

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 \Rightarrow$ восьмизначное число должно состоять из четырёх пятёрок, трёх троек и одной единицы. Рассмотрим все возможные случаи, когда единица стоит на первом месте слева:

13335555, 13353555, 13355355, 13355535, 13355553, 13533555, 13553355, 13555333, 15333555, 15533355, 15553335, 15555333. Таких чисел 13.

Единица может стоять на другом из восьми мест в числе, а количество случаев, когда единица не является своего места, а остальные цифры меняются, 13. Значит, количество всех чисел, удовлетворяющих условию, будет равно: $13 \cdot 8 = 104$.

Ответ: 104.

№2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) - 2 \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & (1) \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 5x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos 5x - \sin 5x = 0 \quad \left(\cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

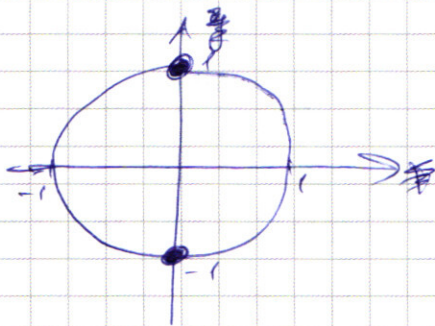
$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x = 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$



$$(2): 2\cos 2x - \sqrt{2}\cos 5x - \sqrt{2}\sin 5x = 0 \quad (\cdot \frac{1}{2})$$

$$\cos 2x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 5x\right) = 0$$

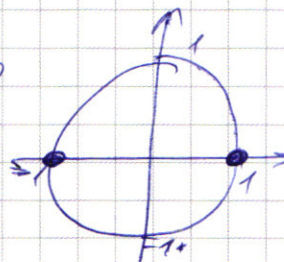
$$\cos 2x - \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos 5x + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5x\right) = 0$$

$$\cos 2x - \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0$$

$$+ 2\sin\left(\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$- 2\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0$$

$$2\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{7x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Answers: } x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

№3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x}{y}\right)^{lg y} = (-x)^{lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 2y = 0 \end{array} \right.$$

(1)

(2)

из (1) имеем:

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ц₂ (2):

$$x^2 + (y+4)x - 2y^2 + 8y = 0$$

$$D = 16 + 8y + y^2 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x_1 = \frac{-4-y+3y-4}{2} = \frac{2y-8}{2} = y-4$$

$$x_2 = \frac{-4-y-3y+4}{2} = \frac{-4y}{2} = -2y$$

$$(x+2y)(x-y+4) = 0$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y-4 \end{cases}$$

а) $x = -2y$
 $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-xg)}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\log y} &= (2y)^{\log 2y^2} \\ (16y^2)^{\log y} &= (2y)^{\log 2y^2} \\ (4y)^{\log y} &= (2y)^{\log 2y^2} \\ (2 \cdot 2y)^{\log y} &= (2y)^{\log 2 + \log y^2} \\ 2^{\log y} \cdot (2y)^{\log y} &= (2y)^{\log 2} \cdot (2y)^{\log y^2} \\ (2y)^{\log y} \cdot (2y)^{\log y} - (2y)^{\log 2} \cdot (2y)^{\log y^2} &= 0 \\ (2y)^{\log y} (2^{\log y} - (2y)^{\log y^2}) &= 0 \\ (2y)^{\log y} \neq 0, \text{ т.к. } y > 0 \\ 2^{\log y} - (2y)^{\log y^2} &= 0 \\ 2^{\log y} &= (2y)^{\log y^2} \quad (\text{т.к. } y > 0) \\ 2^{\log y} &= 2^{\log y} \cdot y^{\log y^2} \quad (\text{т.к. } 2^{\log y} \neq 0) \\ 2^{\log y} - 2^{\log y} \cdot y^{\log y^2} &= 0 \quad (\text{т.к. } 2^{\log y} \cdot y^{\log y^2} > 0, y > 0) \\ \cancel{2^{\log y} - 2^{\log y} \cdot y^{\log y^2}} &= \log_2 y^{\log y^2} \end{aligned}$$

$$\lg \frac{y^2}{2} = \lg 2 \cdot \lg_2 y \quad (\text{т.к. } y > 0)$$

$$2 \lg y - \lg 2 = \lg 2 \cdot \lg_2 y$$

$$2 \frac{\lg_2 y}{\lg_2 10} - \lg 2 = \lg 2 \cdot \lg_2 y$$

$$2 \lg_2 y - \lg 2 \cdot \lg_2 10 - \lg 2 \cdot \lg_2 10 \cdot \lg_2 y = 0$$

$$\lg_2 y (2 - \lg 2 \cdot \lg_2 10) = \lg 2 \cdot \lg_2 10$$

$$\lg_2 y = \frac{\lg 2 \cdot \lg_2 10}{2 - \lg 2 \cdot \lg_2 10} \quad (\text{т.к. } (y > 0))$$

$$y = 2^{\left(\frac{\lg 2 \cdot \lg_2 10}{2 - \lg 2 \cdot \lg_2 10} \right)} \Rightarrow x = -2^{\left(\frac{\lg 2 \cdot \lg_2 10}{2 - \lg 2 \cdot \lg_2 10} \right) + 1}$$

$$x = -2^{\frac{2}{2 - \lg 2 \cdot \lg_2 10}}, \text{ при этом } y > 0 \text{ и } x < 0$$

$$\begin{cases} x = y - 4 \\ \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \end{cases}; \begin{cases} x < 0 \Rightarrow y - 4 < 0 \Rightarrow y < 4 \\ x = y - 4 \\ y < 4 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y \in (0; 4) \Rightarrow |y - 4| = 4 - y > 0$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)y}$$

$$|y-4|^{4 \lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y} \quad (\text{т.к. } |y-4| = 4-y > 0)$$

$$(4-y)^{\lg y} (4-y)^{3 \lg y} \cdot y^{-2 \lg y} - (4-y)^{\lg(4-y)} = 0$$

$$(4-y)^{\lg y} \neq 0, \text{ т.к. } y \in (0; 4).$$

$$(4-y)^{3 \lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \quad (\text{т.к. } 4-y > 0 \text{ и } y > 0)$$

$$\lg(4-y)^{3 \lg y} + \lg y^{-2 \lg y} = \lg(4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$3 \lg y (\lg(4-y)) - 2 \lg^2 y = \lg^2(4-y)$$

$$\lg^2(4-y) - 3 \lg y (\lg(4-y)) + 2 \lg^2 y = 0 \quad (\text{т.к. } y > 0)$$

$$D = 9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y = \lg^2 y$$

$$\lg(4-y) = \frac{3 \lg y \pm \lg y}{2}, \quad y \in (0; 4)$$

$$\textcircled{1} y \in (1; 4) \Rightarrow \lg(4-y) = \frac{3 \lg y + \lg y}{2} \Rightarrow \lg(4-y) = 2 \lg y$$

$$\lg(4-y) = \lg y^2 \quad (10 > 1) \Rightarrow$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow 4 - y = y^2$$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0, \text{ не подходит}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \vee 1$$

$$\sqrt{17} - 1 \vee 2$$

$$\sqrt{17} \vee 3$$

$$\sqrt{17} > \sqrt{9}$$

$$y_2 \vee 4.$$

$$y \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \vee 4.$$

$$\sqrt{17} - 1 \vee 8.$$

$$\sqrt{17} \vee 9$$

$$\sqrt{17} < \sqrt{81}.$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \text{ не подходит}$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17} - 1 - 8}{2} = \frac{\sqrt{17} - 9}{2} < 0$$

$$4 \Rightarrow y > 4 \text{ не подходит}$$

$$y(4 - y) = \frac{3yy - yy}{2} = yy$$

$$4 - y = y \quad (10 > 1)$$

$$4 = 2y$$

$$y = 2 \Rightarrow x = y - 4 = 2 - 4 = -2$$

$$4 > y > 4 \text{ не подходит}$$

$$\textcircled{\text{II}} y \in (0, 1) \Rightarrow y) y(4 - y) = \frac{3yy - (-yy)}{2} = \frac{2yy}{2} = yy.$$

$$y) y(4 - y) = \frac{3yy - (-yy)}{2} = 2yy$$

$$y = 2 \Rightarrow y \notin (0, 1) - \text{не подходит}$$

$$\textcircled{\text{III}} y = 1 \Rightarrow y_3 = 0 - \text{ложь}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \notin (0, 1) \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \notin (0, 1)$$

$$\text{Ответ: } \left(-2, \frac{2 - y_2 \cdot \log_{10} 10}{2 - y_2 \cdot \log_{10} 10} \right); \left(\frac{\sqrt{17} - 9}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right); (-2; 2).$$

№ 5.

$$\{(x-6)^2 + (y-8)^2 = a\}; \quad (2).$$

$$(1) \quad |y-x+6| + |y+x-6| = 12$$

$$|y - (x - 6)| + |y - (-x + 6)| = 12$$

① $\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow y - x + 6 + y + x - 6 = 12 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$

② $\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases} \Rightarrow y-x+6 - y-x+6 = 12 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x=0$

③ $\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq -x+6 \end{cases} \Rightarrow -y+x-6+y+x-6=12 \Rightarrow 2x=24 \Rightarrow x=12$

④ $\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \leq -x+6 \end{cases} \Rightarrow -y+x-6-y-x+6=12 \Rightarrow -2y=12 \Rightarrow y=-6$

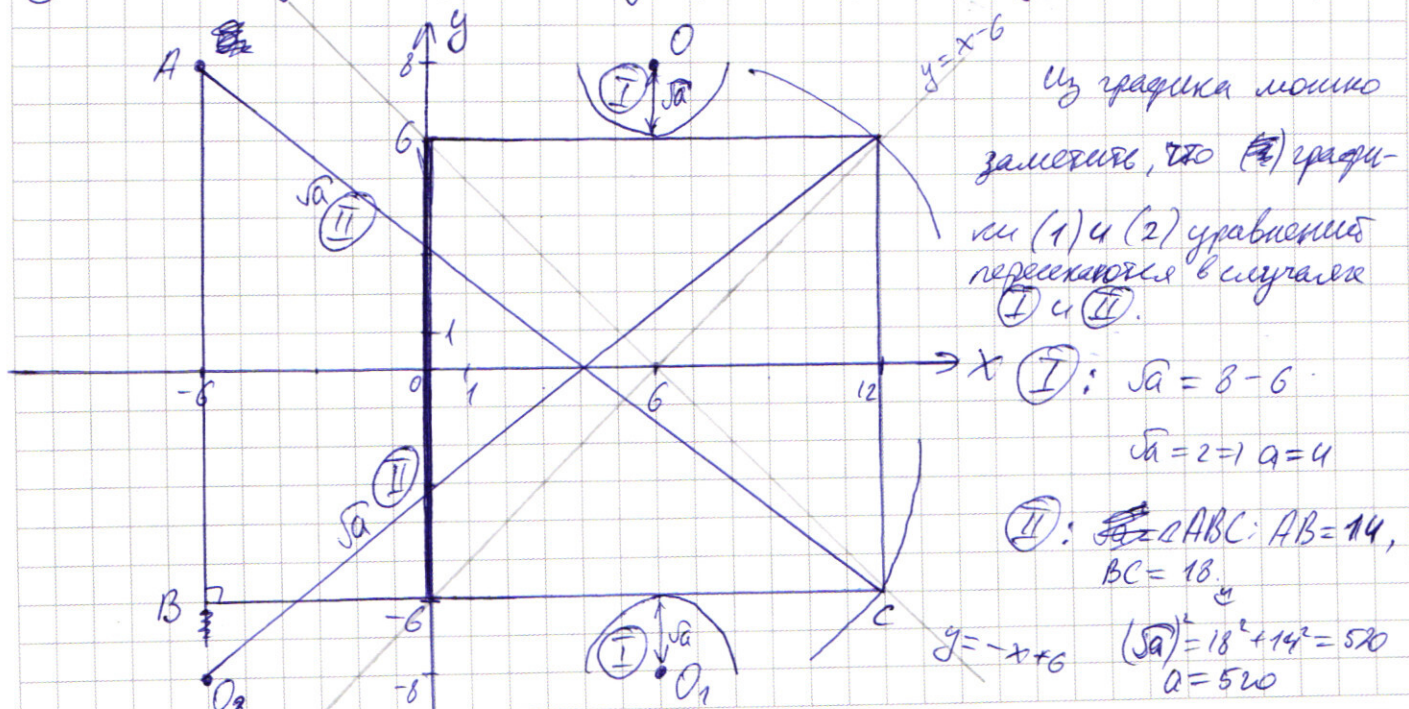
$$(2): (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a^2, \begin{cases} a \geq 0 \\ R = \sqrt{a} \end{cases}$$

а) $x \geq 0$ и $y \geq 0 \Rightarrow (x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 \Rightarrow$ центр $(6; 8)$ (7.0) окружности

⑤ $x \geq 0$ и $y \leq 0 \Rightarrow (x-6)^2 + (y+8)^2 = 9 \Rightarrow$ центр окружности $(6, -8)$ т.о.

⑥ $x \leq 0$ и $y \geq 0 \Rightarrow (x+6)^2 + (y-8)^2 = 9 \Rightarrow$ центр окружности $(-6; 8)$ (7. А)

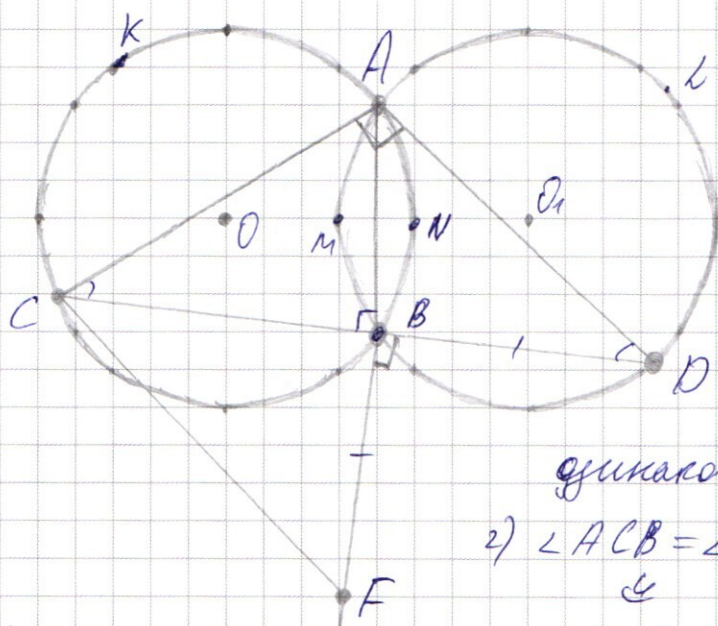
② $x \leq 0$ и $y \leq 0 \Rightarrow (x+6)^2 + (y+8)^2 = 9 \Rightarrow$ центр окружности $(-6, -8)$ (т.о.)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $a \in (4; 520)$ будет 4 и более решений системы
при $a \in [0; 4) \cup (520; +\infty)$ не будет решений системы.
Ответ: 4; 520.

№ 6.



Дано: $R=13$; $BE \perp CD$; $\angle CAD=90^\circ$;

$BF \perp CD$; $BF=BD$

а) CF - ?

б) S_{ACF} - ?; если $BC=10$.

Решение:

1) Радиусы окружностей O и O_1

одинаковы $\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A_1NB}$

2) $\angle ACB = \angle ADB$ (т.к. опираются на равные дуги)

3) $AC=AD \Rightarrow AC$ и AD стягивают равные дуги $\Rightarrow \widehat{CA} = \widehat{AD}$

$\triangle ACD$ - $\text{р/б} \Rightarrow AC=AD$.

$\angle = \angle ABC = \angle ABD$ (т.к. опираются на $\widehat{CA} = \widehat{AD}$)

$2\angle = 180 \Rightarrow \angle = 90^\circ \Rightarrow AB \perp CD \Rightarrow AB$ - перпендикуляр к CD

4) $\triangle ACB$: $\angle ACD=45^\circ \Rightarrow \angle CAB=45^\circ \Rightarrow \triangle ACB$ - $\text{р/б} \Rightarrow CB=AB$

5) $\triangle ACD$ - $\text{р/б} \Rightarrow AB$ - высота, медиана $\Rightarrow BD=CB \Rightarrow CB=BF$.

6) $BF \perp CD \Rightarrow \angle CBF=90^\circ \Rightarrow \triangle CBF$ - $\text{р/б} \Rightarrow \angle CBF=45^\circ$ (предположим).

7) OA и OB - радиусы, $\angle AOB$ - центральный, опирающийся на $\widehat{ANB}$, на $\widehat{ANB}$ опирается вписанный $\angle ACB=45^\circ \Rightarrow \angle AOB=90^\circ$

8) Т.к. радиусы OA и OB : $AB = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2} = 13\sqrt{2}$

9) $AB = CB = BF = 13\sqrt{2}$. 10) Т. Пифагора для $\triangle CBF$: $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{2} \cdot CB = \sqrt{2} \cdot 13\sqrt{2} = 13 \cdot 2 = 26$. - ответ на пункт а).

б) Перпендикуляр к прямой, проходящий через одну точку можно провести только один - AF - одна прямая, перпендикулярная CD . Тогда AF - основание $\triangle ACF$, CB - высота $\triangle ACF$ к стороне AF .

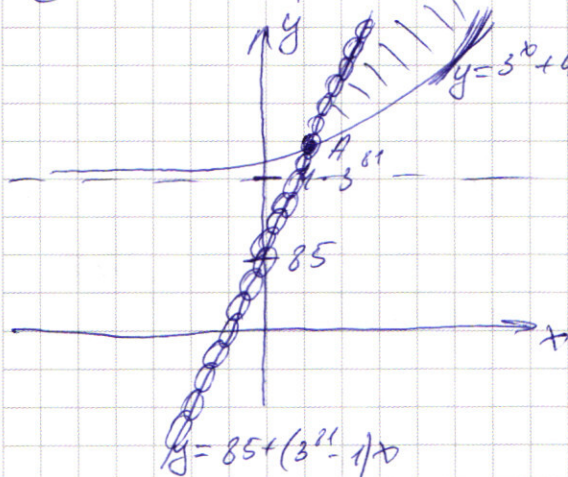
12) $AF = AB + BF = 2AB = 2 \cdot 13\sqrt{2} = 26\sqrt{2}$.

13) $S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot \sqrt{2} \cdot 10 = 13\sqrt{2} \cdot 10 = 130\sqrt{2}$.

Ответ: а) $CF = 26$; б) $S_{ACF} = 130\sqrt{2}$.

№7.

$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$ Изобразим схематически графики ~~этих~~ уравнений $y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ и $y = 85 + (3^{81} - 1)x$.



1) Решим систему обозначим $\equiv$

2) Найдем т. А:

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$x(3^{81} - 1) = 4 \cdot 3^{81} + 85 - 3^x$$

$$x = \frac{4 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 1 - 81 + 3^x}{3^{81} - 1}$$

$$x = 4 - \frac{-3^x + 81}{3^{81} - 1} = 4 + \frac{3^x - 3^4}{3^{81} - 1}$$

x - целое $\Rightarrow \frac{3^x - 3^4}{3^{81} - 1} \in \mathbb{Z}$, $\frac{(3^x - 3^4) : 3}{(3^{81} - 1) : 3} \in \mathbb{Z}$ при любом x ,

если $x = 4 \Rightarrow x = 4 - \frac{3^4 - 3^4}{3^{81} - 1} = 4 \Rightarrow x = 4$ подходит. $y = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$$y = 4 \cdot 3^{81} + 81.$$

3) $3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$

$$3^{81}(4 - x) = 85 - x - 3^x \Rightarrow (85 - x - 3^x) : 3, 3^x : 3, 85 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{3}.$$

Значит, x должен иметь вид $x = 3t + 1, t \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|y - x + 6| = |y - (x - 6)|$
 $\begin{cases} |x - 6| + |y - (-x + 6)| = 12 & (1) \\ (|x - 6|)^2 + (|y - 8|)^2 = 9 \Rightarrow a > 0 \end{cases}$ 2 решения, а!

(1) $y = x + 6$
 $y = -x + 6$
 ① $\begin{cases} y \geq x - 6 \\ y \geq -x + 6 \end{cases}$
 $y - x + 6 + y + x - 6 = 12$
 $2y = 12 \Rightarrow y = 6$

② $\begin{cases} y \geq x - 6 \\ y < -x + 6 \end{cases}$
 $y - x + 6 - y - x + 6 = 12$
 $-2x = 0$
 $x = 0$

③ $\begin{cases} y < x - 6 \\ y > -x + 6 \end{cases}$
 $-y + x - 6 + y + x - 6 = 12$
 $2x = 24$
 $x = 12$

④ $\begin{cases} y \geq x - 6 \\ y < -x + 6 \end{cases}$
 $-y + x - 6 - y - x + 6 = 12$
 $-2y = 12 \Rightarrow y = -6$

⑤ $a + 6 = 8$
 $a = 2 \Rightarrow a = 4$

⑥ $a^2 = 36 + 4 \Rightarrow a = 40 \Rightarrow a = \sqrt{40} < \sqrt{520} \Rightarrow$ не подходит

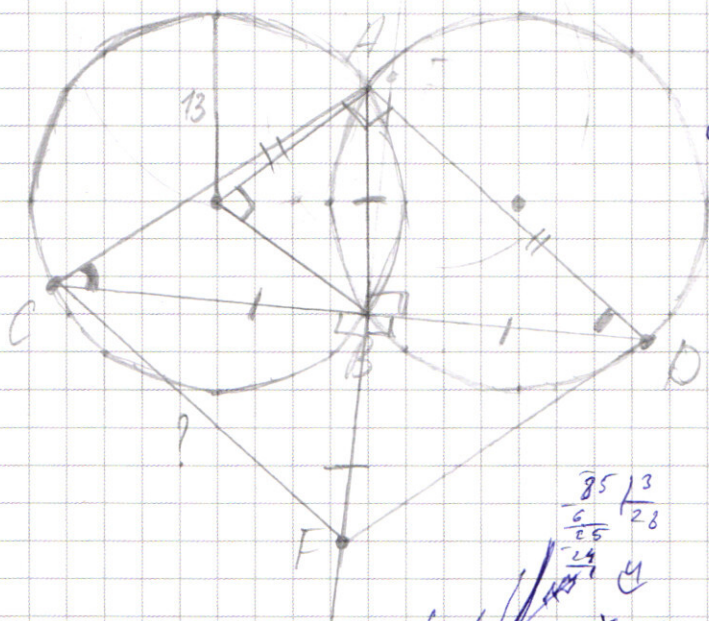
⑦ $a^2 = (12 + 6)^2 + (12 + 2)^2 \Rightarrow a = 18^2 + 14^2 = 324 + 196 = 520 \Rightarrow a = \sqrt{520}$

$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^x \\ y < 85 + (3^x - 1) \cdot x \end{cases}$

(2) $(|x - 6|)^2 + (|y - 8|)^2 = a$
 • $x \geq 0$ и $y \geq 0 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = a$
 • $x \geq 0$ и $y \leq 0 \Rightarrow (x - 6)^2 + (-y - 8)^2 = a$
 $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = a$
 • $x \leq 0$ и $y \geq 0 \Rightarrow (x + 6)^2 + (y - 8)^2 = a$
 • $x \leq 0$ и $y \leq 0 \Rightarrow (x + 6)^2 + (y + 8)^2 = a$

$\begin{array}{r} 324 \\ + 196 \\ \hline 520 \end{array}$

$$\begin{array}{r} 85 \overline{) 5} \\ \underline{5} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 0 \end{array}$$



$$(x, y) \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} + y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ -y > -85 - (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} \geq 85$$

$$0 > 3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - 3^{81}x + x$$

$$(3^{81} - 1)x + 85 > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$(3^{81} - 1)x - 3^x > 4 \cdot 3^{81} - 5 \cdot 17$$

$$3^{81}(x - 4) > 3^x + x - 85$$

$$\begin{array}{r} 85 \overline{) 3} \\ \underline{6} \\ 25 \\ \underline{24} \\ 1 \end{array}$$

$$x \equiv x \pmod{3}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^{81}(4 - x) = 85 - x - 3^x$$

$$3^{81}x - x = 3^{81} \cdot 4 - 85 + 3^x$$

$$x = \frac{3^{81} \cdot 4 - 85 + 3^x}{3^{81} - 1}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} - 3^{81}x = 85 - x$$

$$x = 4 \Rightarrow 0 = 85 - 4 - 3^4 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 3^{81} = 85 - 1 - 3 \Rightarrow$$

$$x =$$

$$x = \frac{4 \cdot 3^{81} - 4 \cdot 1 - 81 + 3^x}{3^{81} - 1} = 4 - \frac{3^x - 81}{3^{81} - 1}, x - \text{целое}$$

$$\frac{3^x - 81}{3^{81} - 1} = \frac{3^x - 3^4}{3^{81} - 1} \Rightarrow$$

$$x = 0$$

$$3^x - 81 = 3^{81} - 1$$

$$3^x = 3^{81} - 82 - \text{не существует.}$$

$$\frac{1 - 3^4}{3^{81} - 1}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r}
 16875 \mid 5 \\
 \underline{15} \\
 18 \\
 \underline{15} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3375 \mid 5 \\
 \underline{30} \\
 37 \\
 \underline{35} \\
 25 \\
 \underline{25} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 675 \mid 5 \\
 \underline{5} \\
 17 \\
 \underline{10} \\
 35 \\
 \underline{35} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 135 \mid 5 \\
 \underline{10} \\
 35 \\
 \underline{35} \\
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 27
 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$$

$$\frac{4!}{3!1!} = 4$$

~~1 2 3 3 3 5 5 5~~
1 2 3 4 5 6 7 8

3331 13333 $=4$
 3273
 3723
 $1333, 5555$

[illegible]

$$= \frac{3! \cdot 5!}{8!} = \frac{3! \cdot 5!}{8!} = \frac{6 \cdot 120}{40320} = \frac{720}{40320} = \frac{1}{56}$$

1 3 3 3 5 5 5 5 5 5
1 3 3 5 3 5 5 5 5
1 3 3 5 5 3 5 5 5
1 3 3 5 5 5 3 5
1 3 3 5 5 5 3

13533555
135533555
13555335
13555533

$$\left. \begin{array}{l} 153335555 \\ 155333555 \\ 15553335 \\ 15585333 \end{array} \right\} 4. \quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 13 \\ \hline 8 \\ 102 \end{array}$$

$$8 \cdot (1 + 4 + 4 + 4) = 8 \cdot 13 = 104.$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 40^\circ \sin 20^\circ \cos 20^\circ - \sqrt{2} \cos 10^\circ = 2 \sin 50^\circ \cdot \cos 20^\circ$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$2 \cos 2\alpha (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) - \sqrt{2} (\cos 5\alpha - \sin 5\alpha) (\cos 5\alpha + \sin 5\alpha) = 0$$

$$(\cos 5\alpha - \sin 5\alpha)(2\cos 2\alpha - \sqrt{2}\cos 5\alpha + \sqrt{2}\sin 5\alpha) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$2 \cos 2\alpha - \sqrt{2} \cos 5\alpha + \sin 5\alpha = 0 \quad \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos 2\theta - (\cos \frac{\pi}{4} \cos 5\theta + \sin \frac{\pi}{4} \sin 5\theta) = 0$$

$$\cos 2x \neq \cos\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = 0$$

$$-2\sin\left(\frac{2x + \frac{\pi}{4} + 5x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x - \frac{\pi}{4} + 5x}{2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 + y^2 + 9x - 2y^2 + 2y = 0$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ xy < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$x^2 + (4+y)x - 2y^2 + 8y = 0$$

$$D = 16 + 8y + y^2 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{-4-y \pm 3y-4}{2} = \frac{2y-8}{2} = y-4$$

$$x = \frac{-4-y-3y+4}{2} = \frac{-4y}{2} = -2y$$

$$(x+2y)(x-y+4)=0$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ x = y-4 \end{cases}; x < 0 \Rightarrow y-4 < 0$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^4}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(4y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2y^2}$$

$$(2 \cdot 2y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2 + \lg y^2}$$

$$2^{\lg y^2} \cdot (2y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2} \cdot (2y)^{\lg y^2}$$

$$(2y)^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2}$$

$$y \neq 0 \Rightarrow 2^{\lg y^2} = 2^{\lg 2}$$

$$2^{\lg y^2} = (2y)^{\lg 2}$$

$$2^{\lg y^2} = 2^{\lg 2} \cdot y^{\lg 2}$$

$$2^{\lg y^2} = y^{\lg 2}$$

$$2^{\lg \frac{y^2}{2}} = y^{\lg 2}$$

$$\lg 2^{\lg \frac{y^2}{2}} = \lg y^{\lg 2}$$

$$\lg \frac{y^2}{2} = \lg 2 \cdot \lg y$$

$$2 \lg y - \lg 2 = \lg 2 \cdot \lg y$$

$$2 \frac{\lg y}{\lg 2} - \lg 2 = \lg 2 \cdot \lg y$$

$$2 \lg y - \lg 2 \cdot \lg 10 - \lg 2 \cdot \lg y = 0$$

$$\lg y (2 - \lg 2) = \frac{\lg 2 \cdot \lg 10}{2 - \lg 2} \Rightarrow y = 2^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 10}{2 - \lg 2}} \Rightarrow x = -2 \cdot 2^{\frac{\lg 2 \cdot \lg 10}{2 - \lg 2}} + 4$$

$$\left(\frac{4-y}{y^2}\right)^{\lg(y-4)} = (4-y)^{\lg(4-y)y}$$

$$(4-y)^{\lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$(4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg y} \cdot y^{-2 \lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$\left(\frac{4-y}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$0 < y < 4$$

$$0 < y < 16$$

$$0 < \lg y < \lg 4$$

$$0 < 4-y < 4$$

$$0 < (4-y)^2 < 16$$

$$0 < \frac{14-y^3}{y^2} < 4$$

$$\lg(4-y)^3 \lg y + \lg y^{-2 \lg y} = \lg(4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\frac{\lg 2 \cdot \lg 10 + 2 - \lg 2 \cdot \lg 10}{2 - \lg 2 \cdot \lg 10} = \frac{2}{2 - \lg 2 \cdot \lg 10}$$

$$D = 9 \lg^2 y - 8 \lg y = \lg^2 y$$

$$\lg(4-y)$$