

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
 - б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$$\begin{array}{r} 16875 \div 5 = 3375 \\ 3375 \div 5 = 675 \\ 675 \div 5 = 135 \\ 135 \div 5 = 27 \\ 27 \div 3 = 9 \\ 9 \div 3 = 3 \\ 3 \div 3 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow 16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

т.к. числа 5 и 3 - простые $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ в искоемых 8-значных числах 4 пятёрки и 3 тройки (иначе произведение цифр не может быть равно 16875)

Теперь очевидно, что ещё одна цифра это 1, т.к. это единственное число, при домножении на которое получаем такое число $\Rightarrow$ нужно найти кол-во чисел, состоящих из 4-х пятёрок, 3-х троек и единиц $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1 = \text{(сначала выбираем места для пятёрок, потом из оставшихся - для троек и на оставшееся место ставим 1)}$$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{1} = 280$$

Ответ: 280 чисел

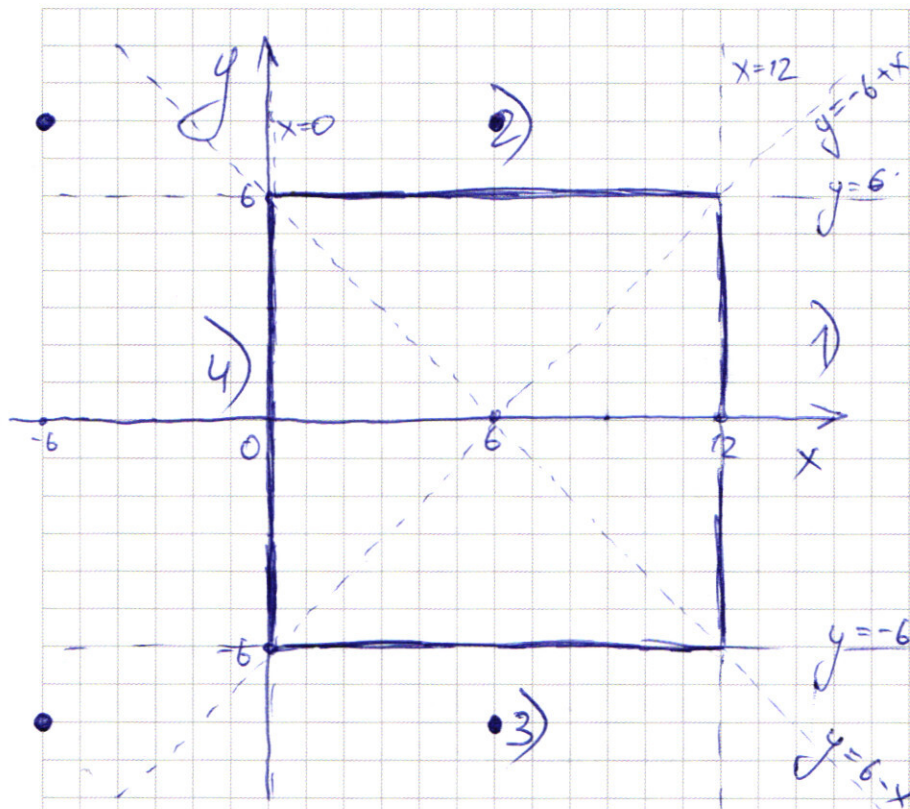
5

Раскроем модули в первом ур-и системы:

$$\begin{array}{l} 1) \ x+y > 6 \Rightarrow y > 6-x \\ \quad x+y > 6 \Rightarrow y < -x-6 \\ \quad x-6-y+x-6+y=12 \\ \quad \quad \quad \boxed{x=12} \end{array} \quad \begin{array}{l} 2) \ x+y > 6 \Rightarrow y > 6-x \\ \quad x+y < 6 \Rightarrow y < -x-6 \\ \quad -x+6+y+x-6+y=12 \\ \quad \quad \quad \boxed{y=6} \end{array} \quad \begin{array}{l} 3) \ x+y < 6 \Rightarrow y < 6-x \\ \quad x+y > 6 \Rightarrow y < -x-6 \\ \quad x-6-y-x+6-y=12 \\ \quad \quad \quad \boxed{y=-6} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4) \ x+y < 6 \Rightarrow y < 6-x \\ \quad x+y < 6 \Rightarrow y > -x-6 \\ \quad -x+6-y-x+6-y=12 \\ \quad \quad \quad \boxed{x=0} \end{array}$$

Теперь построим графическое отображение первого и второго ур-я системы на одном графике

Заметим, что второе ур-е задается графически, как 4 симметричных относительно осей окружности с радиусом 6.



Центрами точек
будут центры
четырёх окружностей.

Теперь будем увеличивать a от 0 до бесконечности (т.е. из 2-го ур-я $a \geq 0$)

Из графика видно, что при $\sqrt{a} < 2$ (т.е. $a < 4$) система не имеет пересечений $\Rightarrow$ применим тот же

При $\sqrt{a} = 2$ ($a = 4$) две окружности, касающиеся правой стороны от оси OY касаются квадрата $\Rightarrow 2$ пересечения $\Rightarrow$

$\Rightarrow a = 4$ - первое искомое значение

При дальнейшем увеличении a до $\sqrt{a} = 2\sqrt{10}$ ($a = 40$) - посчитано по теореме Пифагора $(\sqrt{8^2 + 6^2})$ система будет иметь 4 решения, т.к. две правые окр-ти будут пересекать стороны квадрата каждой в двух точках.

При $a = 40$ ($\sqrt{a} = 2\sqrt{10} = R$) две правые окр-ти будут пересекать квадрат в вершинах, а также левые будут пересекать квадрат в паре его левых вершин $\Rightarrow$ будет 4 решения

При дальнейшем увеличении a все 4 окр-ти будут иметь по 2 пересечения с квадратом $\Rightarrow$ будет больше двух решений (т.к. 4 окр-ти не могут иметь только 2 точки пересечения) $\Rightarrow$ будет более 2-х различных решений, пока

одна из окружностей не будет иметь настолько большой радиус, что квадрат будет внутри нее.

Сначала это произойдет с двумя правыми окр-тиями, причем одновременно (т.к. они симметричны) при $a > \frac{1}{4} 14^2 + 6^2 = 196 + 36 = 232$, т.к. они расположили их центр относительно центра к квадрату $\Rightarrow$ а дальше точка (для левых окр-тей это произойдет при $\sqrt{a} > 18^2 + 16^2 = 580$) $\Rightarrow$ при $a \in (232; 580]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

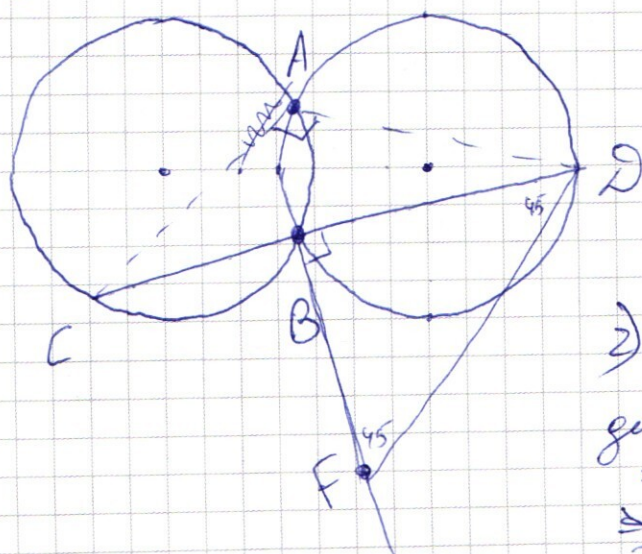
квадрат будут пересекать только левые окр-ти, при этом при $a \in (232; 580)$ каждый из них будет иметь 2 пересечения, среди которых не более одного внешнего (т.к. они в окр-ти пересекаются не более чем в 2-х точках, а данные окр-ти уже имеют одну общую точку вне квадрата) $\Rightarrow$

~~$a = 580$ так~~ при $a = 580$ окр-ти левые окр-ти пересекать квадрат в двух правых вершинах $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ будет 2 решения $\Rightarrow a = 580$ - второе исковое значение

при $a > 580$ окр-ти не имеют пересечений с квадратом т.к. их радиусы больше расстояния от центра до самой дальней точки квадрата

Ответ: $a = 40$; $a = 580$.

(6)



Решение

1) т.к. $BF \perp CD \Rightarrow FBD$ - прямоугольный $\triangle$
 $BF = BD$

$\Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$; $BD = BF$

2) т.к. окр-ти равны $\Rightarrow$ дуги опирающиеся на хорды одинаковой длины равны $\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADC = \angle ACD = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADF = \angle ADC + \angle BDF = 45 + 45 = 90$

~~$\angle ADF = 90$~~

2) Продлим прямые BF и AD до пересечения в точке X .

Тогда $\angle FXD = 45^\circ$ (т.к. $\triangle FXD$ - пр. $\angle DFX = 45^\circ$); $\angle FXD$ опирается

на хорду AB $\Rightarrow \angle FXD$ также будет углом вписанным $\Rightarrow$

$\angle ACB = 45^\circ$ - впис. и опирается на AB $\Rightarrow X$ лежит на окр-ти №1 (левой)

но X лежит и на AD

$\Rightarrow X$ и A - разные точки ~~прямой~~

~~Вот~~ $\Rightarrow X$ - точка пересечения AD и первой окр-ти $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle ADC = \frac{\angle CX - \angle AB}{2} = \frac{\angle CX}{2} - 45^\circ \quad \Rightarrow \angle CX = 180^\circ$$

$$\angle ADC = 45^\circ$$

т.к. $\angle FXD = 45^\circ$

$$\angle XDB = \angle ADB = 45^\circ \Rightarrow \triangle XBD - \text{пр} \Rightarrow BD = XB$$

$BF \perp CD \Rightarrow \angle CBX = 90^\circ \Rightarrow \triangle CBX$ - пр. $\Rightarrow$ по теореме Пифагора

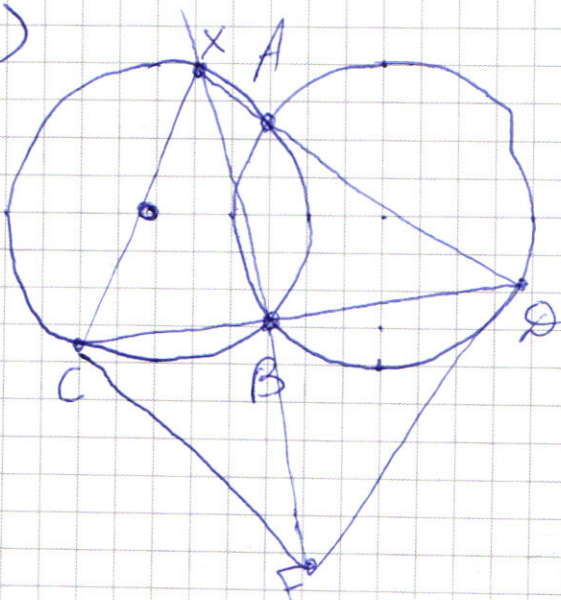
$$XB^2 + CB^2 = \cancel{AB^2} = 2 \cdot 13^2 = 338 \quad \Rightarrow CB^2 + BF^2 = CF^2 = \cancel{26^2} \Rightarrow CF = \cancel{26}$$

$$XB = BD = BF$$

Ответ: ~~26~~ 26

$$\Rightarrow CF = 2R \Rightarrow$$

5)



$$CF = 2R \Rightarrow \triangle CXF - \text{пр} \quad \left| \begin{array}{l} CB \perp BF \Rightarrow CB \perp XF \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XB = BF; CB - \text{h в } \triangle CXF \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{по теореме Пифагора:}$$

$$XB = BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow XF = 48 \Rightarrow S_{CB \cdot XF \cdot \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 10 = 120$$

Ответ: 120

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑦ Заметим, что если $x < 0$, то из второго ур-я $y < 0$, но из первого — y всегда $> 0 \Rightarrow x > 0$ и $y > 0$.

Также заметим, что при $x = 4$ получается, ~~из первого что~~ $y < 3^4 + 3^{81} \cdot 4$ (из второго) и $y > 3^4 + 3^{81} \cdot 4$ (из первого), а при дальнейшем при $x < 4$ из первого y должен быть больше a , из второго — меньше b , где $a > b \Rightarrow$ решений нет.

При увеличении x от 4 до ∞ сначала интервал возможных значений y увеличивается, ~~а затем~~ ~~т.к.~~ $85 + (3^{81} - 1)x$ увеличивается быстрее $3^x + 4 \cdot 3^{81}$, а затем начинает сокращаться, пока система снова не будет иметь решений.

При $x > 81$ скорость увеличения $3^x + 4 \cdot 3^{81}$ будет больше скорости увеличения $85 + (3^{81} - 1)x$, причем будет быстро расти (т.к. с увеличением x на единицу первое выражение увеличивается на 2^{x-1} , а второе на $3^{81} - 1$)
 при $x > 81$

При $x = 85$ выражения $3^x + 4 \cdot 3^{81}$ и $85 + (3^{81} - 1)x$ снова сравняются и далее при увеличении x $3^x + 4 \cdot 3^{81} > 85 + (3^{81} - 1)x \Rightarrow$ невозможно подобрать $y \Rightarrow x \in (4; 85); x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [5; 84]$

При $x = a$ ~~ур-я решены будут~~ ~~в~~ ~~подойдут все целые~~ $y \in (85 + (3^{81} - 1)a; 3^a + 4 \cdot 3^{81}]$; т.к. $y \in \mathbb{Z}$, то все $y \in [85 + (3^{81} - 1)a; 3^a + 4 \cdot 3^{81}] \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \text{сумма пар ретерий } S &= \left(3^5 + 4 \cdot 3^{81} - 84 - (3^{81} - 1) \cdot 5 + 1 \right) + \\
 &+ \left(3^6 + 4 \cdot 3^{81} - 86 - (3^{81} - 1) \cdot 5 + 1 \right) + \dots + \left(3^{84} + 4 \cdot 3^{81} - 84 - (3^{81} - 1) \cdot 84 + 1 \right) = \\
 &= \left(-3^5 + 3^6 + \dots + 3^{84} \right) + 4 \cdot 3^{81} \cdot 80 - 84 \cdot 80 - (3 \cdot 5 + 3^{81} \cdot 8 + 3^{81} \cdot 7 + \dots + 3^{81} \cdot 84) + (5 + 6 + \dots + 84) + \\
 &+ 80 = -\left(\frac{3^5(1-3^{80})}{1-3} \right) + 4 \cdot 3^{81} \cdot 80 - 84 \cdot 80 - \frac{3^{81} \cdot 5 + 3^{81} \cdot 84}{2} + \frac{(5+84) \cdot 80}{2} + \\
 &+ 80 = \frac{640 \cdot 3^{81} - 6640 + 3560 + 81 \cdot 3^{81}}{2} - \frac{243}{2} - \frac{3^{81} \cdot 89 \cdot 80}{2} = \\
 &= \frac{640 \cdot 3^{81} - 13280 + 7120 + 81 \cdot 3^{81} - 243 - 3^{81} \cdot 7120}{2} = \\
 &= \frac{6403}{2} + \frac{6399 \cdot 3^{81}}{2}
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{6403}{2} + \frac{6399 \cdot 3^{81}}{2}$

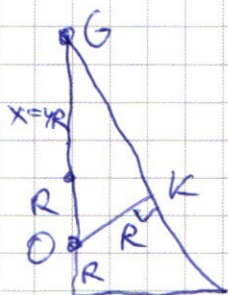
$$\begin{aligned}
 (2) \quad \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 70x &= \sin 7x + \sin 3x \\
 \cos 7x + \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \cos 3x &= \sin 7x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x \\
 \cos 7x (\sqrt{2} \cos 3x + 1) + \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sin 7x (\sqrt{2} \sin 3x + 1) + \sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\
 (\sqrt{2} \cos 7x + 1) \left(\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= (\sin 7x + 1) \left(\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \sqrt{2} \\
 \left(\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= \left(\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 \left(\cos 7x + \cos \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos 3x + \cos \frac{\pi}{4} \right) &= \left(\sin 7x + \sin \frac{\pi}{4} \right) \left(\sin 3x + \sin \frac{\pi}{4} \right)
 \end{aligned}$$

(4) Δ -или тетраэдр такой, что сечение с площадью 9 — его основание, тогда $\exists R$ -радиус сферы, а x расстояние от вершины тетраэдра до сечения с $S=9$, тогда для тетраэдра $\sim$ с коэф-том $k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$
 $k = \frac{x}{x+2R} \Rightarrow x = 4R$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

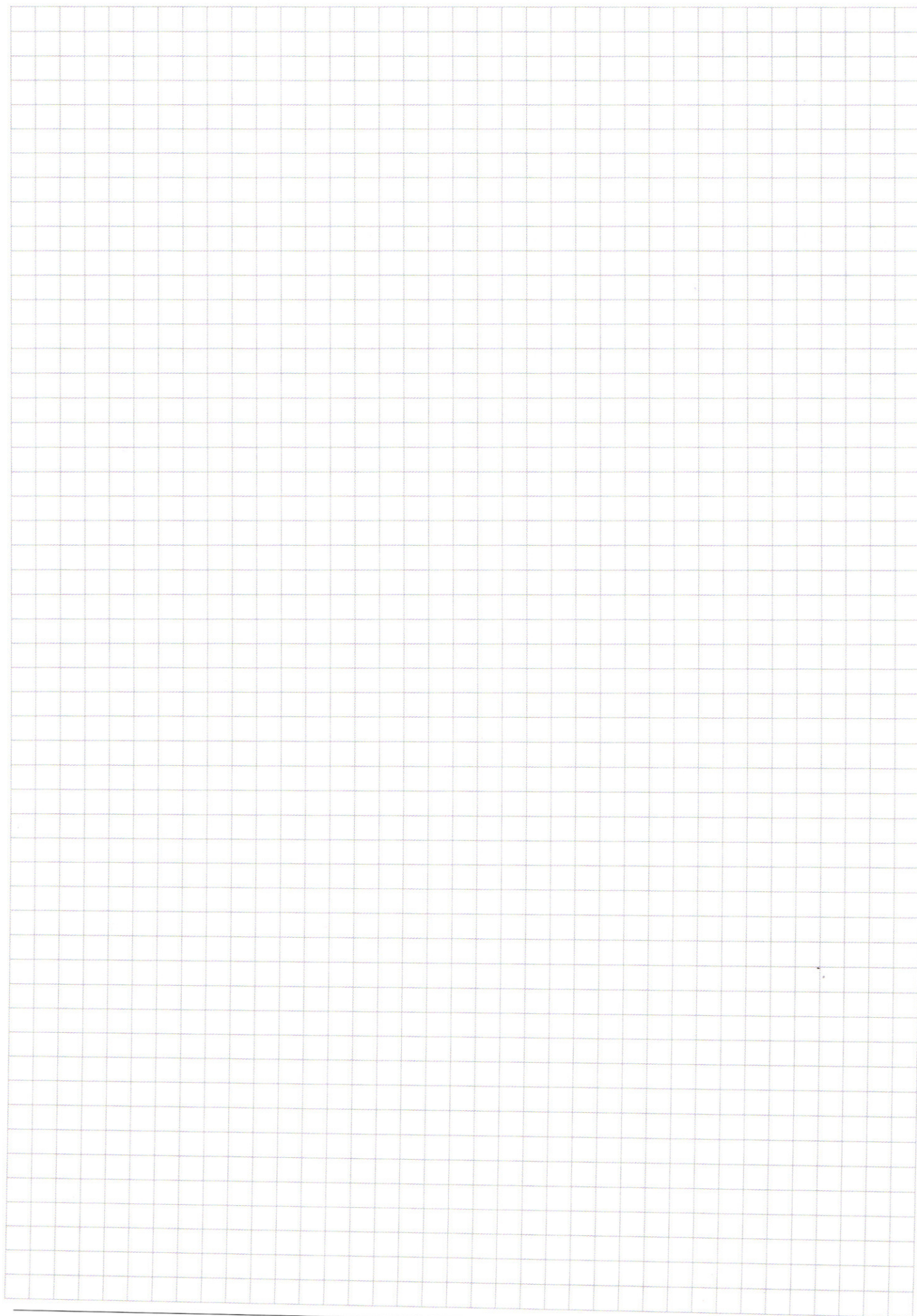
4-ий Δ с вершинами в вершине тетраэдра,
~~основанием~~ ~~высоты~~ тетраэдра ΓO и ΔK .



$$\text{ок прт} \Rightarrow \sin \angle OKG = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ искомый угол равен $\arcsin \frac{1}{5}$

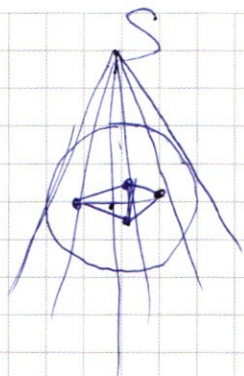
Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



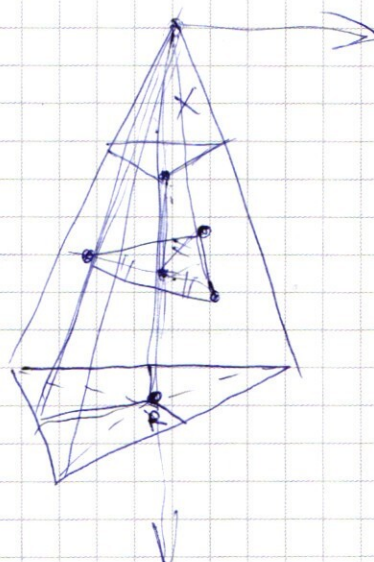
$$y \in 3^5 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3R$$

$$\sqrt{24}$$

$$36R + R$$

$$\sqrt{24}$$



$$\frac{x+2R}{x} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$R/P$$

$$K = \frac{3}{2}$$

$$\frac{R}{6R} = \frac{1}{6} \Rightarrow L = \text{окт. } 6$$

$$\frac{x+2R}{x} = \frac{3}{2}$$

$$2x+4R=3x$$

$$x=4R$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{l}{f} = \frac{1}{5} \Rightarrow f = 5l$$

$$x^2 - \frac{1}{25}x^2 = 6R$$

$$\sqrt{24}x$$

$$\frac{36R}{\sqrt{24}}$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 0$$

$$x+y > 6 \Rightarrow y > 6-x \quad x+y > 6$$

$$x-y < 6 \Rightarrow y > x-6 \quad x-y > 6$$

$$x+y < 6$$

$$x-y > 6$$

$$x+y < 6$$

$$x-y < 6$$

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$y = 6$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

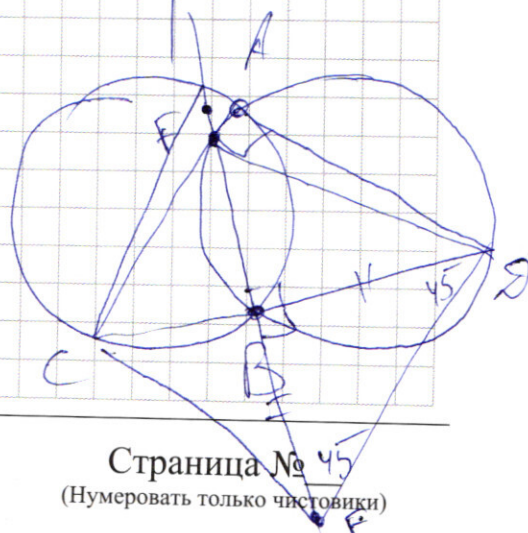
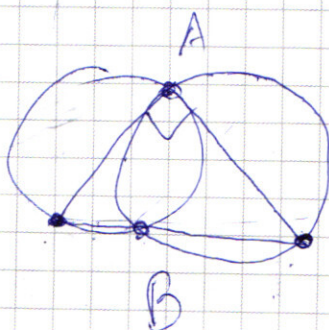
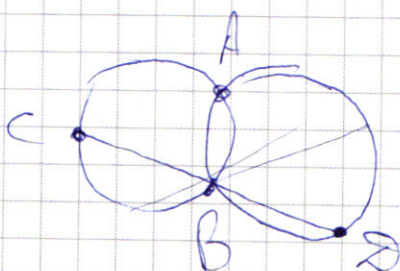
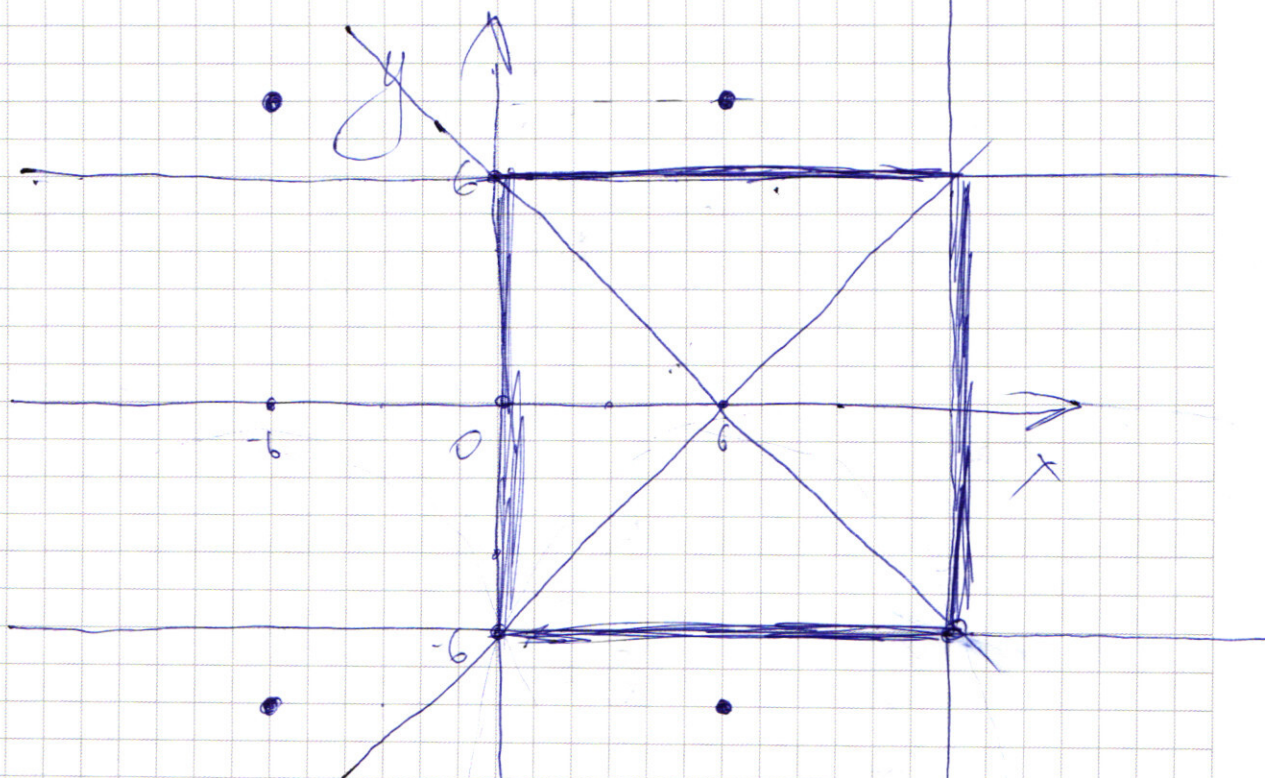
$$x = 12$$

$$x-6-y + x+6-y = 12$$

$$y = -6$$

$$-x+6+y - x+6+y = 12$$

$$x = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~(4-X)~~ ~~4.381-3~~

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$85 + 3^{81}x - x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$3^{81}(4-x) + 3^x - 3^4 - 4 + x = 3^x + 4 \cdot 3^{81} =$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$y \geq 1 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$x \geq 4$$

$$\cos 10x = \cos(7x + 3x) =$$

$$\cos 2 + \cos 8 = 2 \cos \left(\frac{2+8}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2-8}{2} \right)$$

$$2 \sin 5x$$

$$3^{81}t + 81(t-1) - t = 0$$

4.

$$= \cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x = 2 \cos 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 7x + \cos 7x + \cos 3x + \cos 3x = \sin 7x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 3x$$

$$\cos 7x + \sqrt{2}$$

$$\cos 7x \left(\sqrt{2} \cos 3x + 1 \right) + \cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\cos 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\cos 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \left(\sin 3x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\sin 7x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$\left(\frac{x^2}{y} \right)^{\lg y^2} = (-x)$$

$$\frac{(3^{81}-1)x^2}{2} = -x \Rightarrow x \geq 0$$

$$(y-4)^2$$

$$2(y-4)^2 = (x+y)^2$$

$$(-x)^4 = (-x)^{\lg(-x)} y^2$$

$$3^k = 81 + 2k$$

$$\frac{x^4}{y^2} = (-x)^{\lg(-x)} 3^x$$

$$\frac{3^{81}-1}{2} x^2$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$2y^2 - 8y + 8 - (x^2 + 4x + 4) - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - xy = 4$$

$$(y-2)(x+2) = xy + 2y - 2x - 4$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} \cdot x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 3^{81} - x$$

$$3^{81}(4-x) + 3^x - 3^4 - 4 + x = 0$$

$$3^{81}t + 81(3^{-t}) = 256$$

$$t=0 \Rightarrow 324 =$$

$$(y-2)^2 + (y-2-x+2)^2$$

$$\frac{6(1-q^n)}{y^2}$$

$$\lg(xy) = \lg x + \lg y$$

$$\frac{2^2(1-2^3)}{1-2}$$

$$4 \cdot 7 = 28$$

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

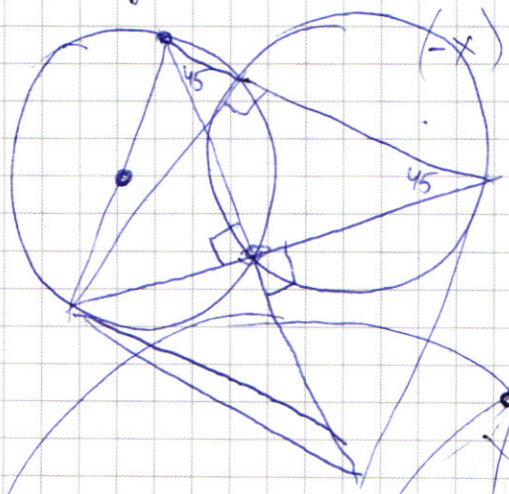
$$\frac{x^4}{y^2}$$

$$\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y$$

$$\frac{2^2(1-2^3)}{1-2}$$

$$4 \cdot 7 = 28$$

$$\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

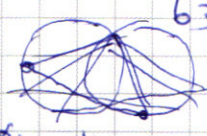


$$(-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg y (y^2) \lg y$$

$$(-xy^2) \lg y = (-x) \lg y^4$$

$$81 + \dots$$

$$3^3 \cdot 3^{81}$$



$$43280$$

$$7120$$

$$6160$$

$$+ 243$$

$$6403$$

$$(3^4 + 4) 3^{81} >$$

$$3^4 \cdot 81$$

$$a^2 + 6^2$$

$$3^4 \cdot 3^{81} + 3^{81} \cdot 4$$

$$3^4 \cdot 3^{81}$$

$$3^4 + 4 > 85$$