МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

√1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

√2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

$2\sin 5x \sin 2x$

$2\cos 5x \cos 2x$

$\sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x)$

√3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$-xy > 0$

$-x > 0 \quad x < 0$

$y > 0$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

$2y^2 + xy - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0$

$y(2y+x) - x(2y+x) - 4(2y+x) = 0 \quad (2y+x)(y-x-4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = x+4 \\ y = -\frac{x}{2} \end{array}\right.$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

√5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$85 \cdot 42 = 170 + 170 \cdot 20 = 170 + 3400 = 3570$

$85 \cdot 80 = 6400 + 400 = 6800$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

$3^{80} - 1 = (3-1)(3^{79}$

3

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

121,5

√7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 81 + 4 \cdot 3^{81}$

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\,x \end{cases}$$

$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} - 1)x$

$3^x < (3^{81} - 1)x + 85 - 4 \cdot 3^{81}$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq y < 85 + 3^{81} - x$

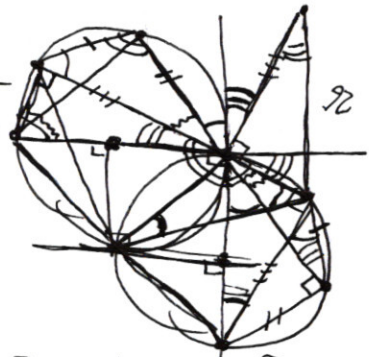
$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + 3^{81} - x$

$3^x + 3 \cdot 3^{81} < 85 - x$

$3^x + 3^{82} < 85 - x$

$x = 3^{82} - 5$

$$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x = 2\sin 5x\sin 2x - \sqrt{2}\sin^2 5x$$



$$2\cos 5x\left(\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x\right) = 2\sin 5x\,($$

$$\cos 10x = \cos 7x\cos 3x - \sin 7x\sin 3x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 7x\cos 3x = \sin 7x + \sin 3x - \sqrt{2}\sin 7x\sin 3x$$

$$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 10x$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)\cdot(\cos 5x - \sin 5x)$$

$= 0$ либо

$$2\cos 2x = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2\cos 2x = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin 5x\right)$$

$$\cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

1)

$$\begin{cases}(2y+x)(y-x-4) = 0\\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}\end{cases}$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)+\lg(y)}$$

$(-xy) > 0$, $(-x) > 0$ $\Rightarrow y > 0$

$$(-x)^{4\lg y}\cdot y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}\cdot(-x)^{\lg y}$$

$$(-x)^{3\lg y}\cdot y^{-2\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 2\sin 5x \cos 2x$$

$$2\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\left(2\cos 2x - \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)\right)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\left(2\cos 2x - 2\left(\cos 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)(\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\sqrt{2}\left(2\cos 2x - 2\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\left(\cos 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$2\sqrt{2}\left(\cos 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left(\cos 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \cdot \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{20} = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ -3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

по ОДЗ 1 ур-ия

$$2y^2 + \cancel{x}y - 2xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$(2y+x)(y-x-4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -\frac{x}{2} \\ y = x+4 \end{array}\right.$$

т.к. $-xy$ и $y \neq 0$, то $y \neq 0$ и $x \neq 0$

1) $y = -\frac{x}{2}$

$$(4x^2)^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(\frac{x^2}{2})}$$

$$\begin{cases} -xy > 0 \text{ по ОДЗ} \\ -x > 0 \text{ по ОДЗ} \\ y > 0 \text{ по ОДЗ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<0 \\ y>0 \end{cases}$$

$$\cancel{(4\cdot(-x)^2)^{\lg(-x)-\lg 2}} = \cancel{4^{\lg(-\frac{x}{2})}\cdot(-x)^{2\lg(-\frac{x}{2})}} = \cancel{(-x)^{2\lg 2 - x}}$$

$$4^{\lg(-\frac{x}{2})} \cdot (-x)^{2\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(-\frac{x}{2}) + \lg(-x)}$$

$$4^{\lg(-\frac{x}{2})} = (-x)^{\lg(-x)} \Rightarrow 4^{\lg(-x)-\lg 2} = (-x)^{\lg(-x)} \Rightarrow 4^{-\lg 2} = \left(-\frac{x}{4}\right)^{\lg(-x)}$$

$$\lg(-x) - \lg 2 = \lg(-x)\cdot\log_4(-x)$$

$$\lg(-x)\cdot(\log_4(-x) - 1) = \lg\frac{1}{2}$$

$$\lg(-x) \neq 0, \text{ т.к. } \lg\frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow \cancel{\log_4\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{\lg\frac{1}{2}}{\lg(-x)} = \log_{(-x)}\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\lg(-x)}{\lg\frac{1}{2}}\cdot\log_4\left(-\frac{x}{4}\right) = 1 \Rightarrow -\log_2(-x)\cdot\log_4\left(-\frac{x}{4}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(-x)\cdot\log_4\left(-\frac{x}{4}\right) = -1$$

$$\begin{cases} \log_2(-x) > 0 \text{ при } x < -1 \text{ и } < 0 \text{ при } x \in (-1;0) \\ \log_4\left(-\frac{x}{4}\right) > 0 \text{ при } x < -4 \text{ и } < 0 \text{ при } x \in (-4;0) \end{cases} \Rightarrow$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow$ поскольку $\log_2(-x)$ и $\log_4\left(-\frac{x}{4}\right)$ — ~~монотонные функции~~ монотонно убывающие функции,

то ~~на как~~ а $\log_2(-x)\cdot\log_4\left(-\frac{x}{4}\right)<0$ при $x\in(-4;-1)$,

то корни лежат на $x\in(-4;1)$

$2\log_4(-x)\left(\log_4(-x)-1\right)=-1$

$2\log_4^2(-x)-2\log_4(-x)+1=0$

$D=4-4\cdot2\cdot1=4-8=-4<0\Rightarrow$ корней нет

2) $y=x+4\Rightarrow x=y-4$ и $\begin{cases}y>0\\y-4<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y>0\\y<4\end{cases}$

$\cancel{x+4}\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(4-y)^{\lg(-y(y-4))}$

$(4-y)^{4\lg y}\cdot y^{-2\lg y}=(4-y)^{\lg(y)+\lg(4-y)}$

$(4-y)^{3\lg y}\cdot y^{-2\lg y}=(4-y)^{\lg(4-y)}$

$(4-y)^{\lg(4-y)}\neq0\Rightarrow(4-y)^{3\lg y-\lg(4-y)}\cdot y^{-2\lg y}=1$

$y^{-2\lg y}\neq0\Rightarrow(4-y)^{3\lg y-\lg(4-y)}=y^{2\lg y}$

$2\lg_y=\left(3\lg_y-\lg(4-y)\right)\log_y(4-y)$

$2\lg_y=\left(3\lg_y-\lg(4-y)\right)\cdot\frac{\lg(4-y)}{\lg y}$

$2\lg y=3\lg(4-y)-\frac{\lg^2(4-y)}{\lg y}$

$2\lg^2y=3\lg(4-y)\lg y-\lg^2(4-y)$

$2\lg^2y-2\lg(4-y)\lg y=\lg(4-y)\lg y-\lg^2(4-y)$

$2\lg y\left(\lg y-\lg(4-y)\right)=\lg(4-y)\left(\lg y-\lg(4-y)\right)$

$(2\lg y - \lg(4-y))(\lg y - \lg(4-y)) = 0$

$2\lg y = \lg(4-y)$ или $\lg y = \lg(4-y) \Rightarrow y^2 = 4-y$ или $y = 4-y \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 + y - 4 = 0$ или $y = 2$

$D = 1 + 4\cdot 4\cdot 1 = 17$

$y_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{17}-1}{2}$, $y_3 = 2$ $\cancel{y_{1,2,3} \in (0;4)}$

$\cancel{x = 4-y \Rightarrow x_{1,2} = 4 - \frac{\pm\sqrt{17}-1}{2}, \ x_3 = 2}$

$\cancel{x = y}$ $y = \frac{-\sqrt{17}-1}{2}$ не подх., т.к. $y > 0$

$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$ или $2 \Rightarrow x = y - 4 = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$ или -2

Ответ: $x_1 = \frac{\sqrt{17}-9}{2}$, $y_1 = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$

$x_2 = -2$, $y_2 = 2$

Задача 1

$16875 = 3375 \cdot 5 = 675 \cdot 5^2 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 3^3 = 5^4 \cdot 3^3$

На 5 делится лишь одна цифра — „5" $\Rightarrow$ должно быть 4 пятёрки из 8 цифр.

Оставшиеся 4 цифры должны давать в произведении $27 = 3^3$.

Если среди ~~4~~ цифр есть 9, то набор 1,1,3,9, 5,5,5,5, если 9 нет, то 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5.

1) 1, 1, 3, 9, 5, 5, 5, 5 : число способов расставить $= \frac{8!}{4!\cdot 2!} =$

$= \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2} = 5\cdot 6\cdot 7\cdot 4 = 30 \cdot 28 = 600 + 240 = 840$

2) 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5 : число способов расставить $= \frac{8!}{3!\cdot 4!} =$

$= \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{3\cdot 2} = 5\cdot 7\cdot 8 = 40\cdot 7 = 280$

Всего ~~спосо~~ чисел $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120 чисел

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\text{Задача 5}}$

$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a \end{cases}$ система имеет ровно 2 решения

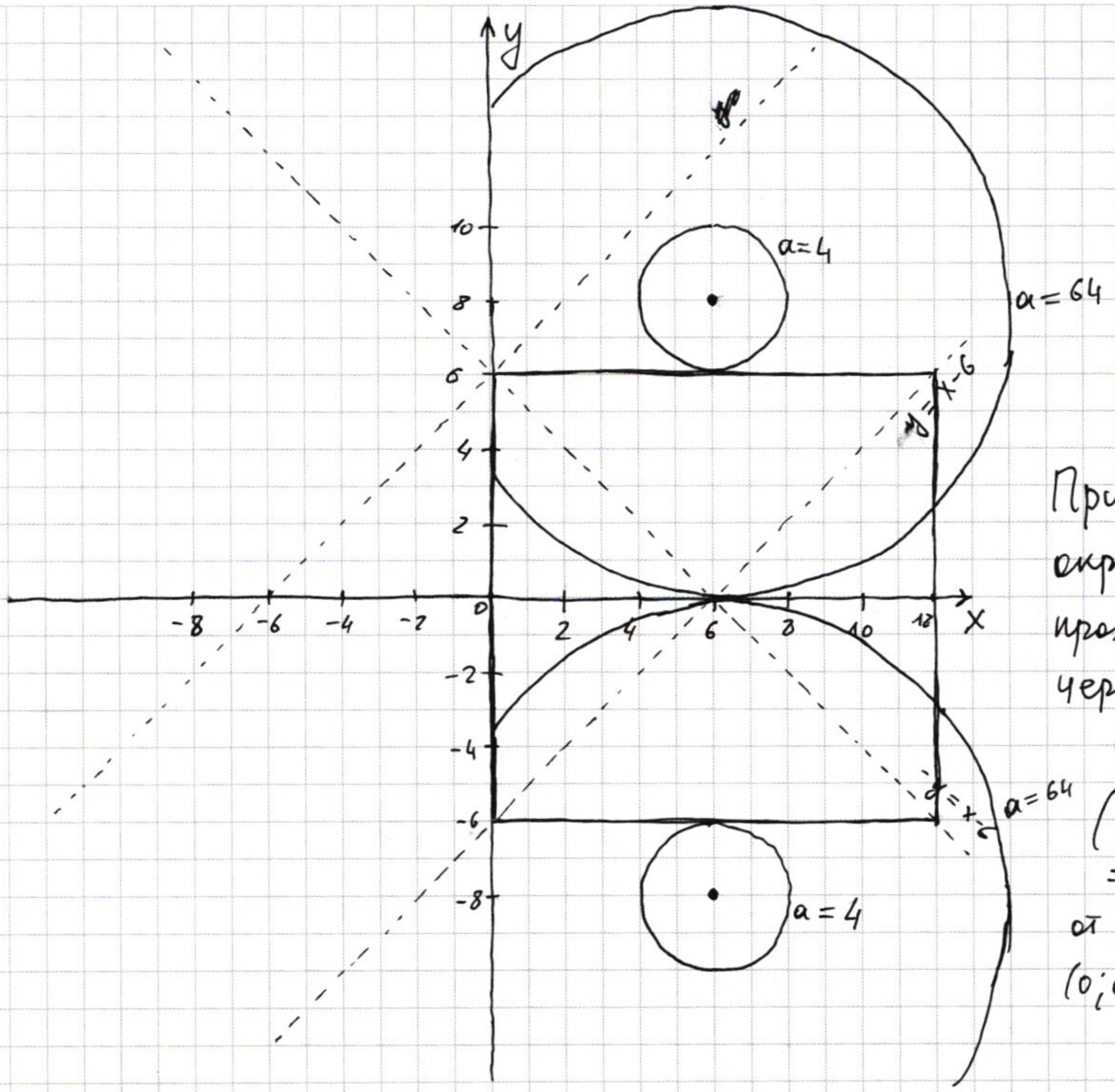
$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y| = 2x-12 \text{ при } x-6-y\geq 0 \text{ и } x-6+y\geq 0 \\ |x-6-y|+|x-6+y| = -2y \text{ при } x-6-y\geq 0 \text{ и } x-6+y\leq 0 \\ |x-6-y|+|x-6+y| = 2y \text{ при } x-6-y\leq 0 \text{ и } x-6+y\geq 0 \\ |x-6-y|+|x-6+y| = -2x+12 \text{ при } x-6-y\leq 0 \text{ и } x-6+y\leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$
при $x-6\geq y$ и $x-6\geq -y$ $\quad 12=2x-12 \Rightarrow x=12$
при $x-6\geq y$ и $x-6\leq -y$ $\quad -2y=12 \Rightarrow y=-6$
при $x-6\geq -y$ и $x-6\leq y$ $\quad 2y=12 \Rightarrow y=6$
при $x-6\leq -y$ и $x-6\leq y$ $\quad -2x+12=12 \Rightarrow x=0$

При $x\geq 0$, $y\geq 0$ $(|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a$ — окружность с радиусом $\sqrt{a}$, ~~при $x<0$, $y\geq 0$ — окружность~~ и центром в $(6;8)$, при $x<0$, $y\geq 0$ — окружность с радиусом $\sqrt{a}$ и центром в $(-6;8)$, при $x\geq 0$, $y<0$ — окружность радиусом $\sqrt{a}$ и центром в $(6;-8)$, при $x<0$, $y<0$ — окружность с радиусом $\sqrt{a}$ и центром в $(-6;-8)$.

Если нарисовать множество точек, удовлетворяющее первому уравнению, то получится квадрат с вершинами $(0;-6)$, $(0;6)$, $(12;-6)$ и $(12;6)$ $\Rightarrow$ нас интересуют лишь $x\geq 0$ $\Rightarrow$ 2-ое уравнение задаёт две части окружностей с $R=\sqrt{a}$ и центрами в $(6;8)$ и $(6;-8)$.

Будем увеличивать a от 0 до $+\infty$.



При $a = 100$ окружности проходят через $(0;0)$ и $(12;0)$ (т.к. $10^2 = 6^2 + 8^2 = \rho$ от $(\pm 6; \pm 8)$ до $(0;0)$ и $(12;0)$)

Видно, что при $a \in [0; 4)$ решений нет, при $a = 4$ происходит касание, и у нас 2 решения, при $a \in (4; \cancel{16}\,100)$ у нас 4 точки пересечения и 4 решения, при $a = 100$ снова 2 решения (проходят окр-и через $(0;0)$ и $(12;0)$), при $a > 100$ радиусы слишком большие, пересечений с квадратом нет и решений 0, при $a < 0$ второе уравнение не имеет смысла $\left((|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 \geq 0 > a\right)$.

$\boxed{\text{Ответ: при } a = 4 \text{ и } a = 100}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

Поскольку $3^x+4\cdot3^{81}\le y<85+(3^{81}-1)x$, то $3^x+4\cdot3^{81}<85+(3^{81}-1)x$

При $x\le 0$ $85+(3^{81}-1)x\le 85<3^{81}<4\cdot3^{81}<4\cdot3^{81}+3^x$

~~При~~ $\cancel{x=1 \quad 85+3^{81}-1<2\cdot3^{81}<4\cdot3^{81}+3^1}$

~~При~~ $\cancel{x=2 \quad 85+(3^{81}-1)\cdot 2}$

При $x\in(1;4)$ $85+(3^{81}-1)x\le 85+(3^{81}-1)\cdot 3 =$

$=82+3\cdot3^{81}<4\cdot3^{81}+3^x$

При $x=4$ $85+(3^{81}-1)\cdot4=3^4+4\cdot3^{81}$

~~При~~ $\cancel{x=5 \quad 85+(3^{81}-1)\cdot5=80+3^{81}\cdot5>3^{81}\cdot5>4\cdot3^{81}+3^5}$

$3^x+4\cdot3^{81}<85+(3^{81}-1)x$

$3^x+3^{81}(4-x)<85-x$

При $4<x<81$ $3^x+3^{81}(4-x)<3^{81}+3^{81}(4-x)=$

$=3^{81}\cdot(5-x)\le 0<85-x$

~~При~~ $\cancel{x=82 \quad 3^{82}+3^{81}\cdot(4-82)=3^{81}(7-82)<85-8}$

~~При~~ $\cancel{81\le x<85 \quad 3^x+3^{81}(4-x)<3^{82}}$

При $x=82$ $3^{82}+3^{81}(4-x)=3^{82}(7-82)<0<85-82$

При $x=83$ $3^{83}+3^{81}(4-83)=3^{83}(13-83)<0<85-83$

При $x=84$ $3^{84}+3^{81}(4-84)=3^{84}(31-84)<0<85-84$

При $x=85$ $3^{85}+3^{81}(4-85)=3^{81}(85-85)=0=85-85$

~~При~~ $\cancel{x>85 \quad 3^x+3^{81}(4-x)=3^{81}\cdot(3^{x-81}+4-x)\ge}$

$\cancel{\ge 3^{81}(3^{85} \ge (3^4+x+4-x)}$

Заметим, что при $\forall x>85$ $3^{x+1}-3^x>1\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^x-3^{85}>x-85.$

Тогда $\forall x > 85$ $\quad 3^x + 3^{81}(4-x) > 3^{81}\cdot(3^4+x) + 3^{81}(4-x) =$

$= 3^{81}\cdot(85) > 0 > 85-x$

Из вышеизложенного следует, что $4 < x < 85$

$3^x + 4\cdot 3^{81} \le y < 85 + (3^{81}-1)x$

$-(3^x + 4\cdot 3^{81}) + 85 + (3^{81}-1)x =$

$= 85 + 3^{81}\cdot x - 4\cdot 3^{81} - x - 3^x = 85 + 3^{81}\cdot(x-4) - x - 3^x$

Для каждого x y может принимать значения от $3^x + 4\cdot 3^{81}$ до $85 + (3^{81}-1)x - 1$ — всего $85 + 3^{81}\cdot(x-4) - x - 3^x$ значений $\Rightarrow$ всего пар $= \sum\limits_{x=5}^{x=84}\left(85 + 3^{81}\cdot(x-4) - x - 3^x\right)$

$$\sum_{x=5}^{x=84}\left(85 + 3^{81}\cdot(x-4) - x - 3^x\right) = \sum_{x=5}^{x=84} 85 + \sum_{x=5}^{x=84} 3^{81}\cdot(-4) + \sum_{x=5}^{x=84}(3^{81}-1)x +$$

$$+ \sum_{x=5}^{x=84} -3^x = (85 - 4\cdot 3^{81})\cdot(84-4) + (3^{81}-1)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{84\cdot 85}{2} - (1+2+3+4)\right) - (3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{84}) = (85 - 4\cdot 3^{81})\cdot 80 +$$

$$+ (3^{81}-1)\cdot(85\cdot 42 - 10) - 3^5\cdot(1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{79}) = (85 - 4\cdot 3^{81})\cdot 80 +$$

$$+ (3^{81}-1)\cdot 3560 - 3^5\cdot\frac{3^{80}-1}{2} = 85\cdot 80 - 320\cdot 3^{81} + 3560\cdot 3^{81} -$$

$$- 3560 - \frac{81\cdot 3^{81} - 3\cdot 81}{2} = 6800 - 3560 +$$

$$+ (3560 - 320)\cdot 3^{81} - \frac{81\cdot 3^{81} - 243}{2} = 3240 + 3240\cdot 3^{81} - \frac{81\cdot 3^{81} - 243}{2} =$$

$$= 3240 + \frac{243}{2} + \left(3240 - \frac{81}{2}\right)\cdot 3^{81} = 3361 + \frac{1}{2} + \left(3200 - \frac{1}{2}\right)\cdot 3^{81} =$$

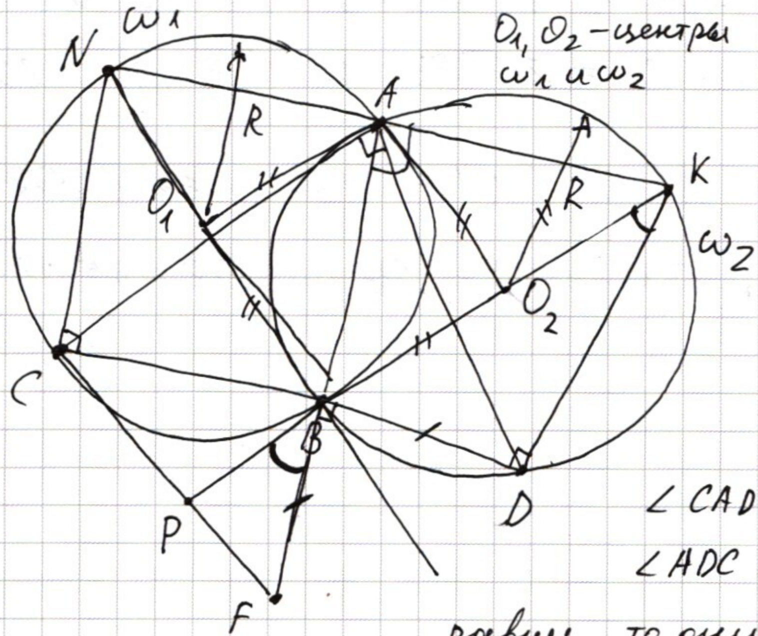
$$= 3361 + \frac{1}{2} + 3200\cdot 3^{81} - \frac{1}{2}\cdot 3^{81} = 3361{,}5 + 3199{,}5\cdot 3^{81}$$

заметим — это число всегда целое

$\boxed{\text{Ответ: число пар } = 3361{,}5 + 3199{,}5\cdot 3^{81}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\text{Задача 6}}$



Пусть радиусы обеих окружностей $= R$, тогда $\frac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R = \frac{AB}{\sin\angle ADB} \Rightarrow \sin\angle ACB = \sin\angle ADB$. Т.к. в $\triangle ADC$ $\angle CAD = 90°$, то углы $\angle ACD$ и $\angle ADC$ острые $\Rightarrow$ т.к. их синусы равны, то они сами равны $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \triangle CAD$ – равнобедренный с основанием CD, причём он прямоугольный $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45° \Rightarrow AB = 2R\sin 45° = \sqrt{2}R \Rightarrow$ ~~центральная~~ т.к. AO_2BO_1 – ромб ($AO_1 = BO_1 = AO_2 = BO_2 = R$) и в нём диагональ равна $\sqrt{2}\cdot R$, а ребро $= R$, то AO_2BO_1 – квадрат. ~~$\Rightarrow \angle BO_1A$~~.

~~$\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{BD}{\sin\angle}$~~ O_1B и O_2B – радиусы, $\perp$-ые друг другу $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1B$ касается ω_2, а O_1B касается ω_1 $\Rightarrow$ если $K = \omega_2 \cap O_2B$, а $P = CF \cap BO_2$, то $\angle BKD = 90° - \angle KBD = 90° - \angle PBC$.

Пусть $N = BO_1 \cap \omega_1$. Тогда $\angle BCN = \angle BDK = 90°$, т.к. BN и BK – диаметры $\Rightarrow CN \perp CD$ и $CD \perp DK \Rightarrow DK \parallel CN$.

$\angle NAB = 90^\circ = \angle KAB$ из тех же рассуждений $\Rightarrow$ N, A и K коллинеарны и $AB \perp NK$

~~Если CN A~~ Поскольку $CD \perp CN$ и DK, $CN \parallel DK$, то ввиду симметрии получаем, что $CNKD$ — прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB \perp$ и $CD \Rightarrow BD = BC = \frac{1}{2}\cancel{DC}$ ~~и DC тогда~~ $= AB$ и

тогда $CD = \cancel{\sqrt{2}}\ 2AB = 2\sqrt{2}R \Rightarrow \cancel{CF = \sqrt{2}BK = \frac{\sqrt{2}}{2}CD =}$

$\cancel{= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2\sqrt{2}R = R} = \Rightarrow CF = \cancel{2\sqrt{2}R} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}R = 2R = 26$

б) S_{ACF} тогда равна $AC \cdot CF$ ($\angle ACF$ тогда $= \cancel{10} \cancel{10 \cdot \sqrt{2}R} =$

$= \cancel{10} = \frac{BC \cdot AF}{2} = \frac{10}{2} \cdot (\sqrt{2}R + \sqrt{2}R) = \cancel{13}\ 5 \cdot 2\sqrt{2}R = 65 \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 130\sqrt{2}$

Ответ: а) 26
б) $130\sqrt{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)