

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР



Здесь указывается ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

маборы из которых можно получить
шестизначные числа.

1) четыре 5; три тройки и 1

2) четыре 5; одна 9, одна 3 и
две 1.

1 случай кол-во вариантов = $\frac{8!}{4!3!}$

2 случай кол-во вариантов = $\frac{8!}{4!2!}$

$$\text{Всего: } \frac{8!}{4!3!} + \frac{8!}{4!2!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$= 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \left(\frac{4}{6} \right) = 1120$$

Ответ: 1120

N5.

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12 \quad (1)$$

$$(|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \quad (2)$$

Есть 4 варианта раскрытия модулей
в первом уравнении

1) + +

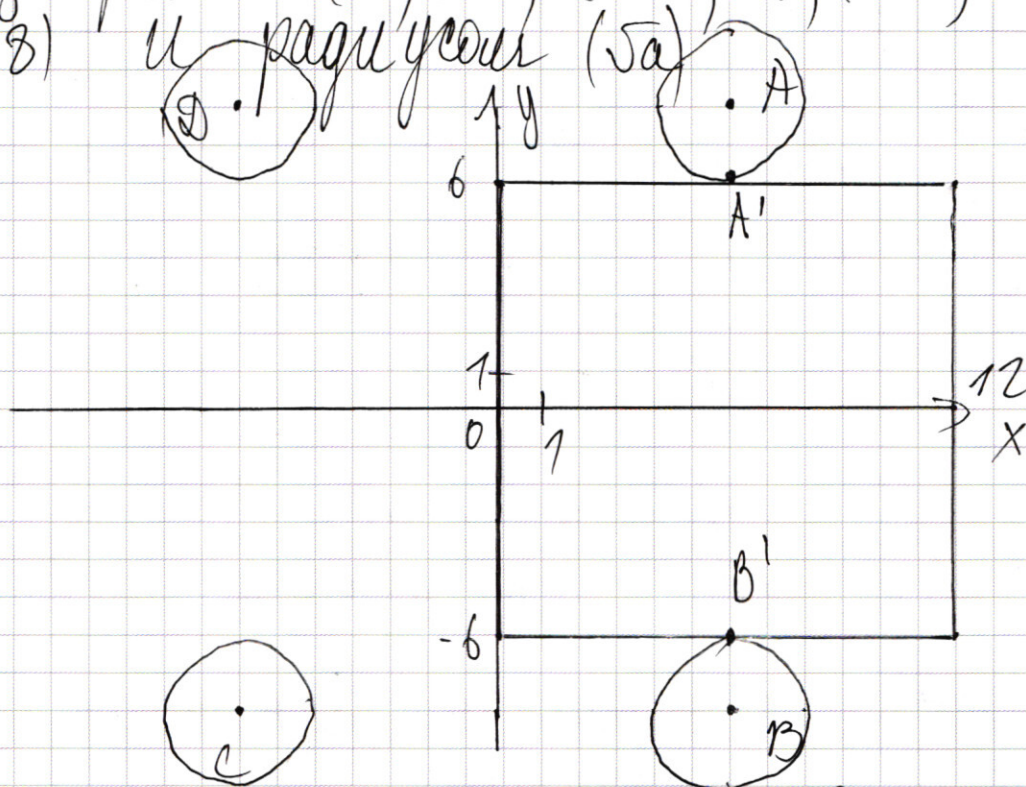
$$x - 6 - y + x - 6 + y = 12 \Rightarrow x = 12$$

$$2) \quad + \quad - \\ \cancel{x} - \cancel{6} - y - \cancel{x} + \cancel{6} - y = 12 \\ y = -6$$

$$3) \quad - \quad + \\ -\cancel{x} + \cancel{6} + y + \cancel{x} - \cancel{6} + y = 12 \\ y = 6$$

$$4) \quad - \quad - \\ -\cancel{x} + \cancel{6} + y - \cancel{x} + \cancel{6} - y = 12 \\ x = 0$$

для второго уравнения есть 4 варианта раскрытия модулей, поэтому на графике получили 4 окружности с центрами $(6; 8)$; $(-6; 8)$; $(-6; -8)$; $(6; -8)$ и радиусом $(5a)$



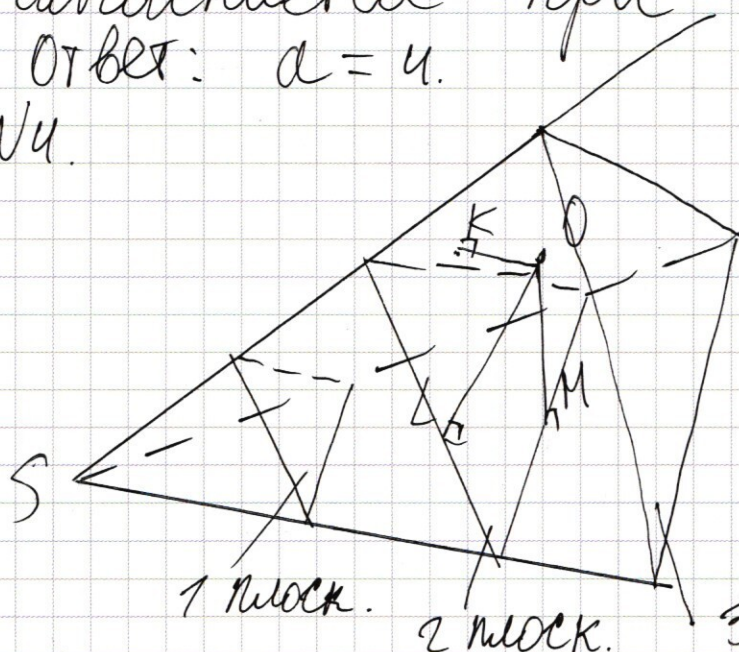
2 решения возможны только в случае, когда окружности с центрами в т. А и т. В

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

касаются квадрата. Данное условие
выполняется при $a=4$.

Ответ: $a=4$.

НЧ.



Дано: сфера
центр. т. O
 $S_1=4, S_2=9$
Найти: $\angle KSO$,
 $S_{\text{сек}} - ?$

Все 3 плоскости параллельны
пусть расстояние от т. S до первой
плоскости равно h , тогда $\frac{h}{h+2r} = \frac{2}{3}$,
где r - радиус сферы.

$$3h = 2h + 2r$$

$$h = 2r$$

Тогда имеем для 1 и 2 плоскости
 $\frac{4r}{4r+r} = \frac{4}{5} \Rightarrow S_{\text{сек}} = 4 \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{4} = 6,25$

$$SO = h + 4r = 5r; OK = r \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{KO}{OS} = \frac{r}{5r} = 0,2$$

$$\angle KSO = \arcsin 0,2$$

Ответ: $\angle KSO = 6,25^\circ$; $\angle KSO = \arcsin 0,2$
 №2.

$$\cos 7X + \cos 3X - \sqrt{2} \cos 10X = \sin 7X + \sin 3X$$

$$2 \cos 5X \cos 2X - \sqrt{2} (\cos^2 5X - \sin^2 5X) =$$

$$= 2 \sin 5X \cos 2X$$

$$2 \cos 2X (\cos 5X - \sin 5X) - \sqrt{2} (\cos^2 5X - \sin^2 5X) = 0$$

$$(\cos 5X - \sin 5X)(2 \cos 2X - \sqrt{2}(\cos 5X + \sin 5X)) = 0$$

$$1) \cos 5X = \sin 5X | : (\cos 5X)$$

$$\cos 5X \neq 0$$

$$\tan 5X = 1$$

$$5X = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$X = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \cos 2X - \sqrt{2} (\cos 5X + \sin 5X) = 0$$

$$\cos 2X = \cos 5X \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 5X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 2X = \cos(5X - \frac{\pi}{4})$$

1 кл.

$$2X = 5X - \frac{\pi}{4}$$

$$X = \frac{\pi}{12}$$

2 кл.

$$2X = \frac{\pi}{4} - 5X$$

$$X = \frac{\pi}{28}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}; k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{28}$

№3.

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad y > 0, x < 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

Рассмотрим уравнение отн. x

$$D = y^2 + 8y + 16 - 4(1-1)(2y^2 - 8y) = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2 > 0 \text{ и } y \neq \frac{4}{3}$$

$$x_1 = y - 4$$

$$x_2 = -2y$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right) \lg y = (2y) \lg(2y^2)$$

$$(16y^2) \lg y = (2y) \lg(2y^2)$$

$$2^4 \lg y - \lg 2y^2 = 2 \lg y - \lg 2y^2 = 1$$

$$2 \lg \frac{y^2}{4} = 1$$

~~либо $\lg \frac{y^2}{4} = 0$ и нет решений т.к.~~

второй

$$\log \lg \frac{y^2}{4} = \log_2 y \lg \frac{1}{2}$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right) \frac{y^2}{4} = \log_2 y$$

$$-2 \log_2 \frac{y}{2} = \log_2 y$$

$$\log_2 \frac{y^3}{4} = 0 \quad \frac{y^3}{4} = 1$$

$$x = -2^3 \sqrt[3]{4} \quad y^3 = 4 \quad y = \sqrt[3]{4}$$

2 случая

$$x = y - 4$$

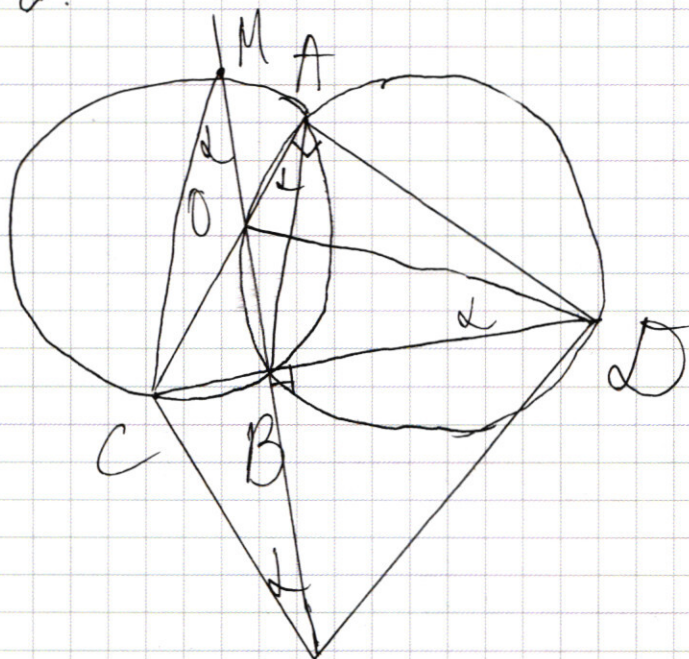
$$\left(\frac{y-4}{y^2}\right)^4 \lg y = (4-y) \lg(4y-y^2)$$

$$(4-y)^4 \lg y - \lg(4y-y^2) \cdot y^{-2} \lg y = 1$$

$$(4-y) \lg \frac{y^3}{4-y} \cdot y^{-2} \lg y = 1$$

нет решений

Ответ: $y = \sqrt[3]{54}$; $x = 1 - 2\sqrt[3]{54}$
№6.



а) Дано: 2 окр.
 $r = 13$, $\angle CAB = 90^\circ$
Т. $A = T. A$ и B
 $C \in 1$ окр.
 $E \in 2$ окр.
 $BF = FE$
Найти: CF

Т. к. $BF = FE$, а $\angle FBD = 90^\circ \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$

дуги AB у обеих окружностей равны $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow \angle CAB + \angle ADB + \angle BDF = 180^\circ \Rightarrow AC \parallel FD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$85 + (3^{81} - 1)x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

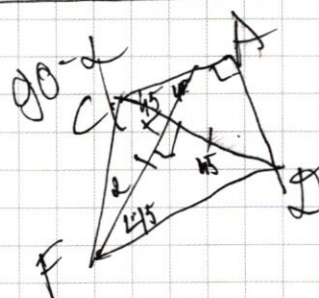
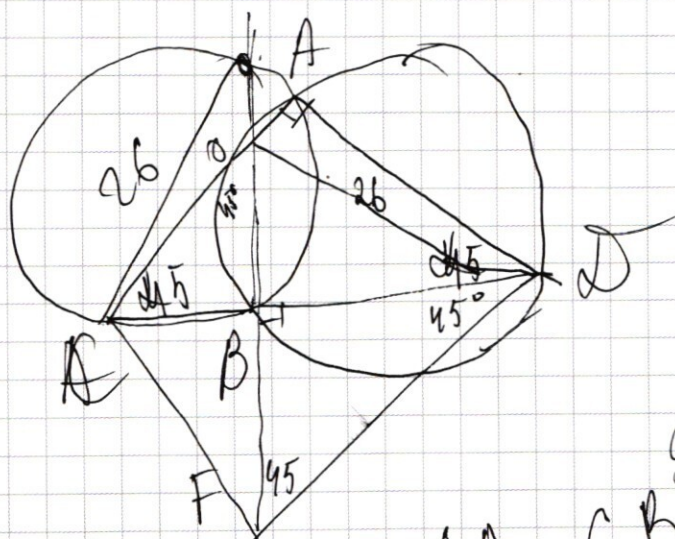


~~$$x \cdot 3^{81} - 4 \cdot 3^{81} + 3x \leq 85 + 4x$$~~

$$85 + x \cdot 3^{81} - x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^{81}(x - 4) \leq 3^x + x - 85$$

~~$$3(3^{80}x - 4 \cdot 3^{80} - 3^{x-1}) \leq x - 85$$~~



$$CO \cdot CA = CB \cdot CD$$

$$FB \cdot FO$$

$$CO \cdot CA = CB \cdot CD$$

$$FB \cdot FO$$

$\triangle CMB = \triangle ODB$ (по углу и гипотенузе)
 $CB = OB$, $MB = BD$
 $CF = 26$
Ответ: 26.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle KSO = ?$
 $\frac{h \cdot 4}{(h+2r)g} = \frac{V_1}{V_2}$
 $\frac{4 \cdot h}{3} = \frac{S(4+r)}{3}$
 $\frac{g \cdot (h+2r)}{3}$
 $SK^2 + r^2 = SO^2$
 $SM^2 + r^2 = SO^2$
 $SK = SM$

a) $4 \cdot \frac{25}{464} = \frac{ab \sin \alpha}{2} = 4$
 $\frac{25}{4} = 6,25$
 $4r + r = 5r$
 $\arcsin \frac{1}{5}$
 $\angle F = ?$
 $(a\sqrt{2} - x)a\sqrt{2} = a\sqrt{r^2 - a^2}$
 $2a^2 - xa\sqrt{2} = a\sqrt{r^2 - a^2}$
 $x = \frac{2a^2 - a\sqrt{r^2 - a^2}}{a\sqrt{2}}$
 $x = \frac{2a - \sqrt{r^2 - a^2}}{\sqrt{2}}$
 $k = \frac{2}{3}$
 $\frac{h}{h+2r} = \frac{2}{3}$
 $3h = 2h + 4r$
 $h = 4r$
 $\frac{ab \sin \alpha}{2} = 4$
 $\frac{k^2 ab \sin \alpha}{2} = 9$
 $\frac{4r}{4r+r} = \frac{4}{5}$
 $\frac{46}{25} \cdot 4 = \frac{64}{25}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x) \lg(-xy) = (-x) \lg(-x) + \lg(y)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

$$\text{OD } 3: y > 0, x < 0.$$

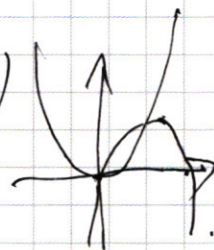
$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0.$$

$$(52y - 252)^2 - (x + 2)^2 + 4 - xy = 0. \quad \frac{32}{24}$$

$$-8y = -2 \cdot 52y \cdot 252$$

$$2(y - 2)^2 - (x + 2)^2 + 4 - xy = 0$$

$$x^4 \lg y \cdot y - 2 \lg y = (-x) \lg(-x) + \lg(y)$$



$$y = \lg x \lg xy$$

$$2y^2 + y(-x - 8) - x^2 - 4x = 0.$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 4x^2 + 16x$$

$$\begin{matrix} \text{6 пов. ст.} & \text{8 пов. ст.} & \text{8 пов. ст.} \\ \text{10 пов. ст.} & \text{10 пов. ст.} & \text{10 пов. ст.} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 5x^2 + 32x + 64 \\ 4x^2 + 32x + 64 \end{matrix} \quad y(4-y)$$

Пол. ч.

$$(2x + 8)^2 + x^2 \quad -\frac{4}{-2} = 2$$

$$-x^2 + x(-y - 4) + 2y^2 - 8y = 0$$

$$\begin{aligned} D &= y^2 + 8y + 16 - 4(-1)(2y^2 - 8y) = \\ &= y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y \\ &= 9y^2 - 24y + 16 = 0 \end{aligned}$$

$$x = \frac{y + 4 - 3y + 4}{-2} = \frac{-2y + 8}{-2} = y - 4 \quad 8 - 4 = 4$$

$$x_2 = \frac{y + 4 + 3y - 4}{-2} = -2y$$

$$\lg y^4 > \lg(4y - y^2)$$

$$\begin{aligned} y^4 &> 4y - y^2 \\ y^4 + y^2 - 4y &> 0 \\ y(y^3 + y - 4) &> 0 \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \quad x = -2y.$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right) \lg y = (2y) \lg(2y^2) \quad (3 \cdot 4)^{15}$$

$$(16y^2) \lg y = (2y) \lg 2y^2$$

$$2 \lg y = \lg 2y^2$$

$$4 \lg 52 - \lg 4$$

$$(4y) \lg y^2 = (2y) \lg 2y^2$$

$$y^2 = 2y^2$$

$$52 \cdot 2 \lg 52 - \lg$$

$$\frac{4y \lg y^2}{2y \lg 2y^2} = 1 \quad \frac{2 \lg y^2 \lg y^2}{2y \lg 2y^2} = 1$$

$$x = y - 4$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right) \lg y = (4-y) \lg(4-y^2)$$

$$2 \lg y^2 \lg(4-y^2) = 1$$

$$(4-y)^4 \lg y - 2 \lg y = (4-y) \lg(4-y^2)$$

$$(4-y)^4 \lg y - \lg(4-y^2) \cdot y - 2 \lg y = 1$$

$$y^4 = 2y^2$$

$$2 \lg \frac{y^4}{4} = \frac{1}{y} \lg \frac{1}{2} \quad (4-y) \lg \frac{y^4}{4y-y^2} \cdot y - 2 \lg y = 1$$

$$-25 = 52 + 10$$

$$4 \sin 2x - 52(-5 \sin 5x + 5 \cos 5x) = 0$$

$$y^2 \lg y^2$$

$$-52 \cos 5x$$

$$\lg 2 \lg 2 y \lg 10 y$$

$$3 + 10$$

$$3 + 20 + 12 = 35$$

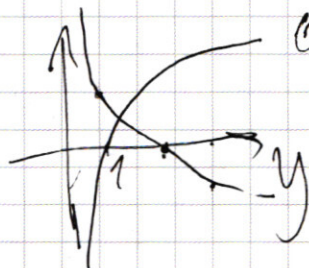
$$\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos$$

$$-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2} = 2 \cos \frac{4\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1$$

$$\sqrt{2} \cos 2x \quad 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos \frac{\pi}{2} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{2} \sin \cos \left(\frac{\pi}{2} + 5x \right)$$



$$2 \cos \pi - \sin \frac{\pi}{2} (\sin 5x) \quad \sqrt{2} (\cos 5\pi + \sin 5\pi)$$

$$[-2; 2] = \sqrt{2} \quad ([\sqrt{2}; \sqrt{2}])$$

$$2x =$$

$$[-2; 2]$$

$$\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$$

$$\log a b = \frac{\log b}{\log a} \quad \log a b = \frac{\log b}{\log a}$$

$$(a\sqrt{2} - x)a\sqrt{2} = dy$$

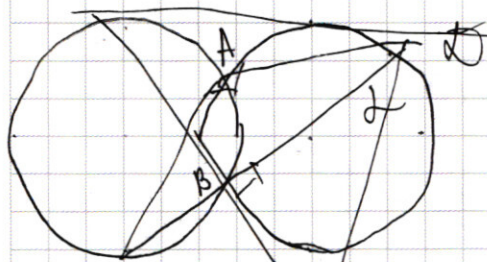
$$y = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$\log \frac{y^2}{4} = \log y \log \frac{1}{2}$$

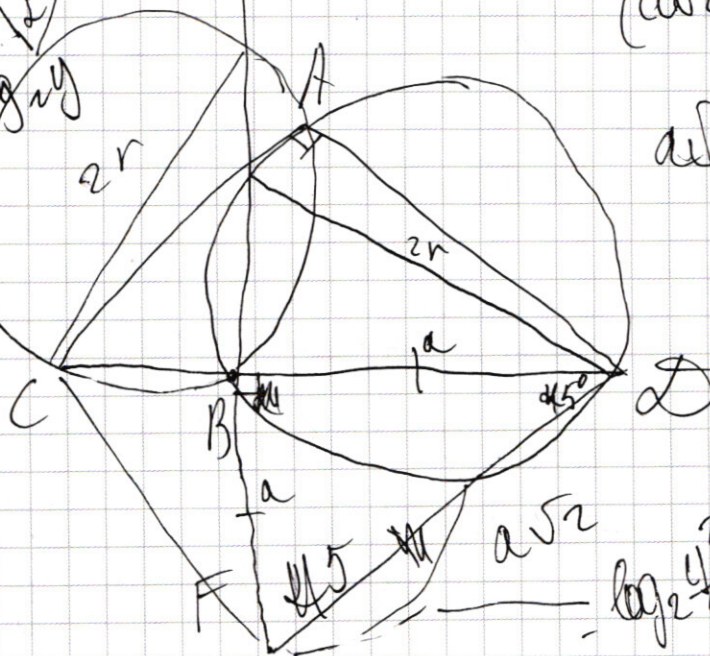
$$\log \frac{y^2}{4} = \log \frac{1}{2} \log y$$

$$\log \frac{y^2}{4} = \log \frac{1}{2} \log y$$

$$\log \frac{y^2}{4} = \log y \log \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \log y = 0$$



$$\log \frac{y^2}{4} = \log y \log \frac{1}{2}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 16875 \mid 5 \\
 \underline{15} \\
 18 \\
 \underline{15} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3375 \mid 5 \\
 \underline{30} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 645 \mid 5 \\
 \underline{5} \\
 14 \\
 \underline{15} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 135 \mid 5 \\
 \underline{10} \\
 35 \\
 \underline{35} \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 35 \\
 \underline{32} \\
 40 \\
 \underline{40} \\
 0
 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

4 макс. 3 тройки 1.

4 макс. 9 2 тр. 2 eq.

$$\begin{array}{r}
 8! \\
 \underline{4! \cdot 3!} \\
 8! \\
 \underline{4! \cdot 2!} \\
 8! \\
 \underline{4! \cdot 2!} \\
 8!
 \end{array}
 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = 1120$$

$$= 5 \cdot 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 8 = 5 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 4 = 1120$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 4x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\cos 5x = \sin 5x, \sin x \neq 0 \quad 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$[-2; 2]$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot 2}{2}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$$-6 - 6 + 6$$

$$+6 - 6 - 6$$

$$243$$

$$80$$

$$163$$

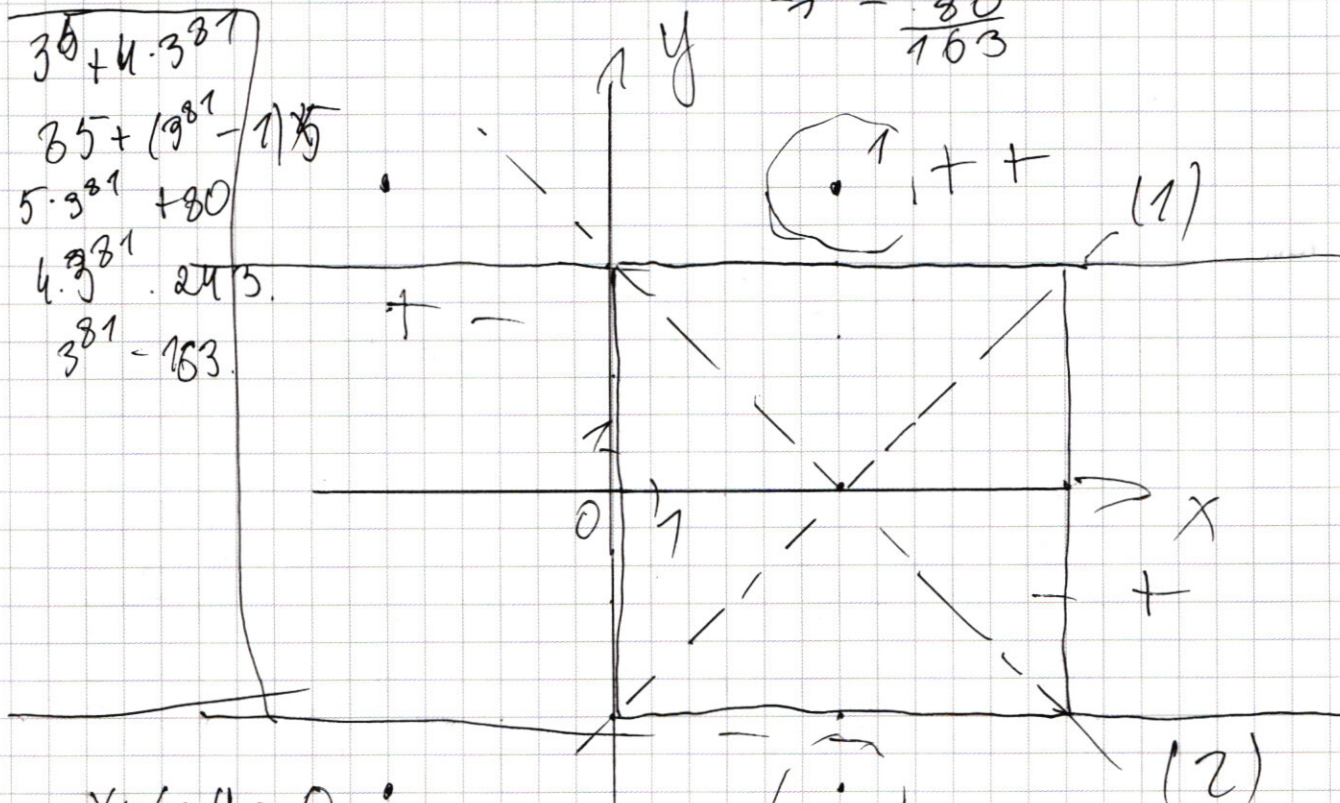
$$36 + 4 \cdot 3^3$$

$$35 + (9^3 - 1) \cdot 5$$

$$5 \cdot 3^3 + 80$$

$$4 \cdot 3^3 \cdot 243$$

$$3^3 - 163$$



$$x-6-y=0$$

$$y=x-6$$

$$y=-x+6$$

$$1) \quad ++$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$3) \quad - +$$

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$y = 6$$

$$2) \quad + -$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$4) \quad - -$$

$$-x+6+y - x+6+y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

$$-x-6$$

$$a = 4$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x$$

$$\cos 15x -$$

$$3x = \frac{\pi}{4} \quad x = \frac{\pi}{12}$$