

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

21.

$16845 = 5^4 \cdot 3^3$. Бегеми разложения числа 16845 на простые множители показываю количество цифр в разложении, т.е. цифра "5" в восьмизначном числе будет 4, а количество "3" в восьмизначном числе будет 3 или 1. Но тогда количество цифр меньше 8, значит оставшиеся разряды займёт "1". Все количество ~~статей~~ восьмизначных чисел, составленных из 4-х "5", 3-х "3" и 1-й "1", равно: $\bar{P}_{4,3,1} = \frac{(4+3+1)!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$

Количество ~~статей~~ восьмизначных чисел, составленных из 4-х "5", 1-й "3", 1-й "9" и 2-х "1", равно:

$$\bar{P}_{4,1,1,2} = \frac{(4+1+1+2)!}{4! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 840$$

Всего количество восьмизначных чисел удовлетворяющих условию задачи, т.е. произведение цифр равно 16845, равно: $\bar{P}_{4,3,1} + \bar{P}_{4,1,1,2} = 280 + 840 = 1120$
Ответ: 1120.

23.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{8y} = (-x)^{\log_2(-xy)} & (1) \\ y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$$

Решение системы (1) и (2):

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$x^2 + (y+4)x - 2y^2 + 8y = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-y-4 \pm (3y-4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-y-4+3y-4}{2} = y-4 \text{ — упрощаем, } 0 \leq y \leq 4$$

$$x_2 = \frac{-y-4-3y+4}{2} = -2y$$

1) Подставим $x = y-4$ в (1):

$$\left(\frac{y-4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y) \lg(4-y)y$$

$$\frac{(y-4)^{4 \lg y}}{(y^2)^2} = (4-y)(\lg(4-y) + \lg y)$$

$$\frac{(y-4)^{4 \lg y}}{y^4} = y^2 \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y) \cdot (4-y) \lg y$$

$$+ (y-4)^{4 \lg y} = -(y-4) \lg y \cdot y^2 \lg y \cdot (4-y) \lg(4-y)$$

$$\text{Заменим } a = y-4; b = y$$

$$a^{4 \lg b} = (-a) \lg b \cdot b^2 \lg b \cdot (-a) \lg(-a)$$

$$\lg y \cdot (\lg(4-y))^4 - \lg y^2 = \lg(4-y)y \lg(4-y)$$

$$4 \lg y \lg(4-y) - 2 \lg^2 y = \lg^2(4-y) + \lg(4-y) \lg y$$

$$\lg^2(4-y) + 3 \lg y \lg(4-y) + 2 \lg^2 y = 0 \quad \text{т.к. } \lg y \neq 0$$

$$\left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y}\right)^2 + 3 \left(\frac{\lg(4-y)}{\lg y}\right) + 2 = 0$$

$$\text{Заменим } \frac{\lg(4-y)}{\lg y} = a$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$a = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \Rightarrow \lg(4-y) = 2 \lg y \\ a_2 = 1 \Rightarrow \lg(4-y) = \lg y \end{cases} \quad \begin{cases} 4-y = y^2 & (3) \\ 4-y = y & (4) \end{cases}$$

$$y > 0$$

$$(y-4 < 0)$$

$$(4-y > 0)$$

$$1y-4 = 4-y$$

$$y = 1$$

$$\left(\frac{-3}{1}\right)^4 = (3)^4$$

$$1 \neq 3 \Rightarrow y \neq 1$$

$$\lg^2 y \neq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3) $y^2 + y - 4 = 0$
 $D = 1 + 16 = 17$
 $y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$
 $y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$, не удовлетворяет, т.к. $y > 0$
 $y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 4$
 $x = \frac{-1 + \sqrt{17} - 8}{2} = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$
 $\sqrt{17} < 9$
 $17 < 81$

(4) $y = 2 \Rightarrow x = -2$.

(2) Разделим $x = -2y$

$$\left(\frac{-2y}{y^2}\right)^4 \lg y = (2y) \lg(2y \cdot y)$$

$$\lg y (\lg(-2y))^4 - \lg y^2 = (\lg(2y \cdot y)) \lg 2y$$

$$\lg y \cdot \lg(-2y)^4 - 2 \lg y \cdot \lg y = \lg^2(2y) + \lg(2y) \lg y$$

$$4 \lg y \lg(-2y) - 2 \lg^2 y = \lg^2(2y) + \lg(2y) \lg y$$

$$\lg^2(2y) - 3 \lg(y) \lg(2y) + 2 \lg^2 y = 0$$

$$y = 1 \Rightarrow (-2)^4 = 2 \lg^2$$

$$\left(\frac{\lg 2y}{\lg y}\right)^2 - 3 \left(\frac{\lg(2y)}{\lg y}\right) + 2 = 0$$

$$1 \neq 2 \lg^2$$

Замена $b = \frac{\lg 2y}{\lg y}$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$b = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow b_1 = 2; b_2 = 1; \begin{cases} \lg 2y = \lg y^2 \\ \lg 2y = y \end{cases}; \begin{cases} y^2 - 2y = 0 \\ y = 2y \end{cases}; \begin{cases} y > 0 \\ y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$y \geq 0$ ~~$x \geq 0$~~ не удовлетворяет т.к. $y \geq 0$

$$y = 2 \Rightarrow x = -4$$

Проверка: $(-4; 2)$

$$\cancel{64}^{256} 64^{\lg 2} = 4^{\lg 8}$$

$$64^{\lg 2} = 64^{\lg 2} \Rightarrow (-4; 2) \text{ подходит.}$$

Проверка: $(-2; 2)$; $8+4-4+8-16=0$

$$4^{\lg 2} = 2^{\lg 4} \Rightarrow 4^{\lg 2} = 2^{\lg 2} \Rightarrow (-2; 2) \text{ подходит.}$$

Проверка: $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

$$\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2} - \frac{\sqrt{17}-1}{2} + 4\right) \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2} + \frac{2(\sqrt{17}-1)-2}{2}\right) = 0$$

$$(-4+4) \left(\frac{3\sqrt{17}-11}{2}\right) = 0$$

$$0 = 0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{17}+9}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \text{ подходит}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}, \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right); (-4; 2); (-2; 2)$$

15.

$$\begin{cases} |x-6+y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

1) Рассмотрим графике уравнения (1)

$$\begin{cases} x-6+y \geq 0, & y \leq x-6 \\ x-6+y \geq 0, & y \geq -x+6 \end{cases}$$

$$x-6-y+x-6+y=12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$\begin{cases} x-6-y \geq 0, & y \leq x-6 \\ x-6+y \leq 0, & y \leq -x+6 \end{cases}$$

$$x-6-y-x+6-y=12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$$

$$-x+6+y+x-6+y=12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$\begin{cases} x-6-y \leq 0 \\ x-6+y \leq 0 \end{cases}$$

$$-x+6+y-x+6-y=12$$

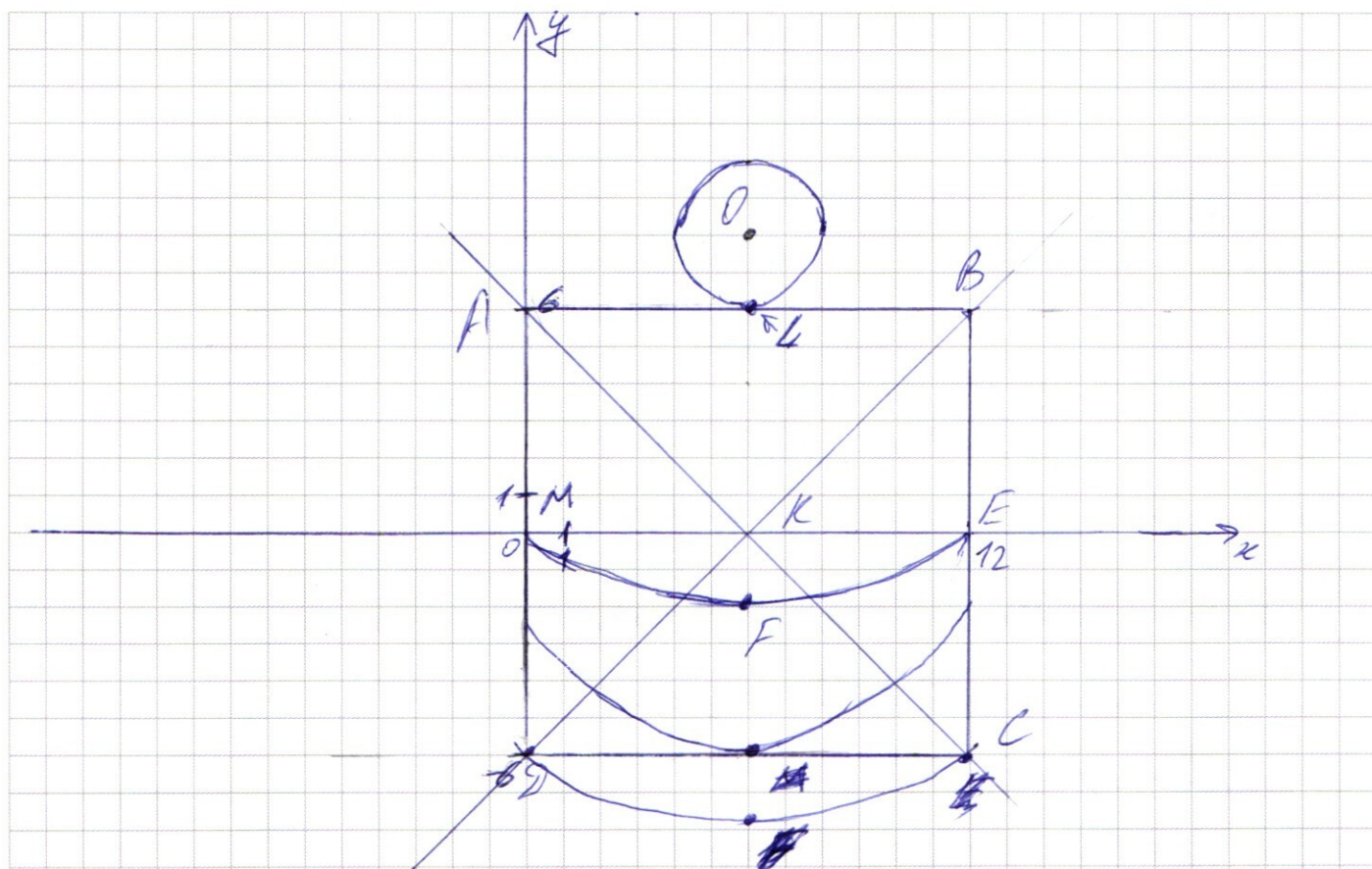
$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

Получаем квадрат ABCD

$$A(0; 6); B(12; 6); C(12; -6); D(0; -6)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



(2) уравнение окружностей с центром $O(6;6)$ и радиусом R . $R \geq 0$

При $R = 0$ получается точка $O(6;6)$ и из графика видно, что она не принадлежит ни одной стороне квадрата $ABCD$.

При $R > 0$. Нам необходимо, чтобы окружность пересекала квадрат в двух точках. Т.к. точка пересечения диагоналей квадрата $K(3;3)$ лежит на одной прямой с т. $O(6;6)$, то $R \in (6 - \sqrt{12}, 6 + \sqrt{12}) \cup (6 - \sqrt{12}, 6 + \sqrt{12}]$
 $R \in (6 - \sqrt{12}, 6 + \sqrt{12}]$, т.е. $|y| \geq 0, |x| \geq 0$. Окружности в II, III и IV областях не будут.
 т.е. $\begin{cases} y = 6 \\ (x-6)^2 + (y-6)^2 = R^2 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 12x + 36 + 4 = R^2 \\ D = 36 - 40 + R^2 \geq 0 \Rightarrow R^2 \geq 4 \end{cases}$

$$F_1 E(12; 0) / F_1 F_2(6; 9):$$

$\Gamma_1 F$

$$(12-6)^2 + (0-9)^2 = 81$$

$$y^2 - 16y + 81 = 0$$

$$D = 64 - 64 + 81 = 81$$

$|OF_2(OE)| = 9$ - радиус окружности,

$$E(12; 0)$$

$$OE(6; -9)$$

$$OE = \sqrt{36 + 81} = 9 = R$$

$$R \in (2; 10]$$

$$\text{ответ } R \in (2; 10]$$

13.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x \quad (\cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 7x) + \sin(\frac{\pi}{4} - 3x) = \cos 10x$$

$$2 \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) \cos(-2x) = \cos 10x$$

$$2(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \sin 5x \frac{\sqrt{2}}{2}) \cos 2x = \cos 10x$$

$$\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x) \cos 2x = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad (\cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} - 5x) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} - 5x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-5x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} - \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) = 0$$

$$-2 \sin(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}) = 0$$

$$\sin(\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}) = 0$$

$$\frac{4x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2} = \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{4x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$-3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{n}}{28} + \frac{25k}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\sqrt{n}}{12} - \frac{25k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z}$$

geben $x_2 = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}; x_2 = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi l}{3}, l \in \mathbb{Z};$

$$x^2 = \frac{8}{20} - \frac{8}{5}, \text{ not.}$$

✓6.

Band!

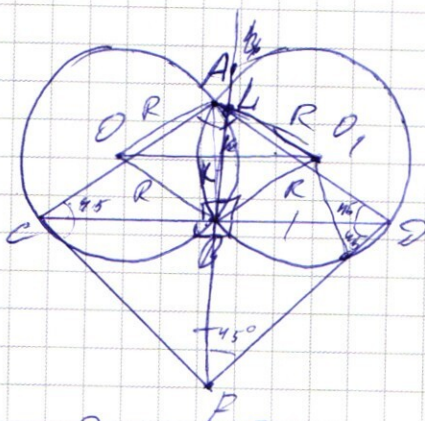
$$R_1^2 R_2^2 R_3$$

$B \subset C \subset D$

$\angle CAD = 90^\circ$

BF_2 BD

✓ C.F



Ремесло

- ① Пусть $\angle ADB = \beta \Rightarrow \angle AD_1B = 2\angle ADB$ (т.к. опущенная не одна дуга)
 $\angle AD_2B = 2\beta$

- ② OD_1 лежит на одной прямой
- $\triangle AOB - \text{р.б.}$ (т.к. $AO = OB = R$)
- $\triangle AOD_1 - \text{р.б.}$ (т.к. $AO = OD_1 = R$)
- $\Rightarrow OD_1$ - медиана, высота и биссектриса.
- $\angle$
- $\left\{ \begin{array}{l} AB \perp OD_1 \\ OD_1 - \text{биссектриса } \angle AOB \end{array} \right.$
- $\angle AOD_1 = \angle BOD_1$
- $\angle AOD_1 = \angle BOD_1 = \beta$
- т. А и т. Л - совпадают

$\triangle AKO_1: \angle BAD = 90^\circ - \beta$
 $\triangle ABD: \angle B_1D = 90^\circ - \beta$ (f.k. $AB \perp BD$)

$$\textcircled{3} \quad \triangle BDF - \text{р.б.} \quad \left. \begin{array}{l} \angle DBF = 90^\circ \\ \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = 45^\circ$$

$$\textcircled{4} \quad \text{т.к. окружности имеют общий радиус} \Rightarrow \text{с. } AB \\ \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ \Rightarrow \triangle ACD - \text{р.б.} \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad \triangle ACD \text{ и } \triangle FCD:$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ACD = \angle FCD = 45^\circ \\ \angle ACD = \angle FCD = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle FCD = \angle ACD = 45^\circ$$

$$\angle FCD = \angle ACD = 45^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle FCD = \angle ACD = 90^\circ \\ AD - \text{общая} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD \cong \triangle FCD$$

AD - общая

$$\text{и} \\ CA = FD$$

$$CD = AF$$

$$\textcircled{6} \quad \triangle ACF$$

$$AF = CD$$

$$\left. \begin{array}{l} AF \perp CD \\ FB = BD \end{array} \right\} \Rightarrow ACF - \text{кв.} \Rightarrow AC = CF = AF = CD$$

$$FB = BD$$

$$\textcircled{7} \quad \left. \begin{array}{l} \angle AOB = \angle COB = 90^\circ \\ OC = OA = OB = OC = R \end{array} \right\} \Rightarrow AOB - \text{кв.}$$

$$\text{и}$$

$$AO = OB = OC = OA$$

$$\text{и}$$

$$OC = OA$$

$$\text{и}$$

$$AC = OC = CF = CB$$

$$\textcircled{8} \quad \triangle ACF:$$

$$AC = CF, \text{ т.к. } AC = CF \Rightarrow BC - \text{медiana, высота и биссектриса}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{a^{4\lg b}}{(-a)^{\lg a}} = b^{2\lg b}$$

15.

$$a^{(4\lg b - \lg(-a) - \lg a)} = (-1)^{(\lg(-a) + \lg b)} \cdot b^{2\lg b}$$

$$a^{3\lg b - \lg(-a)} = (-1)^{\lg(-a) + \lg b}$$

$$\lg a \lg \left(\frac{a^4}{b^2}\right) = \lg(-a) \lg(-a)$$

$$\lg a (4\lg a - 2\lg b) = (\lg a + \lg b) \lg a$$

$$4\lg a \lg a - 2\lg a \lg b = \lg^2 a + \lg a \lg b$$

$$\lg a = a \lg(a/b) \lg^2(-a)$$

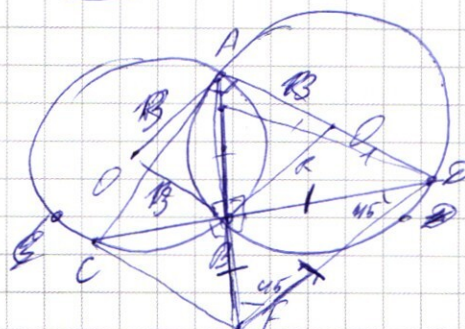
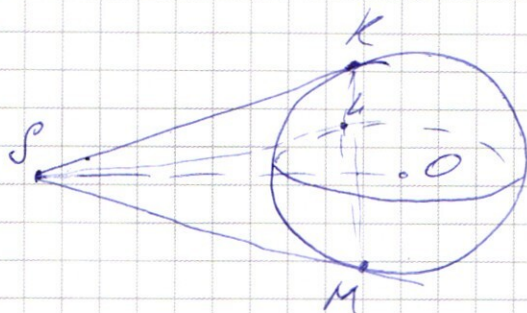
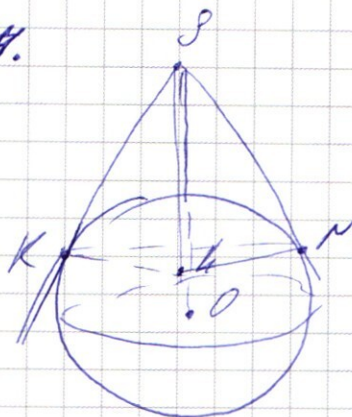
$$4ab - 2a^2 = b^2 - b$$

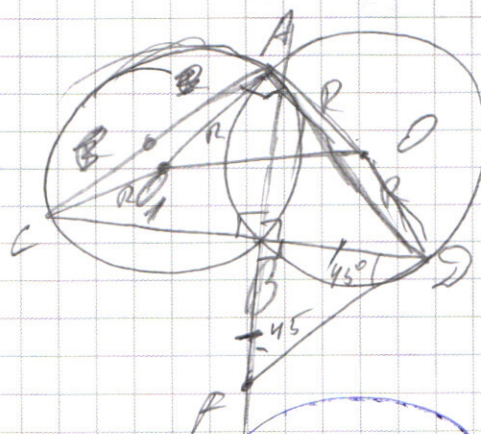
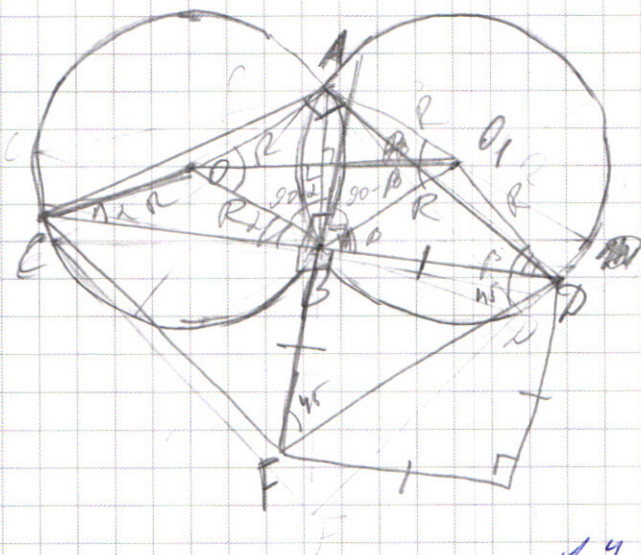
$$a^2 + b^2 - 2ab = a^2 - 3$$

$$b^2 + 3ab + 2a^2 = 0$$

$$2(\lg a / \lg b) (x - y + y) (x + 2y) = 0$$

14.





14.

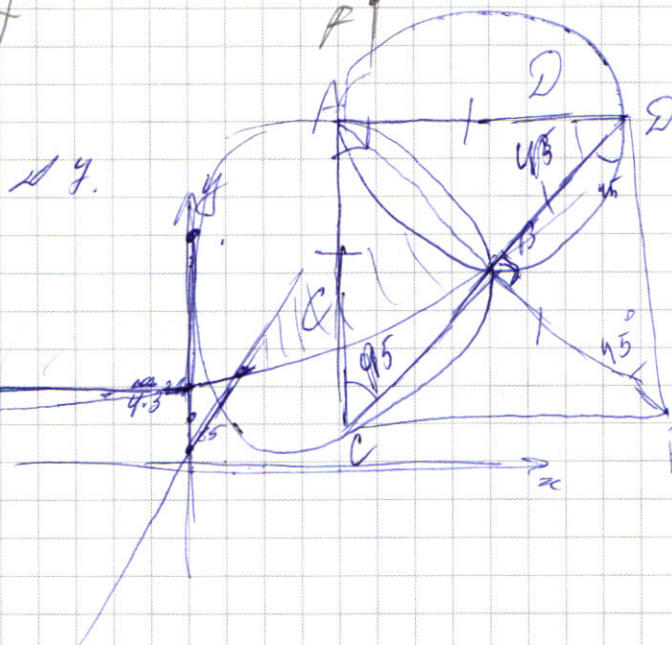
$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x + 4 \cdot 3^{81}) = 4 \cdot 3^{81}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x + 4 \cdot 3^{81}) = 4 \cdot 3^{81}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x + 4 \cdot 3^{81}) = \infty$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$90000,000000 = 10^4 \cdot 9$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 25} \\ 15 \overline{) 18} \\ 15 \overline{) 32} \\ 35 \overline{) 25} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ 30 \overline{) 30} \\ 35 \overline{) 14} \\ 2578 \overline{) 25} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 3375 \overline{) 5} \\ 645 \overline{) 5} \\ 135 \overline{) 5} \\ 24 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \overline{) 1} \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$2bcde + gh = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^5 + c \cdot 10^6 + \dots + h =$$

$$\begin{array}{l} 9823^{16} = 81 \cdot 2(6561)^4 \\ 1' - 8! \\ 0000 \quad 331 \\ 000 \quad 313 \\ 000 \quad 331 \\ 000 \quad 133 \\ 000 \quad 133 \\ 000 \quad 133 \\ 000 \quad 133 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5555 \quad 3331 \\ 5555 \quad 3911 \\ 5555 \quad 9311 \\ 5555 \quad 3331 \\ P = 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 4 \\ C = 2! \\ H = 2! \\ C = 2! \\ P = 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \bar{P}_{4,3,2} = \frac{(4+2)!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{720}{24 \cdot 6 \cdot 2} = 1 \\ \bar{P}_{4,3,1,1} = \frac{9!}{4! \cdot 3!} = \frac{362880}{24 \cdot 6} = 2520 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos 8x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x \\ \sin 8x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x \end{array}$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = 2 \sin 5x \sin 2x$$

$$2 (\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x) = 2 \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 10x = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x\right) \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 10x$$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) \cos(-8x) = 2 \cos 10x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x = \cos 7x$$

$$\cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

$$\cos 5x (\cos 2x - \cos 5x) = \sin 5x (\cos 2x - \sin 5x)$$

$$\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5x}{2}\right)$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{2} + 5x$$

$$\sin\left(\frac{5x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)$$

$$\cos 2x + \cos 5x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0$$

$$\cos 2x - \cos 5x + 2 \cos \frac{5x}{4} \cos\left(5x - \frac{5x}{4}\right) = 0$$

$$\cos 2x - \sqrt{2} \cos\left(\frac{5x}{4} - 5x\right) = 0$$

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{5x}{2} - 5x\right) = 2 \sin\left(\frac{5x}{4} - \frac{3x}{2}\right) \sin$$

$$+ 2 \sin \frac{5x}{4} \cos \frac{3x}{2} - \sin\left(\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{5x}{4} \cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{2} + 2 = 0$$

$$\sin \frac{5x}{2} \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) + \sin \frac{1x}{2} \left(\sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) = 0$$

$$+ \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{5x}{4} +$$

$$+ \sin \frac{3x}{2} \cdot 2 \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sin \frac{5x}{2} \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin \frac{3x}{2} \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2} (\cos(2x + \frac{5x}{4}) - \cos(5x - \frac{5x}{4})) +$$

$$+ \frac{1}{2} (\cos(-2x + \frac{5x}{4}) - \cos(5x - \frac{5x}{4})) = 0$$

$$2 \cos(5x - \frac{5x}{4}) = \frac{1}{2} 2 \cos \frac{5x}{4} \cos 2x$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{1/3} = (-x) \sqrt[3]{(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 2xy - x^2$$

$$-(x^2 + 4x + 4) + 4 + 2(y^2 - x^2)$$

$$x^2 + (y+4)x - 2y^2 + 8y = 0$$

$$D = y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{-y-4 \pm (3y-4)}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-y-4 \pm 3y-4}{2} = y-4 \Rightarrow y \in (0; 4)$$

$$x_2 = \frac{-y-4-3y-4}{2} = -2y$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ xy < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 0$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$



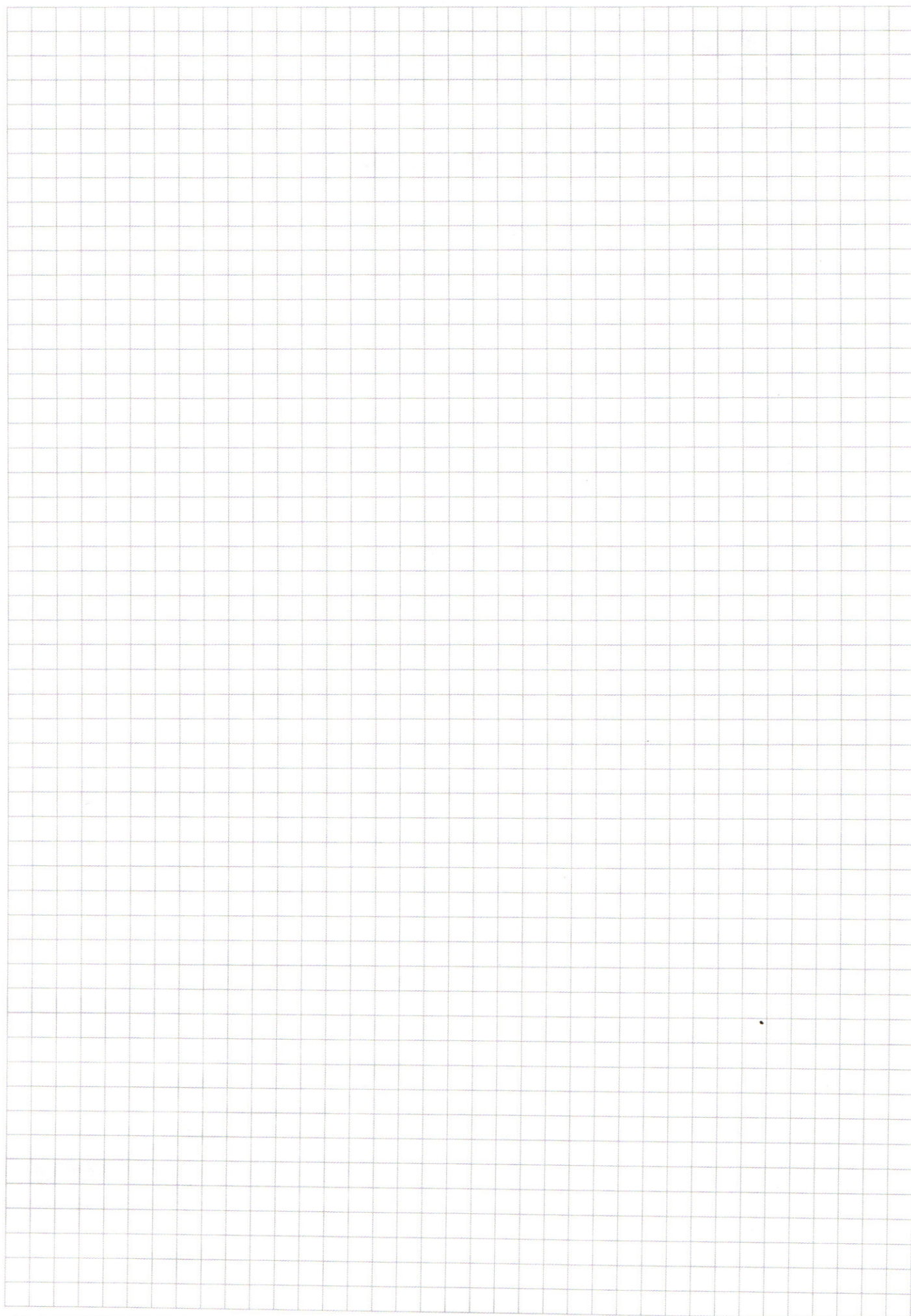
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)