha \\ x-y = \beta \\ x = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ y = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$-\sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sqrt{2} \sin^2 5x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$3\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}} 3\sin\alpha + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}} \cos\alpha \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$2\cos 2x - \sqrt{2} \left(\sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \right) = 0 \quad y = \frac{B-\alpha}{2}$$

$$2\cos 2x - 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad x = \frac{\alpha+B}{2}$$

$$\cos 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \begin{cases} \alpha = x - \beta \\ B = x + y \end{cases}$$

$$\cos(x-\beta) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\begin{cases} 7x - \pi/4 = 2\pi k \\ 3x - \pi/4 = 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x - 2\pi k + \pi/4 \\ 3x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$a^{\lg b} = \cancel{e^{\ln a \cdot \lg b}} = e^{\ln b \cdot \lg a}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$-x^2 - (4+y)x + 2y^2 - 8y = 0$$

$$D = 16 + 8y + y^2 + 4(2y^2 - 8y) =$$

$$= 16 + 8y + y^2 + 8y^2 - 32y =$$

$$= 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{4+y \pm (3y-4)}{-2} = \begin{cases} \frac{4+y+3y-4}{-2} = -2y \\ \frac{4+y-3y+4}{-2} = \frac{8-2y}{-2} = y-4 \end{cases}$$

$$4-y > 0$$

$$y^{\lg 2y^2} = 2^{\lg 2 + \lg y^2} = 2^{\lg 2} \cdot 2^{2\lg y}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{2\lg y}$$

$$16^{\lg y} \cdot y^{2\lg y} = 2^{\lg 2y^2}$$

$$a^{\lg b} = b^{\lg a} \quad \frac{a^{\lg b}}{b^{\lg a}} = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{(4-y)^{4 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (4-y)^{\lg y + \lg(4-y)} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

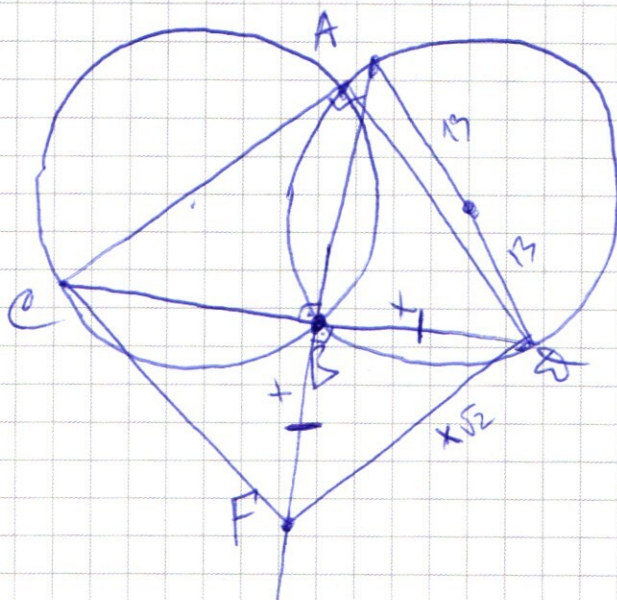
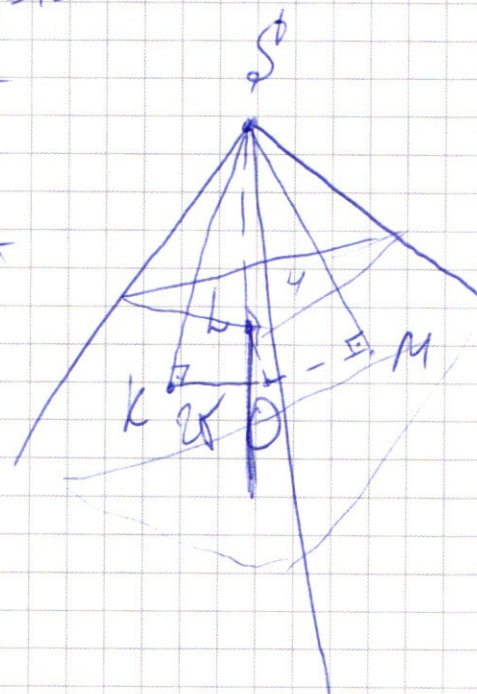
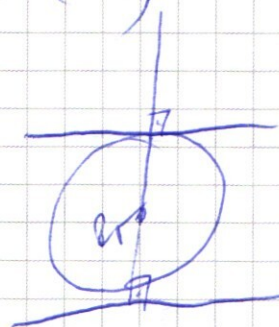
$$(x-6-y) + (x-6+y) = 12$$

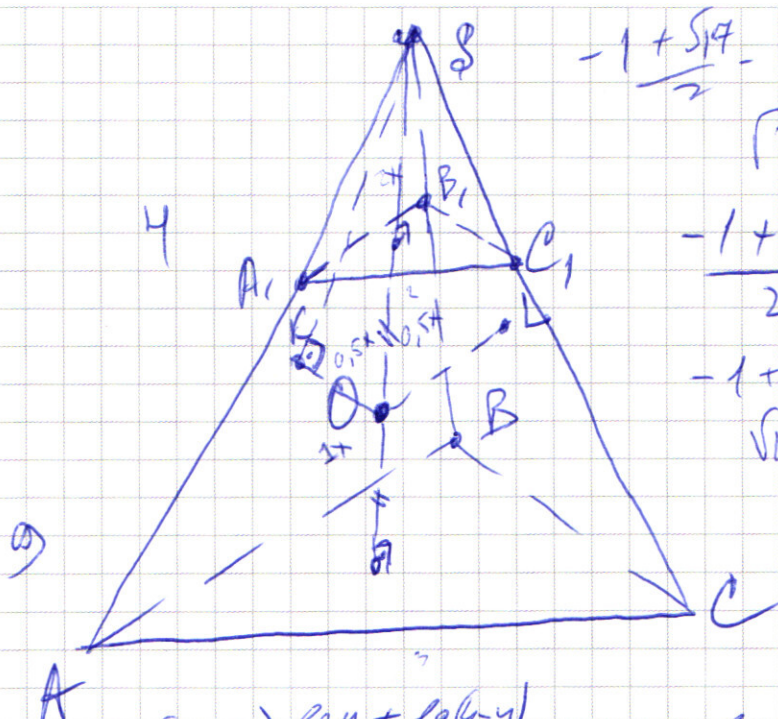
$$\begin{aligned} x-6-y - x+6-y &= 12 \\ -2y &= 12 \\ y &= -6 \end{aligned}$$

$$y = -6$$

$$\begin{aligned} x-6+y + x-6+y &= 12 \\ 2x-12 &= 12 \\ 2x &= 24 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x+6+y - x+6-y &= 12 \\ -2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$





$$-1 + \frac{\sqrt{17}}{2} - 4 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} - \frac{8}{2} = \frac{-9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$\sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \sqrt{4} \cdot \frac{30}{4}$$

$$\frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \sqrt{8} \cdot \frac{20}{2} + 24 = 144$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(4-y) \lg y + \lg(4-y) = (4-y) \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

$$(4-y) \lg y = (4-y) \lg(4-y) \cdot y \lg y \quad 0 < y < 4$$

$$y \lg(4-y) = y \lg y \cdot \lg(4-y) + y \lg y$$

$$3 \lg(4-y) = \lg y \cdot \lg(4-y) + 2 \lg y$$

$$3 \lg(4-y) = \frac{\lg(4-y)}{\lg y} \cdot \lg(4-y) + 2 \lg y$$

$$3v = \frac{v}{u} \cdot v + 2u \quad | \cdot u$$

$$3vu = v^2 + 2u^2$$

$$v^2 - 3uv + 2u^2 = 0$$

$$D = 9u^2 - 4 \cdot 2u^2 = u^2$$

$$v = \frac{3u \pm u}{2} = \begin{cases} 2u \\ u \end{cases}$$