МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 10x \cdot \sin 4x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = 2\cdot\cos 10x\cdot\cos 4x$

$\sqrt{2}\cos 10x(\sqrt{2}\sin 4x - \sqrt{2}\cos 4x - 1) = 0$

$\cos 10x = 0$ или $\sqrt{2}(\sin 4x - \cos 4x) = 1$

$10x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi\cdot n}{10}, n\in Z$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}(\sin 4x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 4x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$

$\sin(4x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi n \\ 4x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi n \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z \\ x = \frac{13\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z \end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10}, n\in Z \\ x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z \\ x = \frac{13\pi}{48} + \frac{\pi n}{2}, n\in Z \end{array}\right.$

№3 $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2) \end{cases}$

О.Д.З.: $\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$

Из (1): прологарифмируем по основанию 10: $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} > 0 \\ (-x)^{\lg(-xy)} > 0 \end{cases}$ – выполн. с учётом О.Д.З.

Тогда:

$\lg\left(\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y}\right) = \lg\left((-x)^{\lg(-xy)}\right)$; $\lg y\cdot(\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-xy)\cdot\lg(-x)$;

$\lg y\cdot(4\lg|x| - 2\lg|y|) = (\lg(-x) + \lg y)\cdot\lg(-x)$

Т.к. $\begin{cases} y>0 \\ x<0 \end{cases} \Rightarrow \lg y(4\lg(-x) - 2\lg y) = (\lg(-x)+\lg y)\cdot\lg(-x)$

Пусть $a = \lg y$; $b = \lg(-x)$. Значит: $a(4b-2a) = (a+b)\cdot b$

$4ab - 2a^2 = ab + b^2$; $b^2 + 2a^2 - 2ab - ab = 0$; $b(b-a) - 2a(b-a) = 0$

$(b-2a)(b-a) = 0 \Rightarrow b = 2a$ или $b = a$

$\lg(-x) = 2\lg y$ $\qquad$ $\lg(-x) = \lg y$

$\underline{-x = y^2}$ $\qquad$ $\underline{-x = y}$

Из (2): При $\underline{-x = y^2}$: $2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$

$-y^4 + y^3 + 6y^2 - 8y = 0$

$y = 0$ – или $-y^3 + y^2 + 6y - 8 = 0$

– не удовл. О.Д.З.

При $y = 2$: $-8 + 4 + 12 - 8 = 0$ – верно

Схема Горнера:

	-1	1	6	-8
2	-1	-1	4	0

$-y^2 - y + 4 = 0$; $D = 1 + 16 = 17$

$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{-2}$

Т.к. $y > 0$, то $y = \frac{1+\sqrt{17}}{-2}$ – не подход.

Получаем: ~~$(x = 0; y = 0)$~~; $(x = -4; y = 2)$; $\left(x = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2; y = \frac{1-\sqrt{17}}{-2}\right)$

При $y = -x$: $2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$; $2x^2 + 4x = 0$

$x = 0$ – или $\underline{x = -2} \Rightarrow$

– не удовл. О.Д.З. $\qquad$ $\underline{\Rightarrow y = 2}$

Получим пары: $\underline{(-4; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-8}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{2}\right); (-2; 2).}$

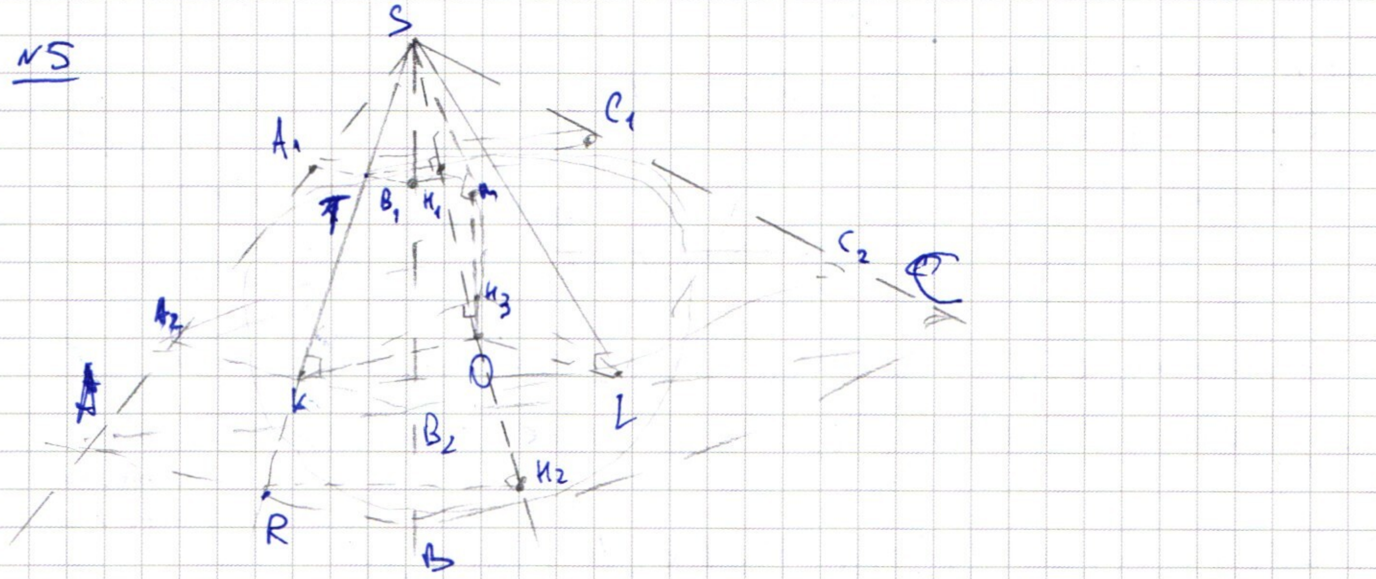
☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1) Пусть плоскости сечений, касающ. сферы и перпенд. SO — (ABC) и $(A_1B_1C_1)$. ~~Тогда, т.к. они кас. сферы~~ Пусть $SO \cap (A_1B_1C_1) = H_1$, $SO \cap (ABC) = H_2 \Rightarrow$ т.к. $SO \perp$ этим плоск. $\Rightarrow SH_1 \perp (A_1B_1C_1)$; $SH_2 \perp (ABC)$. Но эти плоскости также касаются сферы; H_1 и $H_2 \in SO \Rightarrow OH_1 \perp (A_1B_1C_1)$; $OH_2 \perp (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow S, H_1, O, H_2$ — лежат на одной прямой

2) Тогда, т.к. 3 плоскости перпенд. прямой $SO \Rightarrow$ они парал.; $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ — составляют тетраэдры с подобными основаниями $\Rightarrow \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. Пусть $SK \cap (A_1B_1C_1) = T$ и $SK \cap (ABC) = R$; т.к. $\left.\begin{matrix} SH_1 \perp (A_1B_1C_1) \\ TH_1 \subset (A_1B_1C_1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SH_1 \perp TH_1$,

$\left.\begin{matrix} SH_2 \perp (ABC) \\ RH_2 \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow SH_2 \perp H_2R$. Т.к. $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$; ~~$H_1T$ и H_2R соответственные элементы этих треуг.~~ $\cancel{\Rightarrow \frac{H_1T}{H_2R} = k}$; т.к. $k^2 = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$. $\triangle STH_1 \sim \triangle SRH_2$: $\angle SH_1T = \angle SH_2R = 90^\circ$
$\angle RSH_2$ — общ.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда, $\frac{SH_1}{SH_2} = k$. $OH_2 = OH_1 = R$ (т.к. H_1, H_2 – точк. касан.)

$$\frac{SH_1}{OH_2 + OH_1 + SH_1} = \frac{2}{3}; \quad \frac{SH_1}{2R + SH_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow 4R + 2SH_1 = 3SH_1$$
$$SH_1 = 4R$$

3) K – точк. касан. (SAB) и сферы $SK \subset (ABC)$ $\Rightarrow SK \perp OK$. В $\triangle SKO$ – прям.: $KO = R$
$SO = SH_1 + \cancel{H_1}O =$
$= 5R$

Тогда, $\sin\angle OSK = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle OSK = \arcsin\frac{1}{5}$

4) Аналогично, $OL \perp SL$ и $OM \perp SM$. $\triangle SKO = \triangle OSL = \triangle OSM$ – прямоуг. а) SO – общ. б) $KO = OL = OM = R$. Тогда, $SK = SL = SM$ (как соотв. эл. равн. треуг.)

Проведём $OH_3 \perp (KLM)$. Тогда, $OH_3 \perp KH_3, MH_3, LH_3$ ($KH_3, MH_3, LH_3 \subset (KLM)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle OH_3K = \triangle OH_3L = \triangle OH_3M$ – прям.: а) $KO = OL = OM = R$
б) OH_3 – общ. $\Big\} \Rightarrow KH_3 = MH_3 = LH_3$ (–//–)

Значит, H_3 – центр опис. окр. вокруг $\triangle KML \Rightarrow H_3 \subset SO$. Но т.к. $OH_3 \perp (KLM) \Rightarrow$

$\Rightarrow SO \perp (KLM) \Rightarrow$ сечение трёхгран. угла плоскостью (KLM) – парал. (ABC) и $(A_1B_1C_1) \Rightarrow$ ~~...~~ $\triangle A_2B_2C_2$ – искомое сечение.

Из $\triangle SKO$ – прям.: ~~$\cos\angle KOS = \sin\angle KSO = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\angle KOS = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} =$~~

~~$= \frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{2}{5}\sqrt{6}$~~ $\Rightarrow \cos\angle KOS = \sin\angle KSO = \frac{1}{5}$. В $\triangle KH_3O$ – прям.:

$H_3O = \cos\angle KOS \cdot KO = \frac{1}{5}R$

5) $\triangle SKH_3 \sim \triangle STH_1$: а) $\angle TH_1S = \angle KH_3S = 90°$
б) $\angle KSH_3$ – общ. $\Big\} \Rightarrow k = \frac{SH_1}{SH_3} =$

$= \frac{4R}{5R - 0,2R} = \frac{4R}{\frac{24R}{5}} = \frac{5}{6}$. Тогда, т.к. TH_1 и KH_3 – соотв. элементы $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ (т.к. $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$ – подобны, т.к. явл. параллельн. сечениями трёхгранного угла) $\Rightarrow \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{A_1B_1C_1}} = \left(\frac{6}{5}\right)^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{A_2B_2C_2} = \frac{36}{25} \cdot 4 = \frac{504}{100} = 5{,}04$

Ответ: $\arcsin \frac{1}{5}$; $5{,}04$.

№5 $\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \ (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \ (2) \end{cases}$

Ур (1): Рассмотрим $y_1 = x-6$ и $y_2 = -x+6$. Рассмотр. интервалы:

1) $y_1 \le x-6$, $y_2 \ge -x+6$: $x-6-y+x-6+y=12$; $2x=24$; $x=12$

2) $y_1 \ge x-6$, $y_2 < -x+6$: $y+6-x-x+6-y=12$; $x=0$

3) $y_1 < x-6$, $y_2 < -x+6$: $\cancel{x}-6-y-x-y+6=12$; $-2y=12$; $y=-6$

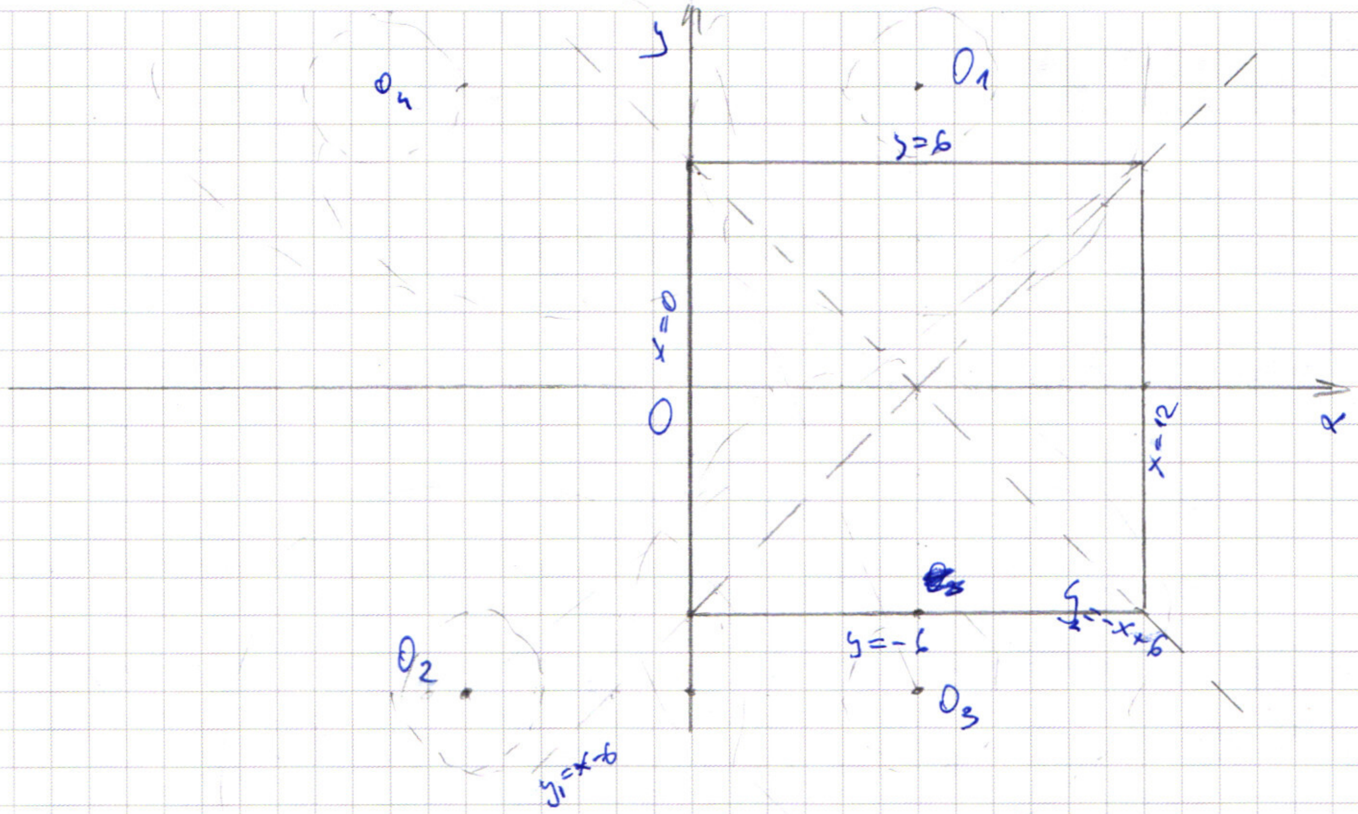
4) $y_1 \ge x-6$, $y_2 \ge -x+6$: $6+y-x+x-6+y=12$; $2y=12$; $y=6$

Ур (2): 1) $x \ge 0$, $y \ge 0$: $(x-6)^2+(y-8)^2=a$ — ур-е окружн., с $O_1(6;8)$ и $R_1=\sqrt{a}$

2) $x<0$, $y<0$: $(x+6)^2+(y+8)^2=a$ — –//– $O_2(-6;-8)$ и $R_2=\sqrt{a}$

3) $x>0$, $y<0$: $(x-6)^2+(y+8)^2=a$ — –//– $O_3(6;-8)$ и $R_3=\sqrt{a}$

4) $x<0$, $y>0$: $(x+6)^2+(y-8)^2=a$ — –//– $O_4(-6;8)$ и $R_4=\sqrt{a}$



Видим, что при $\sqrt{a}=2$ ~~.....~~ окружн. O_3 и O_1 касаются прямых $y=-6$ и $y=6$. При $a\in(0;2)$ – нет решений. ~~При $a\in(2;\ldots)$ – решений больше~~ При дальнейшем увеличении a кол-во точек пересеч. увелич. Затем, Окр. O_1 и O_3 перестанут пересек. с графиком (1) ур-ия из системы. И при дальн. увелич. a, при его некотор. значении Окр. O_2 и O_4 – пересек. гр. (1) в 2 точках – $(12;6)$ и $(12;-6)$. Тогда, $\sqrt{a}=\sqrt{18^2+14^2} \Rightarrow a=520$

Значит, при $a=4$ и при $a=520$ система ур-ий имеет $2^х$ реш.

Ответ: 4; 520.

№7 $\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81}-1)x \quad |\cdot(-1) \end{cases}$ $\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} & (1) \\ -y > -85 - x(3^{81}-1) & (2) \end{cases}$

Забывая пока о $y = 3^x + 4\cdot 3^{81}$, складываем (1) и (2):

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{0 < 3^x + 4\cdot 3^{81} - 85 - (3^{81}x + x)}$

$$0 > 3^x + 4\cdot 3^{81} - 85 - (3^{81}-1)x$$

При $x<0$ – правая часть выражения – всегда полож. → не подходит.
При $x>0$: сначала выражение будет полож. из-за большой константы $4\cdot 3^{81}$. Затем, член $x(3^{81}-x)$ станет больше ост. части выражения, и выражение будет отриц. При дальнейшем росте x, быстро растущая экспонента при некотором x станет ~~такой~~ такой, что $3^x + 4\cdot 3^{81}$ станет больше ост. части выраж. ⇒ выраж. – снова полож. Найдём такие x, что выражение обращ. в 0: $3^x + 4\cdot 3^{81} - 85 - (3^{81}-1)x = 0$

При $x=4$: $0 = 3^4 + 4\cdot 3^{81} - 85 - 4\cdot 3^{81} + 4$; $0=0$ – верно

$x=85$: $0 = 81\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} - 85 - 85\cdot 3^{81} + 85$; $0=0$ – верно.

Тогда, при $x\in(4;85)$ или $x\in[5;84]$, и $x\in\mathbb{Z}$ – система имеет решения $\cancel{(85+\ldots 3^{81} \ldots 3^x)}$ $\left[3^x+4\cdot 3^{81}; 85+(3^{81}-1)x\right)$; $\left[3^x+4\cdot 3^{81}; 84+x(3^{81}-1)\right]$

Складывая все пары, получим:

$$\underbrace{(84+5\cdot 3^{81}-5-3^5-4\cdot 3^{81}) + (84+6\cdot 3^{81}-6-3^6-4\cdot 3^{81}) + \ldots}_{80\ \text{слагаемых}} =$$

Подсчитаем всё отдельно: $\Sigma_1 = 84\cdot 80$, $\Sigma_2 = 4\cdot 3^{81}\cdot 80$

Σ_3: $5\cdot 3^{81} + \ldots + 84\cdot 3^{81} = \frac{5\cdot 3^{81}+84\cdot 3^{81}}{2}\cdot 80 = 89\cdot 3^{81}\cdot 40$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\Sigma_ч = 5+6+\ldots+84 = \frac{5+84}{2}\cdot 80 = 89\cdot 40$$

$$\Sigma_б = 3^5+3^6+\ldots+3^{84} = \frac{3^5(3^{80}-1)}{3-1} = \frac{3^5(3^{80}-1)}{2}$$

Общая сумма: $84\cdot 80 + 89\cdot 40\cdot 3^{81} - 4\cdot 3^{81}\cdot 80 - 89\cdot 40 - \frac{3^5(3^{80}-1)}{2} =$

$$= 6720 + 3560\cdot 3^{81} - 320\cdot 3^{81} - 3560 - \frac{3^{85}-3^5}{2} =$$

$$= 3160 + 3240\cdot 3^{81} - \frac{3^4(3^{81}-3)}{2} = 3160 + \frac{6480\cdot 3^{81} - 3^{85}}{2} + \frac{243}{2} =$$

$$= 3160 + 121{,}5 + \frac{3^4\cdot 80\cdot 3^{81} - 3^{85}}{2} = 3281{,}5 + \frac{79}{2}\cdot 3^{85} =$$

$$= \underline{3281{,}5 + 39{,}5\cdot 3^{85}}$$

№1 $16875 = 5^4\cdot 3^3$. На 8-ми позициях .... возможны числа: „5", „3", „1", „9". Есть 2 варианта: если нет „9", то комбинируем 4 „5", 3 „3" и одну „1".

Вариантов: $C_8^4\cdot C_4^3\cdot C_1^1 = \frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{1!}{0!\cdot 1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 4\cdot 1 =$

$= 280$.

Иначе: 4 „5", 1 „3", 1 „9", 2 „1"; Вариантов:

$$C_8^4\cdot C_4^1\cdot C_3^1\cdot C_2^2 = \frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot 1!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot\frac{2!}{0!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot 4\cdot 3\cdot 1 =$$

$= 840$

Тогда всего вариантов $840+280=1120$

Ответ: 1120.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

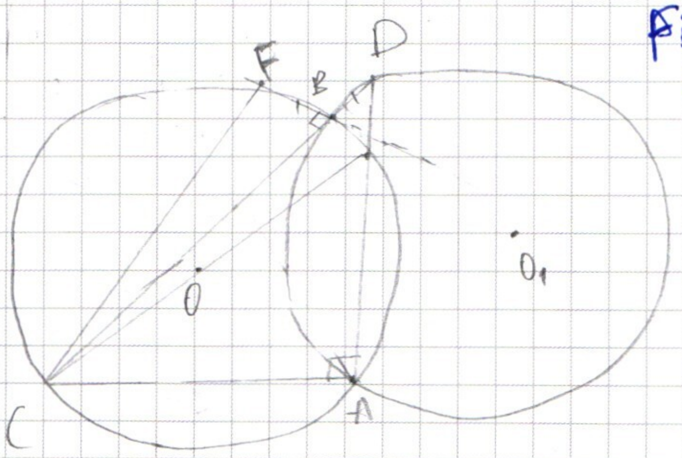
$R=13$

$\angle CAP=90^\circ$

$FB \perp CD$

$BF=BD$

$CF-?$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b=a$

$\lg(-x)=\lg y$

$-x=y$

$243/2=121,5$

$b=2a$

$\lg(-x)=2\cdot\lg y$

$-x=y^2$

6480

4

$a_1=80$, $a_n=-1$, $n=80$ $\Rightarrow$ $\cancel{\Sigma_1=\frac{160-79}{2}\cdot 80}$

$3\cdot 216=3^2\cdot 72=$
$=3^3\cdot 24=3^4\cdot 8$

$\Sigma_1=\frac{80+1}{2}\cdot 80=81\cdot 4=324$

$a_1=5\cdot 3^{81}$, $a_n=84\cdot 3^{81}$ $\Rightarrow$ $\Sigma_2=\frac{5\cdot 3^{81}+84\cdot 3^{81}}{2}\cdot 80=89\cdot 3^{81}\cdot 40$

$\cancel{a_1=4\cdot 3^{81}}$
$\cancel{a_n=}$

$\Sigma_3=80\cdot 4\cdot 3^{81}$

$$\begin{array}{r} 6720\\ -\,3560\\ \hline 3160\end{array}$$

$\Sigma_4=\frac{b_1(q^4-1)}{q-1}=\frac{3^5(3^{80}-1)}{2}$

$81/2$

40,5

$b_1=3^5$

$b_n=3^{84}$

$q=3$

Тогда,

$$\begin{array}{r} 3560\\ -\,320\\ \hline 3240\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 84\\ \times\,80\\ \hline 6720\end{array}\qquad \begin{array}{r} 89\\ \times\,40\\ \hline 3560\end{array}$$

$\frac{3^4(3^{81}-3)}{2}=$

$=\frac{81}{2}(3^{81}-3)$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№1 $y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$y < 85 + (3^{81} - 1)x \quad = 85 + 2(3^{80} - \ldots + 1)\,x \quad 1\cdot(-1)$

$3^x + 4\cdot 3^{81} = 85 + 3^{81}\cdot x - x$

$y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$-y > -85 - (3^{81} - 1)x$

$x<0$ — не интерес.

$0 > 3^x + 4\cdot 3^{81} - 85 - (3^{81} - 1)x$

При $x=4$: $0 > 3^4 + \cancel{4\cdot 3^{81}} - 85 - \cancel{4\cdot 3^{81}} + 4$

$0 > 81 + 4 - 85$

$0 > 0$

При $x=81$: $0 > 3^{81} + 4\cdot 3^{81} - 85 - 81\cdot 3^{81} + 81$

$x=85$: $0 > 81\cdot 3^{81} + 4\cdot 3^{81} - 85 - 85\cdot 3^{81} + 85$

$0 > 0$

При $x\in(4;85)$: выраж. — меньше 0.

$[5;84]$

$n=80$

$\begin{cases} y \geq 3^4 + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + 4\cdot 3^{81} - 4 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y \geq 81 + 4\cdot 3^{81} \\ y < 81 + 4\cdot 3^{81} \end{cases}$ — нет y

$\begin{cases} y \geq 3^5 + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + 5\cdot 3^{81} - 5 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} y \geq 3^5 + 4\cdot 3^{81} \\ y < 80 + 5\cdot 3^{81} \end{cases}$

$85 + 3^{81}x - x - 3^x - 4\cdot 3^{81}$

$(85 - x) + (3^{81}\cdot x - 4\cdot 3^{81} - 3^x)$

Сумма чисел от 80 до 1

Сумма 80 чисел $3^{81}\cdot x$

Вычесть 80 чисел $4\cdot 3^{81}$

Вычесть 80 чисел 3^x

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$

О.Д.З.: $y > 0$

$-xy > 0 \Rightarrow \underline{x < 0}$

$\frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{8-\sqrt{17}}{2}$

$\lg(y) \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$

$\lg(y) \cdot (4\lg x - 2\lg y) = (\lg(-x) + \lg(y)) \cdot \lg(-x)$

$\cancel{t = xy}$

$t = -y^2$

$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0$

$D = (x+8)^2 + 8(x^2+4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x =$

$= 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$

$y_1 = \frac{x+8+|3x+8|}{4}$; $y_2 = \frac{x+8-|3x+8|}{4}$

$3x+8>0$

$x > -\frac{8}{3}$

$y_1 = \frac{4x+16}{4} = x+4$

$y_2 = \frac{-2x}{4} = -0.5x$

$\cancel{y(1): \left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x\cdot(x+4))}}$

$-8+4+12-8=$

Пролог. (1): $\lg y \cdot \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$

$\lg y = a$

$\lg(-x) = b$

$\lg y \cdot (4\lg|x| - 2\lg|y|) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$

$\lg y \cdot (4\lg(-x) - 2\lg y) = (\lg(-x) + \lg y) \cdot \lg(-x)$

$a \cdot 4b - a \cdot 2a = b \cdot b + a \cdot b$

$-1+1+6-8$

$4ab - 2a^2 = b^2 + ab$; $b^2 + 2a^2 - 3ab = 0$

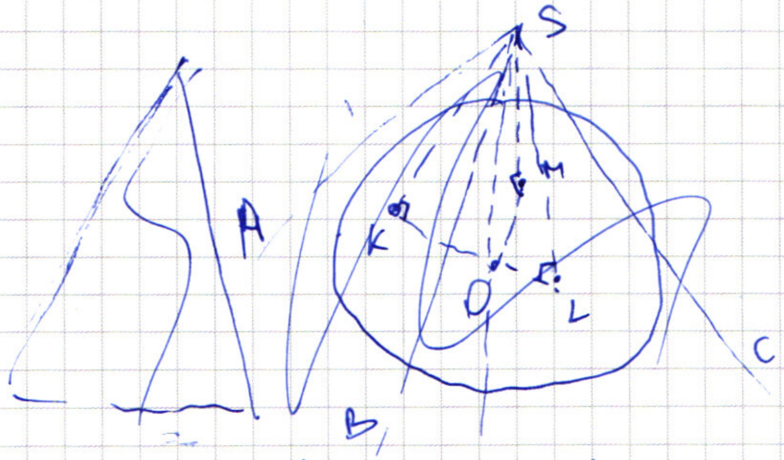
$b^2 + 2a^2 - 2ab - ab = 0$; $b(b-a) - 2a(b-a) = 0$

$(b-a)(b-2a) = 0$

$-1-1+6+8$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & \text{— 2 g рет.} \\ (|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a & \text{— окружн. с разн. центр.} \end{cases}$$

~~$x-6-y \geq 0$ $x-6+y\geq 0$~~
~~$y \geq 6-x$ $y \geq 6-x$ => либо (1)~~

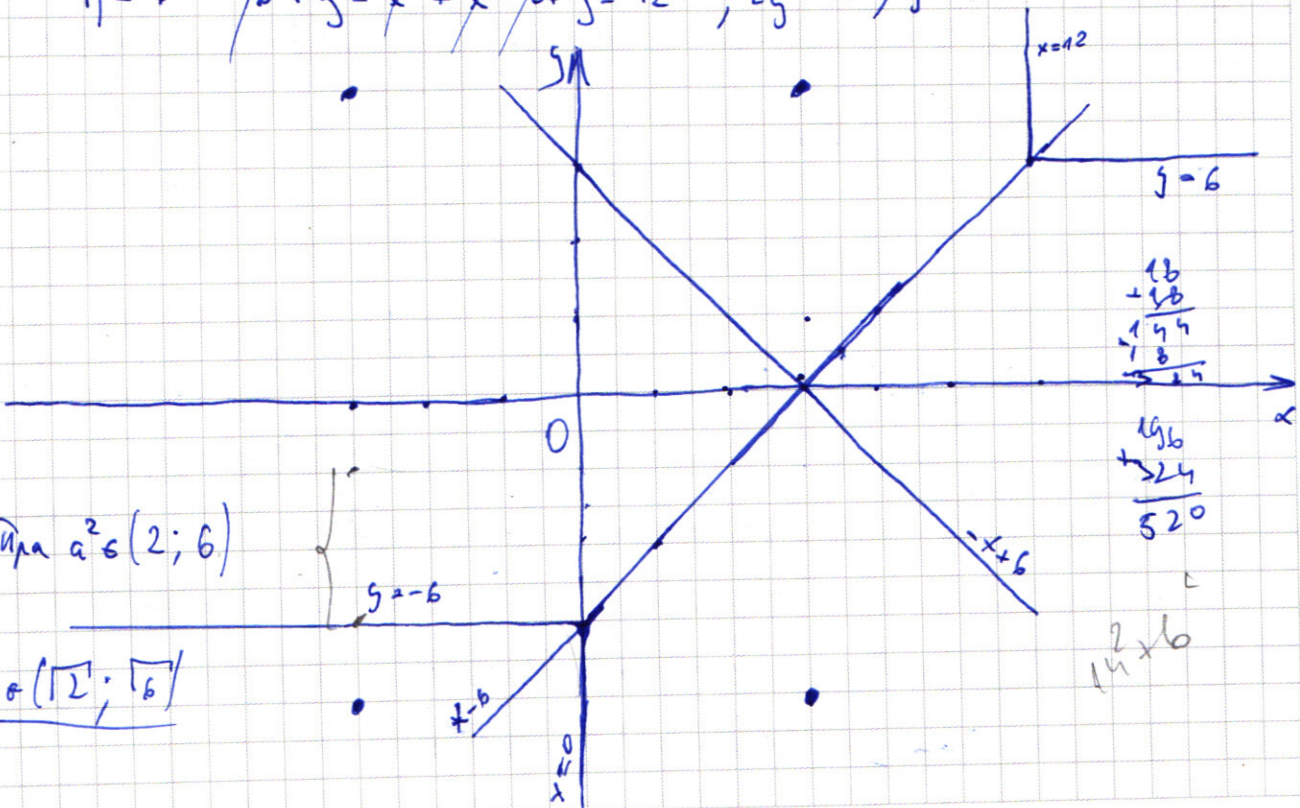
$x-6-y \,?\, 0$ $y \,?\, x-6$
$x-6+y \,?\, 0$ $y \,?\, -x+6$

Разбивая: (1) $+\,+$ $x-6-\cancel{y}+x-6+\cancel{y}=12$
$2x=24 \Rightarrow x=12$

2) $-\,-$: $\cancel{y}+6-x-x+6-\cancel{y}=12$
$-2x=0 \Rightarrow x=0$

3) $+\,-$ $\cancel{x}-6-y-\cancel{x}+6-y=12$; $-2y=12$; $y=-6$

4) $-\,+$ $\cancel{6}+y-\cancel{x}+\cancel{x}-\cancel{6}+y=12$; $2y=12$; $y=6$



$18 \cdot 18 = 144$, $18 \cdot 18 = 324$

$196 + 324 = 520$

$14^2 + 6$

При $a^2 \in (2; 6)$

$a \in (\sqrt{2}; \sqrt{6})$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 . . . .

$16875 = 5\cdot 3375 = 5\cdot 3\cdot 1125 =$

$= 5\cdot 5\cdot 3\cdot 225 =$

$= 5\cdot 5\cdot 3\cdot \cancel{5\cdot 5}\ 3$

$= 5\cdot 5\cdot 3\cdot 5^2\cdot 3^2 = 5^4\cdot 3^3$

Возм.: 5; 3; 9; 1;

По любому: четыре „5". либо „3", „3" и „1"; либо „9" и „3" + „1", „1"

Без „9": $\cancel{(C_8^4 + C_4^3)\cdot 10}$ $\frac{10\cdot C_7^4}{4}$

С „9": $\cancel{10\cdot 9\cdot 8}$

4 : 5
3 : 3
1 : 1

$C_8^4 \cdot C_4^3 \cdot C_1^1$

$\frac{26}{24} = \frac{13}{12}$

№2 $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cdot \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$2\cos 10x \cdot \sin 4x - \sqrt{2}\cdot\cos 10x = 2\cos 10x\cdot \cos 4x$

$\frac{10\pi}{24} = \frac{5\pi}{12}$

$\cos 10x = 0$ или $\sqrt{2}\sin 4x - 1 = \sqrt{2}\cdot\cos 4x$

$10x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

$\sqrt{2}(\sin 4x - \cos 4x) = 1$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{10},\ n\in\mathbb{Z}$

$2\left(\sin 4x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos 4x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$

$\begin{array}{r}280\\ \times\ 3\\ \hline 840\end{array}$

$\sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

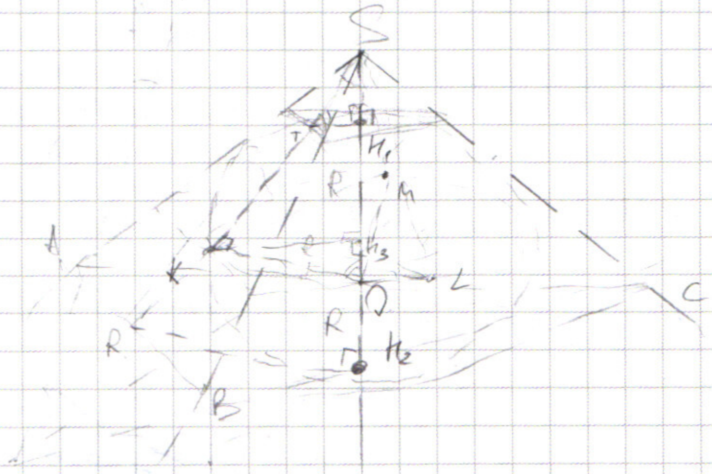
$\left[\begin{array}{l} 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ 4x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4x = \frac{10\pi}{24} + 2\pi n \\ 4x = \frac{26\pi}{24} + 2\pi n \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{10}{24\cdot 4} + \frac{2\pi n}{4} \\ x = \frac{26}{24\cdot 4}\pi + \frac{2\pi n}{4} \end{array}\right.$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№5



$k=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

$\frac{TH_1}{RH_1}=k$

$\frac{TH_1}{KO}$; $\frac{KO}{RH_2}$ } =>

$\frac{KO}{KS}$ – ?

1) Проведём $OH_3 \perp (KLM)$. $\triangle KOH_3 = \ldots = \triangle MOH_3$ =>

=> H_3 – центр опис. $H_3 \in SO$ => $(KLM) \perp SO$ =>

=> её сеч. и других.

$\triangle KH_3S = \ldots = \triangle LH_3S$ (по 3 стор.) => $H_3 \in SO$

$\frac{SH_1}{SH_2}=k=\frac{SH_1}{2R+SH_1}=\frac{2}{3}$

$3SH_1=4R+2SH_1$

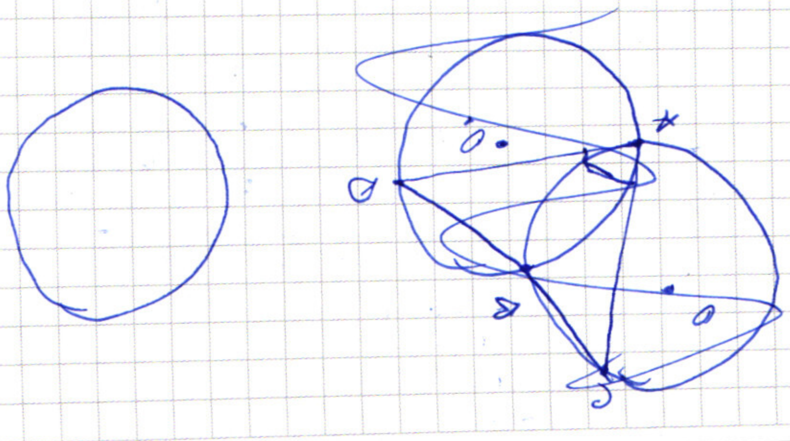
$SH_1=4R$

Тогда, $\sin\angle KSO=\frac{KO}{SO}=$

$=\frac{R}{R+4R}=\frac{1}{5}$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 14 \\ \hline 144 \\ +36 \\ \hline 504 \end{array}$$

25



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)