

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Решение:

- 1) $16875 = 3^3 \cdot 5^4$. Т.к. произведение цифр 8-значного числа равно $= 16875$, то в числе могут использоваться только цифры 5, 3, 9, 1 (другие цифры содержат делители, не входящие в число 16875).
 - 2) Кратна 5 только цифра 5 (0 в числе содержаться не может, иначе произведение цифр $= 0$) $\Rightarrow$ т.к. $16875 : 5^4$, то в числе 4 цифры 5, которые можно расположить $\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ способами. $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ способами.
 - 3) Делитель $16875 - 3^3$ можно получить 2-мя способами: $3 \cdot 3 \cdot 3$ и $9 \cdot 3$, тогда:
 - (1) $C_8^4 \cdot C_4^3 = 70 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 70 \cdot 4 = 280$ чисел, в которых 4 цифры 5, 3 цифры 3, оставшаяся цифра 1.
 - (2) $C_8^4 \cdot C_4^1 \cdot C_3^3 = 70 \cdot 4 \cdot 3 = 840$ чисел, в которых 4 цифры 5, 1 цифра 3 и одна цифра 9, оставшиеся 2 - единицы.
 - 4) тогда, всего чисел с указанным св-вом: $280 + 840 = 1120$
- Ответ: 1120 чисел.

2. Решение:

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x &= \sin 7x + \sin 3x \\ 2 \cos \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2} - \sqrt{2} \cos 10x &= 2 \sin \frac{7x+3x}{2} \cdot \cos \frac{7x-3x}{2} \\ 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) &= 0 \\ 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) (\cos 5x - \sin 5x) &= 0 \quad | : \sqrt{2} \\ (\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) &= 0 \end{aligned}$$

продолжение решения на странице 2.

$$1) \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$\cos 5x = \sin 5x \quad | : \cos 5x$ (т.к. если $\cos 5x = 0$, то $\sin 5x = 1$, тогда $0 - 1 = 0$ - не верно)

$$\operatorname{tg} 5x = 1 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 5x + \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x + 2 \sin \frac{5x + \frac{\pi}{2} - 5x}{2} \cdot \sin \frac{5x + 5x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = 2 \cos \frac{5x + \frac{\pi}{2} - 5x}{2} \cdot \cos \frac{5x - \frac{\pi}{2} + 5x}{2} = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2 \sin \frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\textcircled{1} \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{7}{2}x = \frac{\pi}{8} + \pi k \quad | : \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ x_2 = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \\ x_3 = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{2} \sin(-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$-\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{8} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{3}{2}x = \frac{\pi}{8} - \pi k \quad | : \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

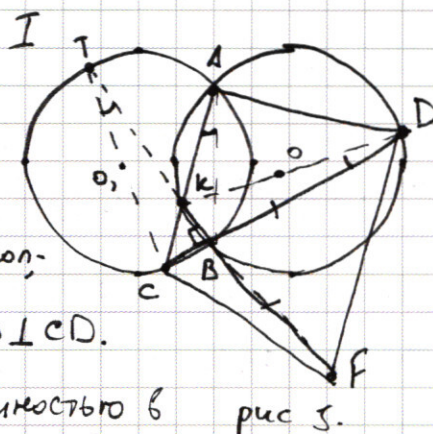
6. Решение: (а) Рассмотрим случай рас-
положения точек C и D

I (рис. 1)

1) Проведем диаметр Dk, тогда $\angle CBD = 90^\circ$ (угон-
опирающиеся на диаметр) $\Rightarrow K \in BF$, т.к. $KB \perp CD$.

2) продолжим Bk до пересечения с 2-ой окружностью в

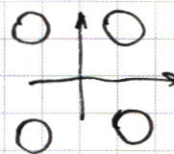
точке T. Тогда $\angle KDB = \angle KAB$ - вписанные
продолжение решение на странице 3.



+

$$x-6=9$$

$$y=y.$$



$$-x+6+y-x+6-y=12$$

$$-2x+12=12$$

$$\boxed{x=0}$$

$$-6-y < 0$$

$$y > -6$$

$$-6+y < 0$$

$$\boxed{-6 < y < 6}$$

$$|y| < 6$$

$$(16-8) \leq 16-8$$

$$x-6+y+x-6-y=12$$

$$\boxed{x=12}$$

$$\boxed{6 > y}$$

$$6 > y$$

$$\boxed{y < -6}$$

$$\begin{cases} 12=x \\ y < -6 \\ y > 6 \end{cases}$$

$$-x+6+y+x-6+y=12$$

$$y=6$$

$$y=6$$

$$|x-12| < 0 \Rightarrow x < 12$$

$$x-6+6 > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$x-6-y-x+6-y=12$$

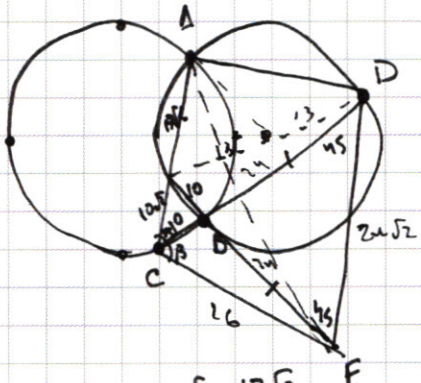
$$-2y=12$$

$$y=-6$$

$$x > 0$$

$$x-12 \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 12$$



$$10 \cdot 34 = 10\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2}$$

$$\cos(\alpha+\beta) =$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{24}{26}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + 0) =$$

$$\cos(\frac{\pi}{6} + 0) = \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos 0 - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin 0$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2y^2 - xy - y^2 - 4x - 2y = 0$$

$$(y-x)(y+x) + y(y-x) - 4(x+2y) = 0$$

$$(y-x)(x+2y) - 4(x+2y) = 0$$

$$(2y+x)(y-x-4) = 0$$

$$1) -x = 2y$$

$$x^4 = 16y^4$$

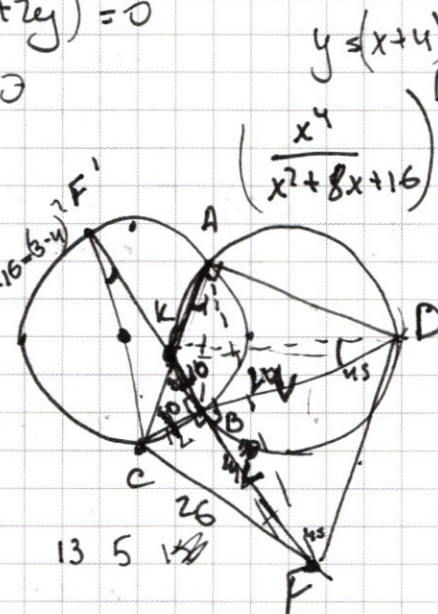
$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$(4y)^{2\lg y} = 2y^{\lg 2} \cdot 2y^{2\lg y} \quad | : 2y^{2\lg y}$$

$$\left(\frac{4y}{2y}\right)^{2\lg y} = 2y^{\lg 2}$$

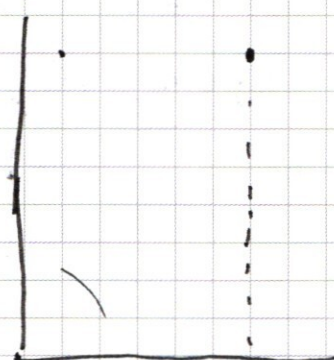
$$2^{2\lg y} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2}$$



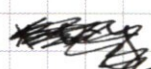
$$3+3=11$$

$$y = x+4$$

$$\left(\frac{x^4}{x^2+8x+16}\right)^{\lg x+4} = -x^{\lg -x(x+4)}$$



$$(x-6-y) + |x-6+y| = 12$$



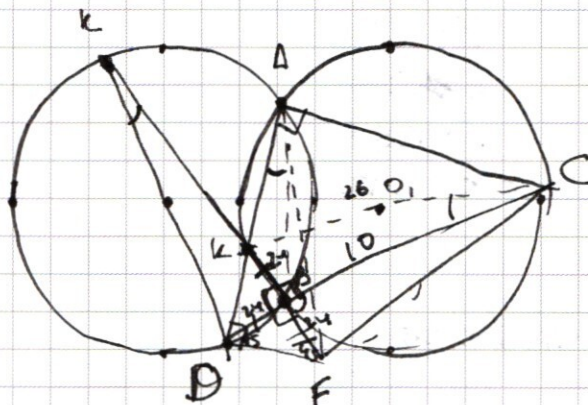
$$CF^2 = DF^2 + DC^2 - 2DF \cdot DC \cdot \cos 45^\circ$$

+	+
-	+
+	-
-	-

$$2x - 12 = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$



$$\triangle DBK \sim \triangle DAC$$

$$\cos 2x + \cos 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 4x$$

$$2\cos 5x \cdot \cos 2x - 2\sin 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2}(2\cos^2 2x - 1) = 0$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x + \sqrt{2}\sin 5x) = 0$$

$$1) \cos 5x = \sin 5x$$

$$\operatorname{tg}(5x) = 1 \Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$$

$$\lg(2y^2) = \lg 2 + 2\lg y$$

$$2) \sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$$

$$-(\cos 5x + \cos(\frac{\pi}{2} + 5x)) = -2 \cdot \cos(5x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos \frac{\pi}{4} = -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos 2x - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$-2\sin \frac{2x - 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{2x + 5x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$-1,5x - \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$-1,5x = \frac{\pi}{8} + \pi k$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$\frac{7}{2}x + \frac{\pi}{8} = \pi k$$

$$\frac{7}{2}x = -\frac{\pi}{8} + \pi k \Rightarrow x = -\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$$

$$\lg \log_{10} y = x$$

$$10^x = y$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 3y = 0$$

$$2y^2 - x^2 - 4(x - 2y)$$

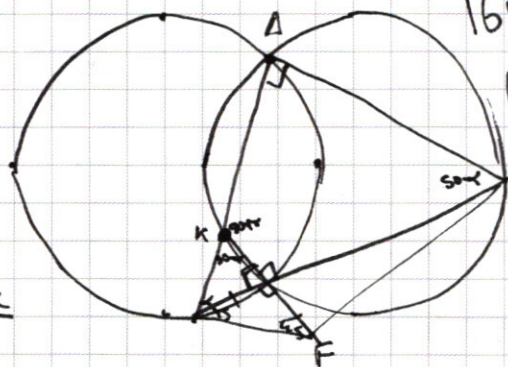
$$2y^2 - x^2 + 4(2y - x)$$

$$x^4 = 16y^4$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$16y^2$$

$$(4y)^2 \cdot \lg y = 2y^{\lg 2y^2}$$



$$(y-x)(y+x) + y(y-x) - 4(x+2y) = 0$$

$$(y-x)(y+x+y) - 4(x+2y) = 0$$

$$(x+2y)(y-x-4) = 0$$

$$x+2y=0$$

$$x = -2y$$

$$-x = 2y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 3} \\ 5625 \overline{) 3} \\ 1875 \overline{) 3} \\ 625 \overline{) 5} \\ 125 \overline{) 5} \\ 25 \overline{) 5} \end{array}$$

$$3^3 \cdot 5^4$$

$$C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

$$\begin{array}{c} 3 \ 9 \\ 3 \ 3 \ 3 \end{array}$$

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 125 \\ + 50 \\ \hline 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \\ 1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 280 \\ \times 3 \\ \hline 840 \end{array}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(y^2 - 8y + 16) + y^2 - (x^2 + 4x + 4) - xy = 0$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$3 + 5 + 6 = 14$$

$$y \geq 281$$

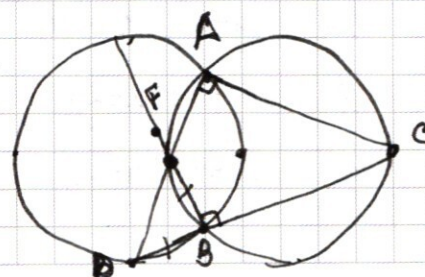
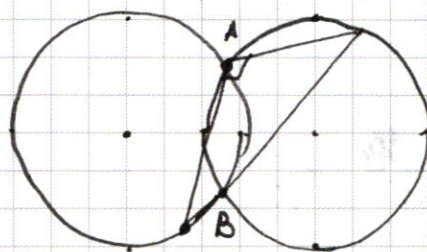
$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^8$$

$$y < 85 + (3^8 - 1)x$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$85 + 3^8 \cdot x - x \geq 3^x + 4 \cdot 3^8$$

$$(26 - 10)(26 + 10) = 24$$



$\log_3 y \geq x + 8 + \log_3 4$
 $\log_3 y < \log_3 (85 + 3^x)$
 $\log_3 y < 4 + \log_3 (3^x + 8)$
 $3^x + 5 + 5 + 6 = 18$
 $81 + 4 + 3^x - x$

$\frac{x^4}{x^2} = (\log_2)^2 \lg y$
 $\frac{1}{2} \lg (192) = \lg y$

$\arctg \frac{1}{5}$
 $\frac{x}{x+2r} = \frac{2}{3}$
 $2x + 4r = 31$
 $x = 4r$

$x^4 \lg x^4 = x$
 $(x^4 + 8x + 10) \lg(-x \cdot x + y)$
 $x + y > 0$
 $0 > x > -4$
 $\lg y = \frac{1}{2} \lg 2 + \lg 4$
 $\lg y = \frac{1}{2} \lg 2 = \lg 2 \cdot \lg 4$
 $3^x + 4 \cdot 81 = 85 + 3$
 $|x - 6 + y| + |x - 6 - y| = 12$
 $x = 85 + a$
 $\frac{3^{81}}{3^{a+4}} = 100$
 $x - 6 + y + x - 6 - y = 12$
 $2x - 12 = 12$
 $x = 12$
 $6 + y > 0 \Rightarrow y > -6$
 $-6 - y > 0 \Rightarrow y < -6$
 $-x + 6 - y + x - 6 - y = 12$
 $y = -6$
 $x - 12 \leq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 12$
 $x \geq 0$
 $x - 6 + y - x + 6 + y = 12$
 $y = 6$
 $x > 0$
 $x - 12 \leq 0 \Rightarrow x \leq 12$
 $-x + 6 - y - x + 6 + y = 12$
 $-2x + 12 = 12$
 $x = 0$
 $-6 + y < 0 \Rightarrow y < 6$
 $-6 - y < 0 \Rightarrow y > -6$

$85 - x + x \cdot 3^{81} - 3^x - 4 \cdot 3^{81} + 85 - 85 + x + 85 \cdot 3^{81} - 3^{81} \cdot x$
 $\frac{3^{25}}{3^x}$
 $x = 4$
 $3^x + 4 \cdot 81 = 85 + 3$
 $|x - 6 + y| + |x - 6 - y| = 12$
 $x = 85 + a$
 $\frac{3^{81}}{3^{a+4}} = 100$
 $x - 6 + y + x - 6 - y = 12$
 $2x - 12 = 12$
 $x = 12$
 $6 + y > 0 \Rightarrow y > -6$
 $-6 - y > 0 \Rightarrow y < -6$
 $-x + 6 - y + x - 6 - y = 12$
 $y = -6$
 $x - 12 \leq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 12$
 $x \geq 0$
 $x - 6 + y - x + 6 + y = 12$
 $y = 6$
 $x > 0$
 $x - 12 \leq 0 \Rightarrow x \leq 12$
 $-x + 6 - y - x + 6 + y = 12$
 $-2x + 12 = 12$
 $x = 0$
 $-6 + y < 0 \Rightarrow y < 6$
 $-6 - y < 0 \Rightarrow y > -6$

$(12, 0)$
 $(12, 6)$
 $(12, -6)$
 $(-1, -1)$
 $(1, 1)$
 $(-1, 1)$
 $(1, -1)$

$3^{4+a} + 4 \cdot 3^{81} = 3^4 \cdot 3^a + 4 \cdot 3^{81}$
 $85 + (3^{81} - 1)x$
 $36 + 4 = 40$
 $(1x - 1)^2 + (1y - 1)^2 = 4$
 $(-1 - 1)^2 + (1y - 1)^2 = 4$
 $(1y - 1)^2 = 4$
 $|y - 1| = 2 \Rightarrow y - 1 = 2 \Rightarrow y = 3$
 $-y - 1 = 2 \Rightarrow y = -3$
 $|y - 1| = -2 \Rightarrow y - 1 = -2 \Rightarrow y = -1$
 $-y - 1 = -2 \Rightarrow y = 1$
 $|y| = -1 \Rightarrow y = -1$

$a < 4$	$a = 4$	$a = 40$	$a = 100$	$a > 100$
$(6, 6)$ $(6, -6)$	$(12, 6)$ $(12, -6)$	$12, 0$		

$4 < a < 40$
 $a = 40$
 $a = 100$
 $40 < a < 100$

$3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 3^{81} (81 + 4) = 0 + 3^{81} \cdot 85$
 $1 + 6 + 8 + 1 + 5 + 3^{81} < a < 110$
 $3 + 5 + 6 = 14 + 5 = 19$

12
 720
 3
 35
 $21, 35$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x+2y)(y-x-4)=0$$

$$I \quad x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$$

$$\frac{x^4}{y^2} = \frac{2^4 \cdot y^4}{y^2} = 16y^2$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(4y)^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{2\lg y}$$

$$2^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2}$$

$$\log_{16} 2^{2\lg y} = \log_{16} (2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2})$$

$$2\lg y = \lg 2 + \log_2 y^{\lg 2}$$

$$\lg = \log_{10}$$

$$\log_{16} \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = a$$

$$\log_{16} \frac{x^4}{y^2} a = \lg y$$

$$\log_{16} 2^{2y} \cdot \log_{10} 2y^2 = \frac{1}{2} \log_{16} 2y^2$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} x - x$$

$$3 - 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{82} - 1$$

$$y = -\frac{1}{2}x$$

$$\frac{4x^4}{x^2} = 4x^2 \log_{10} \frac{1}{2}x = -x \lg \frac{1}{2}x^2$$

$$-2x \log_{10} \frac{x^2}{4} = -x \lg \frac{x^2}{2}$$

$$10^{\lg y} = y^2$$

$$2^{\lg y} \cdot 5^{\lg y} = y^2$$

$$(2y)^{\lg 2} \cdot 5^{\lg y} = y^2$$

$$y = x + y$$

$$y - y = x$$

$$\left(\frac{y-y}{y^2} \right)$$

$$\frac{1}{2} \log_{16} \frac{x^4}{y^2} = x \lg \frac{1}{2}x = \lg y$$

$$\log_{16} \frac{x^4}{y^2} = 2\lg y$$

$$\frac{2\lg y}{\lg 2} = 1$$

$$\lg 2 = a$$

$$\lg y = b$$

$$a \cdot 2^b$$

$$2^b = 2y$$

$$2^b = 2 \cdot y$$

$$2^{b-a} = y$$

$$y = 2^{b-a}$$

$$2^{b-a} = y$$

$$2^{b-a} = y$$

$$2^{b-a} = y$$

$$2^{b-a} = y$$

$$2^{b-a} = y$$

$$2^{b-a} = y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CTB = \angle CAB$ - вписанные углы, но т.к. $\angle CAB$ - это $\angle KAB$, то
 $\angle CTB = \angle KDB$, т.к. $BK \perp CD$, то $\angle TBC = 90^\circ \Rightarrow CT$ - диаметр окружности
 $\Rightarrow CT = DK$ (т.к. у окр. равны радиусы)
 3) $\triangle CTB = \triangle KDB$, т.к. $TC = KD$ и $\angle CTB = \angle KDB$ (по гипотенузе и
 острому углу), $\angle TBC = \angle KBD = 90^\circ \Rightarrow TB = BD = BF$
 4) $\triangle CTF$: $CB \perp TF$, $TB = BF \Rightarrow \triangle CTF$ - равнобедренный (высота Δ явля-
 ется медианой) $\Rightarrow CF = CT = 26 = 2R$

II (рис. 2)

1) Проведем диаметр CK , тогда
 $\angle KBC = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow K \in BF$, т.к. $KB \perp CD$.

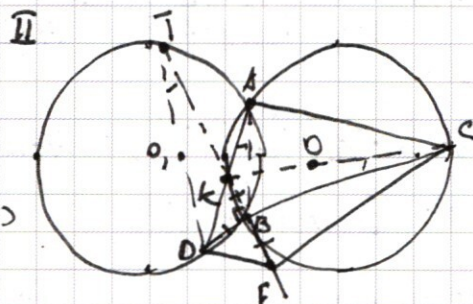


рис. 2.

2) Продлим BK до пересечения со 2-ой окружностью
 в точке T . Тогда $\angle KCB = \angle KAB$ - вписанные, $\angle OAB = \angle OTB$ -
 вписанные, т.к. $\angle DAB$ - это $\angle KAB$, то $\angle DTB = \angle KCB$
 3) $\triangle KCB = \triangle DTB$, т.к. $\angle CBD = \angle CBK = 90^\circ$, $\angle KCB = \angle DTB$ по доказанному
 ранее и $CK = TD$ (т.к. $\angle CBD = 90^\circ \Rightarrow TD$ - диаметр, а $TD = CK$ как
 диаметры равных окружностей) - по гипотенузе и острому
 углу. $\Rightarrow DB = KB$
 4) $\triangle KCF$: $CB \perp FK$, $KB = BF \Rightarrow \triangle KCF$ - равнобедренный (высота
 Δ является медианой) $\Rightarrow KC = CF = 2R = 26$

Ответ: $CF = 26$ (в обоих рассмотренных случаях)

(Б) Решение:

1) Рассмотрим $\triangle CBF$: (продолжение решения на странице 4)

По доказанному в п. а, $CF=26$; $BC=10$, $\angle CBF=90^\circ$, т.к. $BF \perp CD$ и $B \in CD \Rightarrow BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 24$ (по т. Пифагора), т.к. $BF=BD$, то $BD=24 > BC$, т.к. $BD > BC$, то подходит случай I из п(а) - по расположению точек. Сохраним обозначения из I в п(а)

2) $CK \cdot CA = CB \cdot CD$ - степень точки C относительно

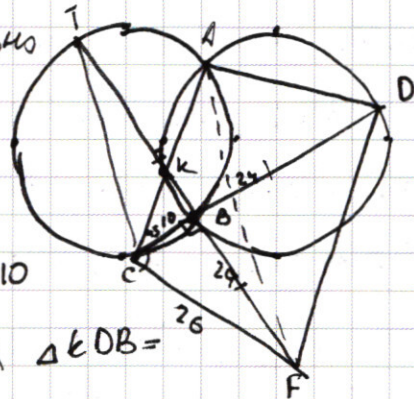
окружности описанной около $AKBD \Rightarrow$

$$\Rightarrow CA = \frac{CB \cdot CD}{CK} = \frac{10 \cdot 34}{10\sqrt{2}} = 17\sqrt{2} \quad (CK = 10\sqrt{2}, \text{ т.т.})$$

$$\angle KBC = 90^\circ, CK = \sqrt{KB^2 + CB^2} = 10\sqrt{2}, \text{ т.т. } KB = CB = 10$$

$$\angle KBC = 90^\circ, \text{ c.k.} = \sqrt{KB^2 + CB^2} = 10\sqrt{2}, \text{ т.к. } KB = CB = 10$$

по доказанному ранее из равенства $\triangle EOB = \triangle CDB$)



$$S_{\Delta ACF} = \frac{AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{17\sqrt{2} \cdot 26 \cdot (\sin 45^\circ \cdot \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cdot \cos 45^\circ)}{2} = 17\sqrt{2} \cdot 13 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{10}{26} + \frac{24}{26} \right) = 17 \cdot 13 \cdot \frac{34}{26} = 17^2 = 289$$

Ober: $S_{\Delta ACF} = 289$

3. Решение:

Q.D.3

$y > 0 \quad x < 0$

$$\int \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\log y} = (-x)^{9-xy} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ответ: $(x, y) : (2, -4)$

$$(2) \quad 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(y^2 - x^2) + (y^2 - xy) - 4(x + 2y) = 0$$

$$(x+y)(y-x) + y(y-x) - 4(x+2y) = 0$$

$$(y-x)(x+y+z) - 4(x+2y) = 0$$

$$(x+2y)(y-x-4) = 0$$

I $x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$ подставляем в (1)

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + 2\lg y} \Rightarrow \frac{(4y)^{2\lg y}}{16y} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{2\lg y} \quad | : (2y)^{2\lg y}$$

$$2^{2\lg y} = (2y)^{\lg 2} \Rightarrow y = 2, x = -4$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Решение:
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(2) - задает окр. с
центрами $(6, 8)$, $(-6, 8)$,
 $(6, -8)$, $(-6, -8)$ и

радиусами $\sqrt{a} \Rightarrow a \geq 0$

(причем "обрубаются"

части окр. находящиеся
в другой полуплоскости от
ц. окр. относительно Ox и Oy)

(1) Рассмотрим 4 случая раскрытия модуля

I +, +

$$x-6-y + x-6+y = 12 \Rightarrow x = 12 \quad \begin{cases} 6-y \geq 0 \\ 6+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow y \in [-6, 6]$$

Заметим, что если пара $(12, y)$ является решением, то и пара $(12, -y)$ является решением

Пусть $A(12, 6)$, $B(12, 0)$, $C(6, 8)$, $D(6, -8)$, $E(-6, -8)$, $F(-6, 8)$.

тогда $AC = \sqrt{40}$, $CB = 10$ при $40 < a < 100$ для этого случая раскрытия модулей система имеет 2 решения, т.е. окр. с радиусами $\sqrt{a}$ и центрами в C и D и $x=12$ в 2-х точках, ровно одна из которых подходит под условие на y (для каждой окр.), при $a \neq 0$ 2 решения $(12, 6)$ и $(12, -6)$, при $a = 100$ 1 решение $(12, 0)$ при остальных a решений нет

II ~~+~~ - +

продолжение решения на странице 6

$$x - 6 + y - x + 6 + y = 12$$

$$y = 6$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 12 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [0, 12]$$

При $a = 4$ окр с центром в $C \cap y = 6$ в одной точке $(6, 6)$

При $a \in (4, 40)$ - 2 решения $(x, 6)$ где $x \in (0, 12)$

При $a = 40$ - 2 решения $(0, 6), (12, 6)$

При остальных a решений нет

~~III~~ ~~+~~ ~~-~~

$$-x + 6 + y - x + 6 + y = 12 \quad x - 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$y = -6$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 12 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [0, 12]$$

При $a = 4$ окр с центром в $D \cap y = -6$ в одной точке $(6, -6)$

При $a \in (4, 40)$ - 2 решения $(x, -6)$ где $x \in (0, 12)$

При $a = 40$ - 2 решения $(0, -6), (12, -6)$

При остальных a решений нет

~~IV~~ ~~-~~ ~~-~~

$$-x + 6 + y - x + 6 - y = 12$$

$$-2x + 12 = 12$$

$$x = 0$$

; ~~Заметим, что~~

$$\begin{cases} -6 - y \leq 0 \\ -6 + y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow y \in [-6, 6]$$

При $a = 40$ 2 решения $(0, -6), (0, 6)$

При $a \in (40, 100)$ - 2 решения $(0, y)$ где $y \in (-6, 6)$

При $a = 100$ 1 решение: $(0, 0)$

При ~~остальных~~ остальных a нет решений

Тогда при $a \in (-\infty; 4)$ - нет реш.; при $a = 4$ - 2 реш.; при $a \in (4, 40)$ - 4 реш.; при $a = 40$ - 4 решения; при $a \in (40, 100)$ - 4 реш.; при $a = 100$ - 2 реш.;

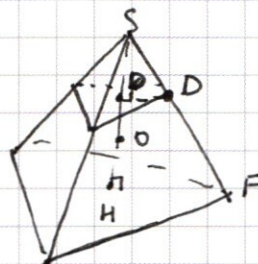
при $a \in (100, +\infty)$ - нет решений

Ответ: $a = 4, a = 100$

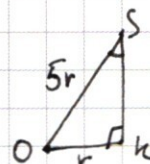
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Решение:

1) Обозначим через P и H точки пересечения SO и описанных в условии плоскостей, т.е. данные плоскости $\perp SO$, то $OP = OH$ - радиусы сферы. Пусть плоскости γ одно из ребер образованного архипримида в точках D и F , тогда $\triangle SPD \sim \triangle SHF$, т.е. $\angle SPD = 90^\circ = \angle SHF$, а также плоскости $\perp SO$ - $\parallel$ м/у собой, покажем, что коэфф. подобия $k = \frac{2}{3}$. Т.е. S сечения относится как $\frac{4}{9} = (\frac{2}{3})^2$, то коэфф. подобия Δ -сечения $\frac{2}{3}$, т.е. точки $(P$ и $H)$ и $(D$ и $F)$ соответственные в данных Δ , то $\frac{PD}{HF} = \frac{2}{3} \Rightarrow \triangle SPD \sim \triangle SHF$ с коэфф. $k = \frac{2}{3}$, тогда $\frac{SP}{SP+2r} = \frac{2}{3} \Rightarrow SP = 4r$, тогда $SO = SP + PO = 5r$

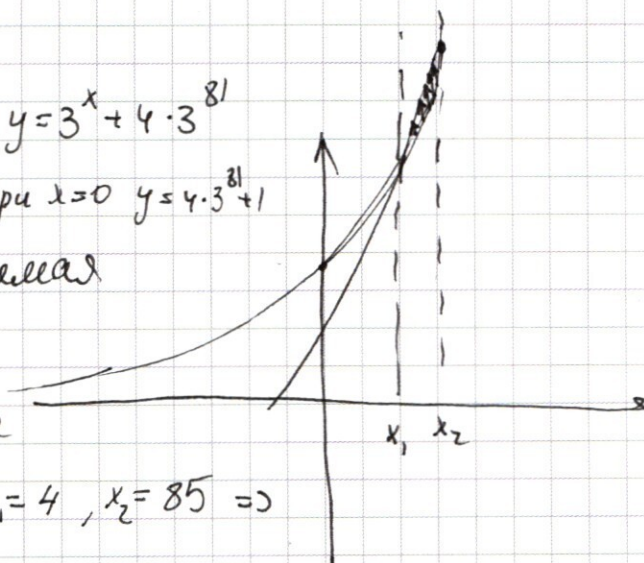


2) Рассмотрим $\triangle SOk$: $SO = 5r$, $Ok = r$ (т.к. k лежит на сфере), откуда $\angle kSO = \arctg \frac{1}{5}$



7. Решение:

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$. Заметим, что $y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
 $y < 85 + (3^{81} - 1)x$ возрастает при $x=0$ $y = 4 \cdot 3^{81} + 1$
 $y = 85 + (3^{81} - 1)x$ - возрастает - прямая
 $x=0$ $y=85$



Прямая пересекает экспоненту в 2

точках с абсциссами x_1 и x_2 $x_1 = 4$, $x_2 = 85 \Rightarrow$

все пары (x, y) удовлетворяющие системе

нер-в $x \in (4, 85)$, тогда кол-во пар $\sum_{x \in (4, 85)} [85 + 3^{81} \cdot x - x - 3^x - 3^{81} \cdot 4]$
 при $\forall x \in \mathbb{Z}$ и $x \in (4, 85)$

Рассмотрим x и $85-x$

$$\begin{aligned} & 85 - x + 3^{81} \cdot x - 3^1 - 4 \cdot 3^{81} + 85 - (85 - x) + 85 \cdot 3^{81} - x \cdot 3^{81} - \\ & - \frac{3^{85}}{3^x} + 4 \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81} - 8 \cdot 3^{81} - 3^x - \frac{3^{85}}{3^x} \end{aligned}$$