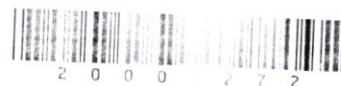


МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс



ВАРИАНТ 6

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Разложим число 16875 на простые множители

Тогда $16875 = 5^4 \cdot 3^3$

но чтобы произведение чисел в 8-ми значном

числе было 16875 надо $5^4 \cdot 3^3$ умножить на 1

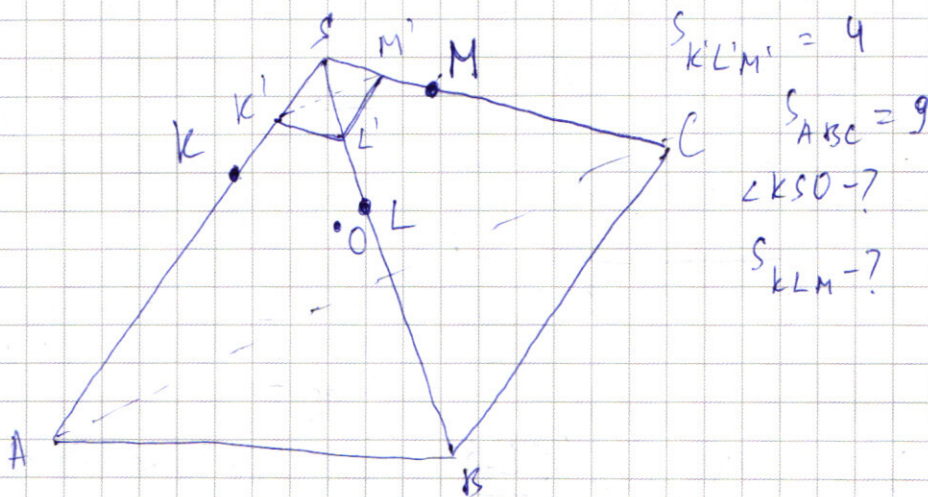
⇒ было 8 ~~чисел~~ множителей, которые можно поставить

на 8 мест ⇒ кол-во вариантов с повторениями: $8!$

а без повторений: $\frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 40 \cdot 7 = 280$

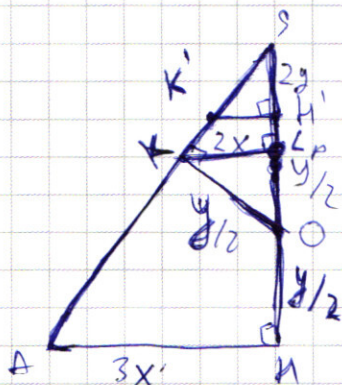
Ответ: 280 вариантов

№4



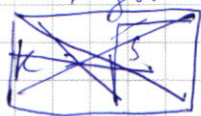
~~В~~ $\triangle K'L'M' \sim \triangle ABC$ (т.к. они равнобедренны по двум и тем же углам биссектрисного угла и $\perp SO$)

⇒



$$\Delta K'LM' \sim \Delta ABE \Rightarrow$$

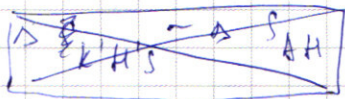
$\Rightarrow$ все их элементы относятся друг к другу как коэф.



$$K = \frac{K'LM'}{AH} = \sqrt{\frac{S_{K'LM'}}{S_{ABC}}} =$$

$$= \frac{2}{3} \Rightarrow K'LM' = 2x$$

$$AH = 3x$$



$$\Delta K'H'S \sim \Delta AHS \quad (K'H' \sim AH, \angle S - \text{общий}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{SH'}{SH} = \frac{2}{3} \Rightarrow SH' = 2x, SH = 3x$$

$$\Rightarrow SH' = 2y, SH = 3y$$

$$SH = 3y$$

$$SH' = 2y \Rightarrow KH' = y \Rightarrow H'O = y/2 \Rightarrow KO = y/2$$

ΔSKO - прямоугольный (т.к. - т. кас. окружности) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{y/2}{2y + y/2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(4+y)} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

• площадь $KLM \perp SO$ (т.к. $SK = SL$ и есть отрезок $\perp$ на SO из точек K, L и M , то они совпадают)

$$\Rightarrow \frac{S_{KLM}}{S_{K'LM'}} = \left(\frac{KS}{K'S'} \right)^2 = \left(\frac{SL_p}{SH'} \right)^2, \text{ где } L_p - \text{проекция т. } L \text{ на } SO$$

$$SL_p = SK \cdot \cos \angle KSO$$

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \sin^2 \angle KSO} = \frac{2}{5} \sqrt{6}$$

$$SK = \sqrt{\left(\frac{5}{2}y\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = y \cdot \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow SL_p = y \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{6} = y \cdot \frac{12}{5}$$

$$\Rightarrow S_{KLM} = S_{K'LM'} \cdot \left(\frac{12y}{5} \cdot \frac{1}{2y} \right)^2 = 4 \cdot \frac{6}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}; S_{KLM} = \frac{24}{5}$$



ШЕЛФ

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$25 \quad |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1)$$

$$(1) \quad (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \quad (2)$$

Построим 2 фигуры на графике:

(1) фигура параллелограмма с вершинами $(0;6)$

$(12;6)$

$(12;-6)$

$(0;-6)$

находим эти 4 точки, поочередно
приравнявая модули к нулю
и выходя x и y исходя из
приравнивания к нулю

(т.е. сначала $|x-6-y|=0 \Rightarrow x=6+y$

$$\Rightarrow |6+y-6+y|=12$$

$$|2y|=12$$

$$\Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow x = 12$$

$$x = 0$$

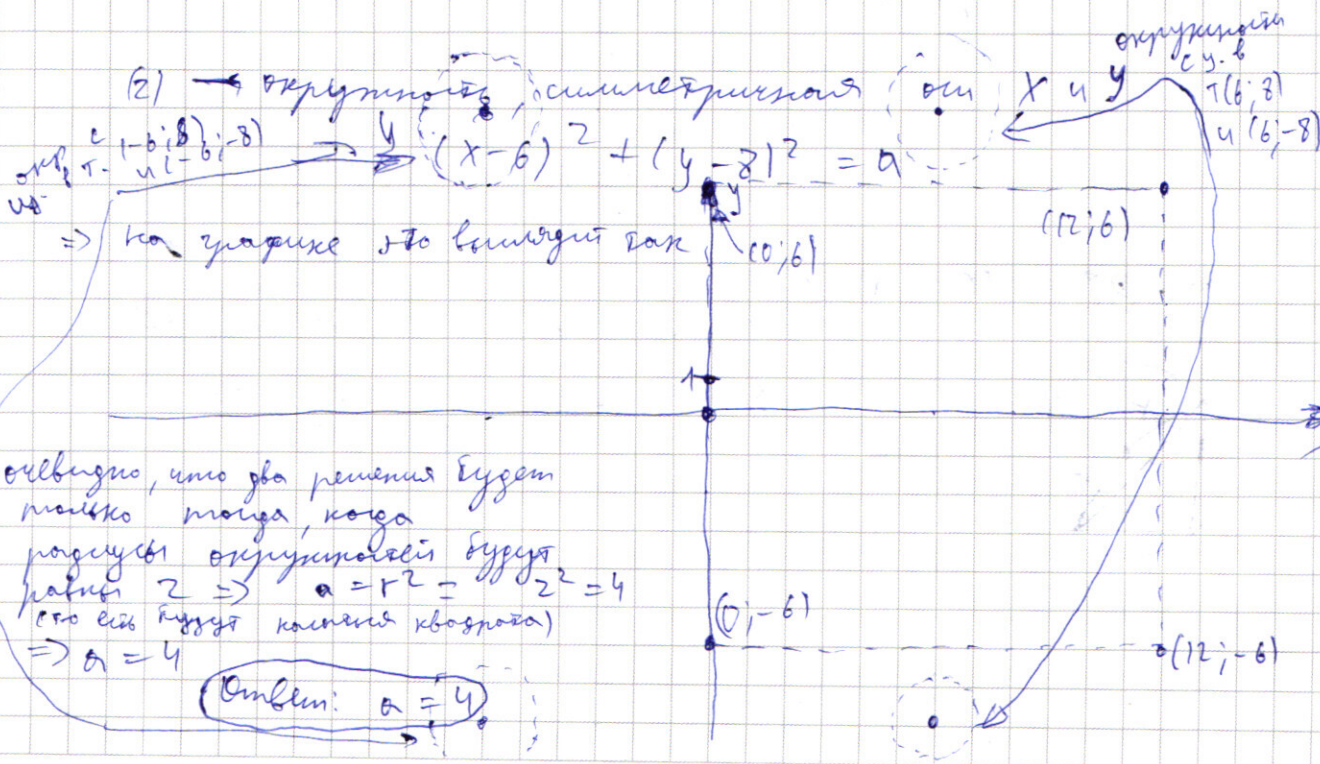
потом $|x-6+y|=0 \Rightarrow x=6-y$

$$\Rightarrow |6-y-6-y|=12$$

$$\Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow x = 0$$

$$x = 12$$

$\Rightarrow$



к 6. Дано:

2^е окружн. радиуса $r = 13$
 окружности пересекаться
 в т. А и т. В

т. С $\in$ 1^{ой} окр.

т. D $\in$ 2^{ой} окр.

т. В $\in$ CD

$\angle CAD = 90^\circ$

т. F $\in$ AB

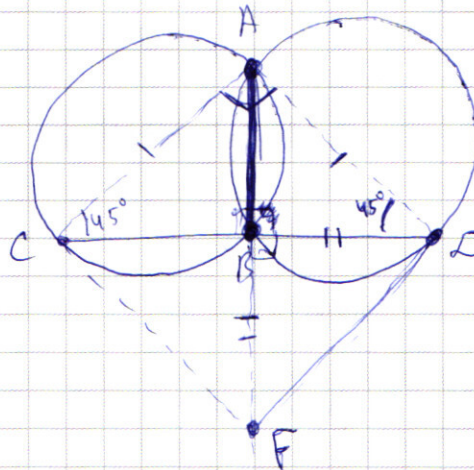
$AB \perp CD$

$BF = FD$ (т. F находится
 по симметрии от
 CD, чем A)

CF = ?

8). BC = 10 S_{ACE} = ?

Решение:



а). $AB \perp CD \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ \Rightarrow AD$ - диаметр
 $\angle ABC = 90^\circ \Rightarrow AC$ - диаметр

$$\Rightarrow AB^2 + BD^2 = (2r)^2 = AB^2 + (CB)^2$$

$$\Rightarrow BD = CB$$

Но $BD = BF$ (по условию) $\Rightarrow$

~~т.е. $\Rightarrow$ диагонали ACFD
 перпендикулярны, равны и
 точкой пересечения делятся
 пополам $\Rightarrow$ ACFD - квадрат
 $\Rightarrow AD = FD = CF = AC$
 $AD = 2r$
 $\Rightarrow CF = 2r = 2 \cdot 13 = 26$~~

~~$AC = AD$ (диаметры)
 $\Rightarrow CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} =$
 $= r \cdot \sqrt{2} = 13\sqrt{2}$
 $\Rightarrow BD = \frac{13\sqrt{2}}{2}$~~

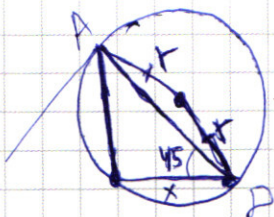
~~$\Rightarrow AB = \sqrt{13^2 - 13^2 \cdot \frac{1}{2}} =$~~

~~$13 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 13 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = BD = BF = CB$~~

~~$\Rightarrow$ диагонали ACFD перпендикулярны,
 равны и точкой пересечения делятся
 пополам $\Rightarrow$ ACFD - квадрат
 $\Rightarrow AD = FD = CF = AC$
 $AD = 26 \Rightarrow CF = 26$~~

8). BC = 10 а). $\angle ACB = \angle ADB$ / т.к. они опираются на
 равные дуги $\Rightarrow \angle ADB = 45^\circ$ (из $\triangle CAD$)

$\triangle ADC \sim \triangle BDF$ ($\frac{AC}{BF} = \frac{AD}{BD}$; $\angle A = \angle B = 90^\circ$)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

~~$\cos 10x$~~

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$\Rightarrow 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos(5x+2) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$(2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

а) $\cos 5x - \sin 5x = 0$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

б) $2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x = 0$$

$$2 \cos 2x - 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) = 0$$

$$\cos 2x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right)$$

$\Rightarrow$

$$2x = \frac{\pi}{4} + 5x$$

$$-3x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = -\frac{\pi}{12}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = 1$$

$$\frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}$$

$$k = \frac{1}{10} + \frac{4m}{5} \in \mathbb{Z}$$

Но k - целое число $\Rightarrow m \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$

а) $\sin \frac{\pi}{4} - 2x = 0$

$$\frac{\pi}{8} - 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \left(\frac{5\pi}{8} + 3x \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m - \frac{5\pi}{8}, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right)$$

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{\pi}{4} + 5x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{\pi}{4} + 5x \right) = 0$$

это все монотонные по промежуткам

$$\Rightarrow f(2x) = g\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right)$$

или можно
быть только
когда

$$\cos 2x = 1 \text{ и}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) = 1$$

$$2x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi k}{2} = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}$$

Но k - целое число $\Rightarrow m \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \mathbb{Z}$

Следств. $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$

$$x = -\frac{2\pi k}{2} + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

$$n3$$

$$(1) \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$(2) \begin{cases} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\text{или: } \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(2) 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 + 16 - 16 - 4x - 8y = 0$$

$$y^2 - 8y + 16 - (x^2 + 4x + 4) - 12 + y^2 - xy = 0$$

$$(y-4)^2 - (x+2)^2 + y^2 - xy - 12 = 0 \quad (2.1)$$

$$(1) \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

применим логарифм по основанию 10

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{2 \lg y} = \lg (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2 \lg y \cdot \lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$2 \lg y (\lg x^2 - \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$$

$$2 \lg y (2 \lg(-x) - \lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$$

$$\text{пусть } \begin{cases} \lg(-x) = a \\ \lg(y) = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2b(2a - b) = (a + b) \cdot a$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \quad | : b^2$$

$$\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 3 \frac{a}{b} + 2 = 0$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{b} \right)_1 + \left(\frac{a}{b} \right)_2 = 3 \\ \left(\frac{a}{b} \right)_1 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{a}{b} = 2 \Rightarrow \frac{\lg(-x)}{\lg(y)} = 2 \Rightarrow -x = y^2 \\ \frac{a}{b} = 1 \Rightarrow -x = y \end{cases}$$

1) подставим во второе уравнение $-x = y^2$:

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y = 2 - \text{корень}$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y = 0 - \text{п.к.} \quad y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0 \quad (\text{продолжение по стр. } n2)$$



2 0 0 0 1 2 7 2

ШТАТ

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3 (продолжение)

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$y = 2$ - корень $\Rightarrow y^3 - y^2 - 6y + 8$ поделим на $y - 2$

$\Downarrow$
 $x = -4$

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \\ - (y^3 - 2y^2) \\ \hline y^2 - 6y + 8 \\ - (y^2 - 2y) \\ \hline -4y + 8 \\ - (-4y + 8) \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} y-2 \\ y^2+y-4 \end{array}$$

$$\Rightarrow (y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases} \Rightarrow x = -\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right)^2 = -\left(\frac{1+1-2\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$= -\frac{2\sqrt{17} - 18}{4} = \frac{\sqrt{17} - 9}{2}$$

1. подставим во второе выражение $x = y$:

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y-2) = 0$$

$$y = 0 - \text{н.к.}$$

$$y = 2 \Rightarrow x = -2$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} \\ y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{н 7. } \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

найдем точки пересечения графиков этих функций:

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

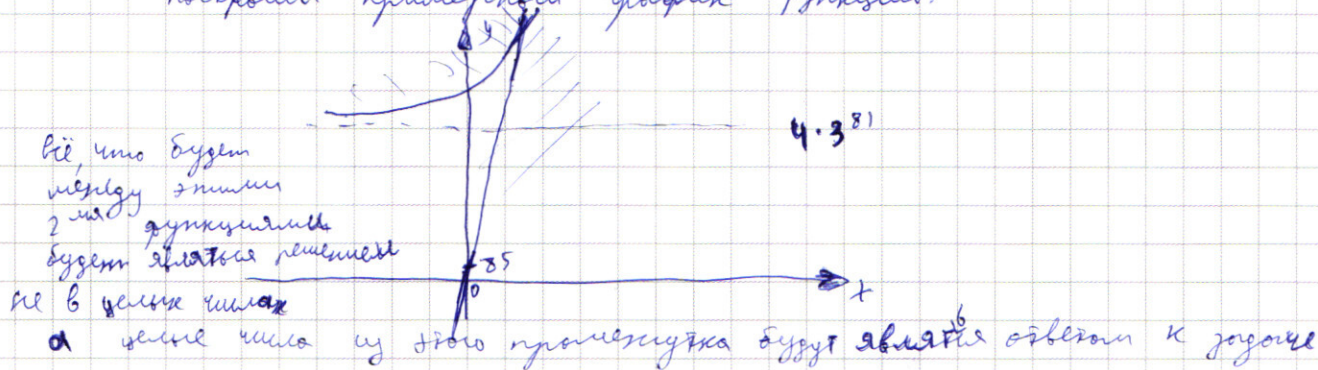
прологарифмируем по основанию 3:

$$\log_3(3^x) + \log_3(4 \cdot 3^{81}) = \log_3 85 + \log_3(x \cdot 3^{81}) - \log_3(x)$$

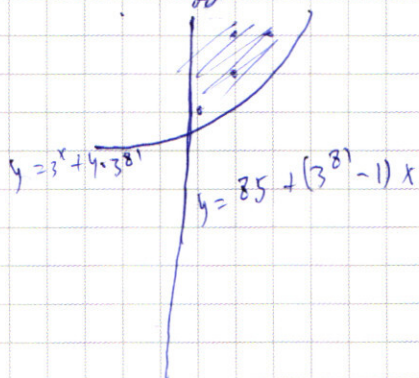
$$x \log_3 3 + \log_3 4 + 81 = \log_3 85 + \log_3(x) - \log_3(x) + 81$$

$$x = \log_3(85) - \log_3(4) = \log_3\left(\frac{85}{4}\right)$$

построим примерный график функций:



-) Т.к. у этих графиков только одна точка пересечения $\Rightarrow$ расстояние между ними будет увеличиваться
- $\Rightarrow$ решений будет становиться больше и больше
- $\Rightarrow$ будет бесконечно много решений



Ответ: бесконечное множество решений

$$P_3 = y^3 - y^2 - 6y + 8$$

$$\begin{array}{r} y-2 \\ y^2+y-4 \end{array}$$

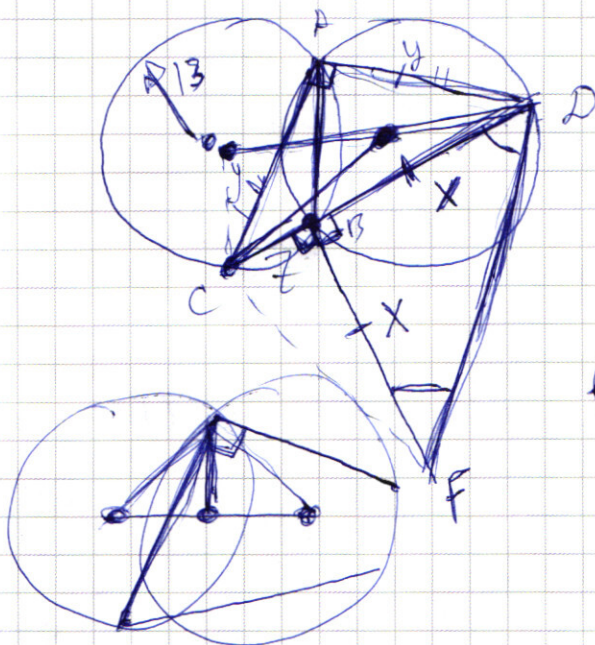
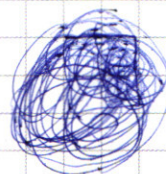
$$\begin{array}{r} y^2 - 6y + 8 \\ - y^2 - 2y \\ \hline -4y + 8 \\ -4y + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$-y^2 - 2y$$

$$-4y+8$$

- 44 + 8

0



$$x^2 + z^2 = 2 \cancel{AD}^2 + AC^2$$

$$z^2 + x^2 = cF^2$$

$$\Rightarrow CF = \cancel{y} \sqrt{AP^2 + AC^2}$$



$$|y| \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

[Handwritten signature]

$$3^x + 4 \cdot 3^8 = 85 + 3^8 x - x$$

$$3^{\cancel{80}} + 3^{81}(4-x) = 85 - x$$

$$3^{81} (3^{x-81} + 4 - x) = 85 - x$$

$$f(x) = 3^x \ln 3 = 3^{81-1}$$

$$3^2 \cdot 3^8 = 3^{10}$$

$$x = \log$$

$$\log 3^x + \log \sqrt[4]{3^8} =$$

$$(3^{81} - 1)x = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

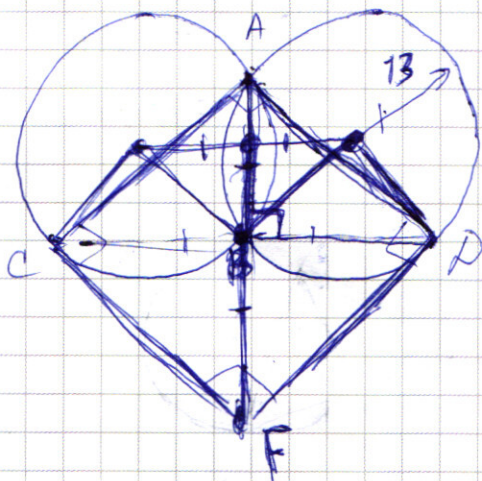
$$x=2 \Rightarrow (3^{81}-7)2 = 9 + 4 \cdot 3^{81}$$

3.32-3.38



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6



$$j = 13$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$T.B \in \mathcal{CD}$$

$AB \perp CD$

$7. F \neq AB$

$$BF = BD$$

ACFD - ромб (AB = BD
 $\angle A = 90^\circ$
 TS F = BD)

$$\Rightarrow CF = FQ$$

$$\Rightarrow AD - \text{page} \Rightarrow CF = 2r = 26$$

27

$$2y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 71)x$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3$$

$$3^x \cdot \ln 3 = 3^{81} - 1$$
$$3^x = \frac{3^{81} - 1}{\ln 3}$$

(x, y) - центр

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

~~$$x \log_3 3^x + \log_3 4 \cdot 81 = \log_3 85 + \log_3 x \cdot 81$$~~

$$x = \log_3 \frac{301-7}{\ln 3}$$

$\Rightarrow$ dynamische robust
Touche & Ognois
Touche

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sim 1.$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ -15 \\ \hline 18 \\ -15 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 3375 \\ -30 \\ \hline 37 \\ -35 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 695 \\ -5 \\ \hline 17 \\ -15 \\ \hline 25 \\ -25 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 139 \\ -10 \\ \hline 35 \\ -35 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 27 \\ -20 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 19 \\ -9 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 15 \\ -3 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 17 \\ -11 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow 16875 = \cancel{5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} \cdot 5 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$\Rightarrow 16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 7$$

$$8 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 7! \\ \hline 4! \cdot 3! \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{N2} \quad & \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \\
 & \cos 10x = \cos(7x+3x) = \cos 7x \cdot \cos 3x - \sin 7x \cdot \sin 3x \\
 & \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cdot \cos 7x \cdot \cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x \\
 & \cos 7x \cos 3x \left(\frac{1}{\cos 3x} + \frac{1}{\cos 7x} - \sqrt{2} \right) = \sin 7x \cdot \sin 3x \left(\frac{1}{\sin 3x} + \frac{1}{\sin 7x} - \sqrt{2} \right) \\
 & \cos 7x + \cos 3x = \cos \left(\frac{7x-3x}{2} + \frac{7x+3x}{2} \right) + \cos \left(\frac{7x-3x}{2} - \frac{7x+3x}{2} \right) = \\
 & = \cos \left(\frac{7x-3x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x+3x}{2} \right) - \sin \left(\frac{7x-3x}{2} \right) \sin \left(\frac{7x+3x}{2} \right) + \\
 & + \cos \left(\frac{7x+3x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x-3x}{2} \right) + \sin \left(\frac{7x+3x}{2} \right) \sin \left(\frac{7x-3x}{2} \right) = 2 \cos \left(\frac{7x+3x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{7x-3x}{2} \right) \\
 & \sin \left(\frac{7x+3x}{2} + \frac{7x-3x}{2} \right) = \sin 7x = \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{7x}{2} + \cos \frac{7x}{2} \sin \frac{7x}{2} = 2 \sin \frac{7x}{2} \cos \frac{7x}{2} \\
 & \Rightarrow \cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cdot \cos 2x \\
 & \sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x \\
 & \Rightarrow 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x \\
 & \cos 2x (2 \cos 5x - \sqrt{2} \cos 10x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x \\
 & \cos 2x (2 \cos 5x - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)) = 0 \\
 & (\cos 5x - \sin 5x) / (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 5x) = 0 \\
 & \cos 5x = \sin 5x \quad 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0
 \end{aligned}$$

$$2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$\cancel{2\cos 2x} - \sqrt{2}(\cos 3x \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x + \sin 3x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x) = 0$$

$$23. \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(x+y)(x-2y) = x^2$$

$$(2y+x)(x-2y) = 2y^2 + 2xy - xy - x^2$$

$$y(2y+x) - x^2 - 2(2y+x) = 0$$

$$2y^2 - 8y + 4 - 4 - xy - x^2 - 4x = 0$$

$$y(2y-2)^2 - (x+2)^2 - xy = 0$$

$$1. \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy)$$

$$\frac{2y}{x} - 1 - \frac{x}{y} - \frac{4}{y} - \frac{8}{x} = 0$$

$$\frac{2(y-4)}{x} - \frac{(x+4)}{y} - 1 = 0$$

$$\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$\lg(-x) \lg(-xy) =$$

$$\lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$2 \lg y (\lg(x^2) - \lg y) = (\lg(-x) + \lg(y)) \lg(-x)$$

$$2 \lg y (2 \lg x - \lg y) = (\lg(-x) + \lg(y)) \lg(-x)$$

$$\lg y \lg x - 2 \lg^2 y = \lg^2(x) + \lg(x) \cdot \lg(y)$$

$$\lg x = a; \lg y = b$$

$$a \cdot b - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 3\frac{a}{b} + 2 = 0$$

$$\left(\frac{a}{b} - 2\right) \left(\frac{a}{b} - 1\right) = 0$$

$$\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow \frac{\lg x}{\lg y} = 2 \Rightarrow \lg_y x = 2 \Rightarrow x = y^2 \rightarrow (1)$$

$$(2) x = y$$

$$\begin{aligned} \cos 5x &= \cos 4x \cos x - \sin 4x \cdot \sin x = \\ &= (\cos^2 2x - \sin^2 2x) \cos x - \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin x = \\ &= 2 \sin 2x (\cos^2 2x - 1) \cos x - \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin x - \\ &= \cos x (\cos 4x + \sin 4x) + \sin x (\cos 4x - \sin 4x) + 2 \sin 2x \cos 2x = \\ &= \cos x (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + \sin x (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \sin 2x \cos 2x \end{aligned}$$

н 4.

$\angle KSO = ?$

$S_{KLM} = ?$

Плоск. (ABC) касается
сферы снизу

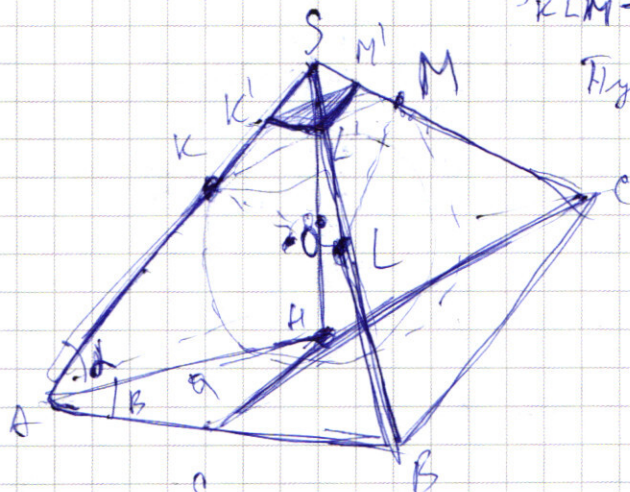
$$\Rightarrow S_{ABC} = 9$$

$$S_{K'L'M'} = 4$$

$$SH = \frac{3x}{2}$$

$$h = \frac{3x}{2}$$

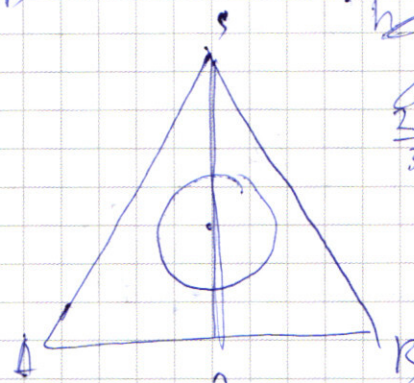
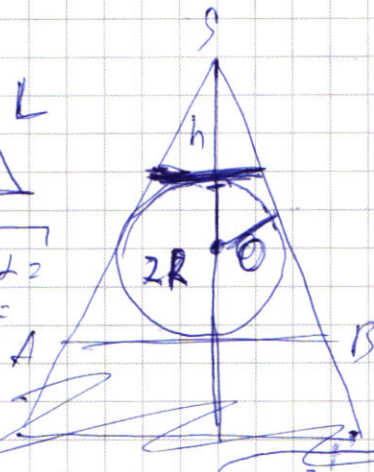
$$\frac{2}{3}h = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$



$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \sqrt{6}$$



$$S_L = S_K \cdot \cos \alpha$$

$$S_K = \left(\left(\frac{5}{2} y \right)^2 - \left(\frac{4}{2} \right)^2 \right)$$

$$= \frac{x \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$= 2y \cdot 3y = 6y^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{SH'}{SH_0} \right)^2 =$$

$$\Rightarrow S_L = \frac{S_{KLM}}{64}$$

$$= 9 \sqrt{6} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{6} = y \cdot \frac{12}{5}$$

$$SH_0 = \left(x - \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{4} \right) =$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{x}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\frac{SH'}{SH_0} = \frac{2x \cdot 2}{x/2(2 - \sqrt{2})} = \frac{8}{(2 - \sqrt{2})}$$

$$\Rightarrow S_{KLM} = \frac{S_1 \cdot (2 - \sqrt{2})^2}{64} = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{76} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{8} = \frac{6 - 4\sqrt{2}}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

25.
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (x-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$x = 6+y$$

$$x = 6-y$$

$$\Rightarrow |2y| = 12$$

$$\begin{aligned} 2y = 12 & \Rightarrow y = 6 \Rightarrow x = 12 \\ 2y = -12 & \Rightarrow y = -6 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

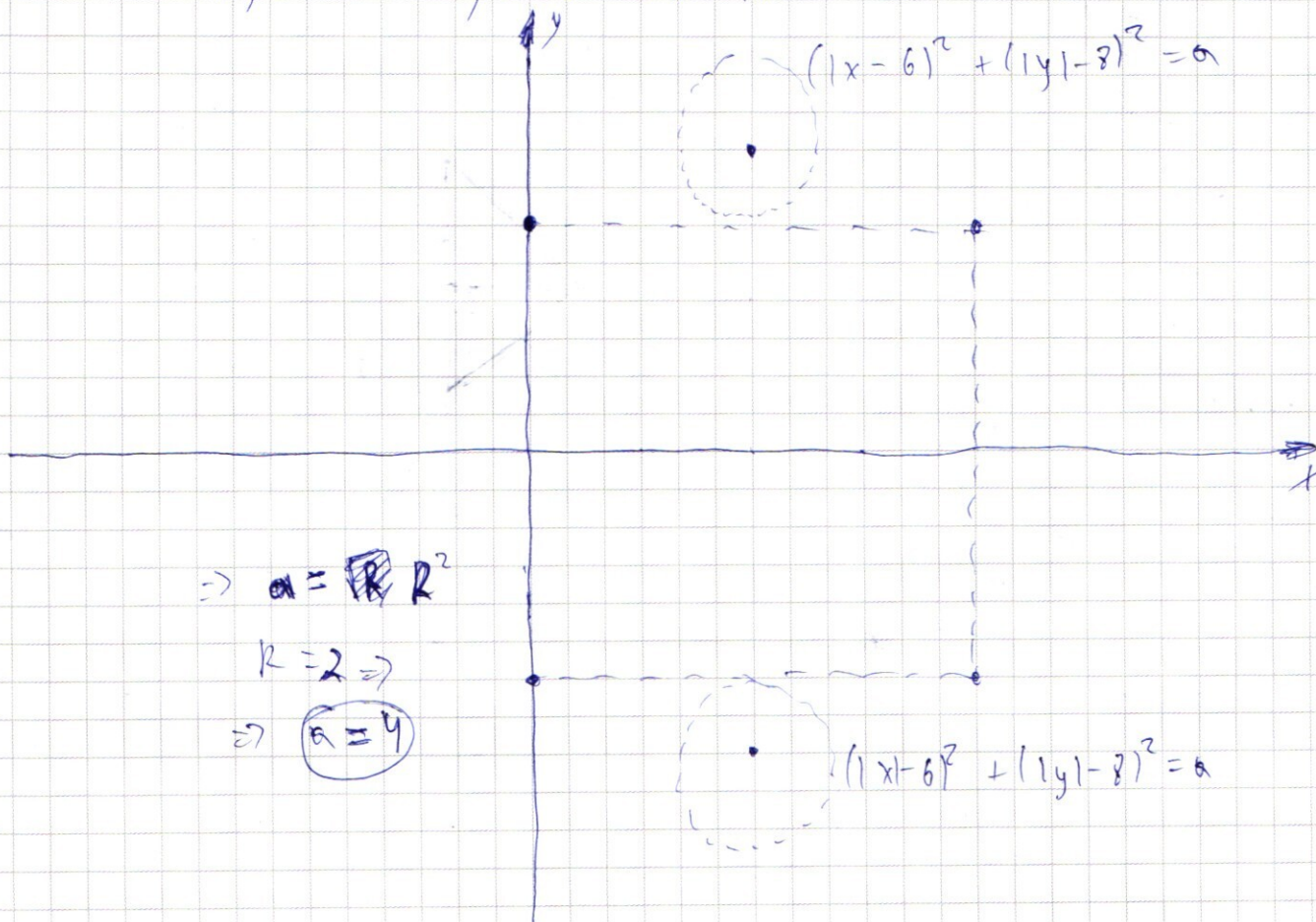
$$|2y| = 12$$

$$\begin{aligned} 2y = 12 \\ 2y = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y = 6 & \Rightarrow x = 12 \\ y = -6 & \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

y

$$(x-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$



$$\Rightarrow a = R^2$$

$$R = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 4$$

$$(x-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$