

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

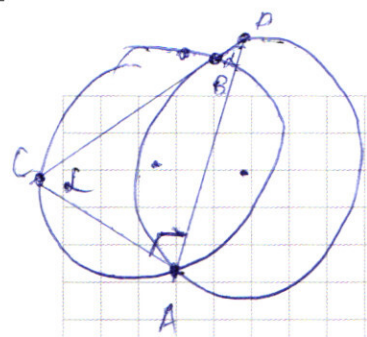
$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

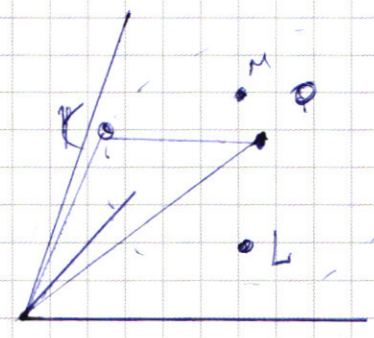
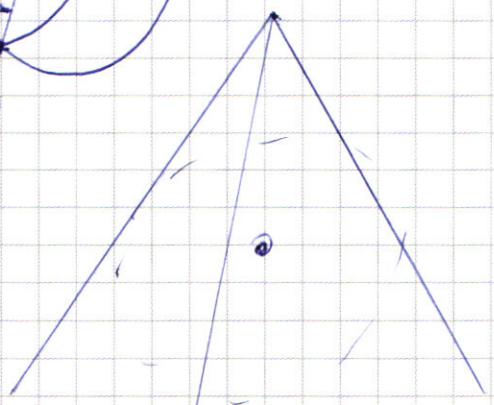
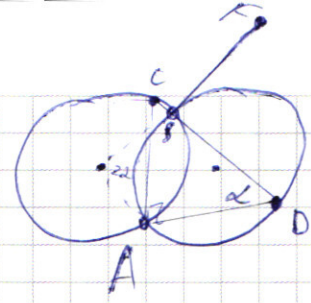
6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

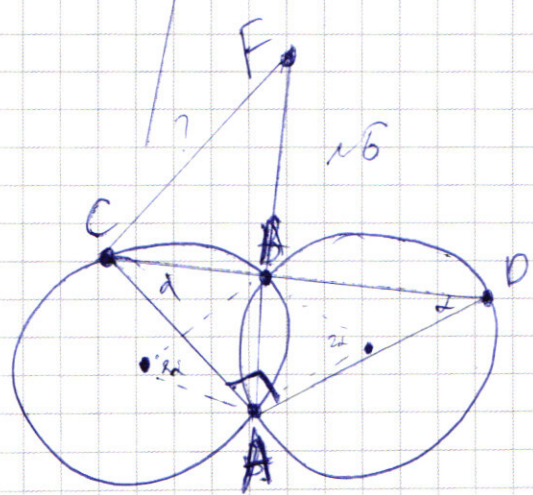
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



24



S



$BC = BD$
 $CF = \sqrt{2} BC$
 $\alpha = 45^\circ$

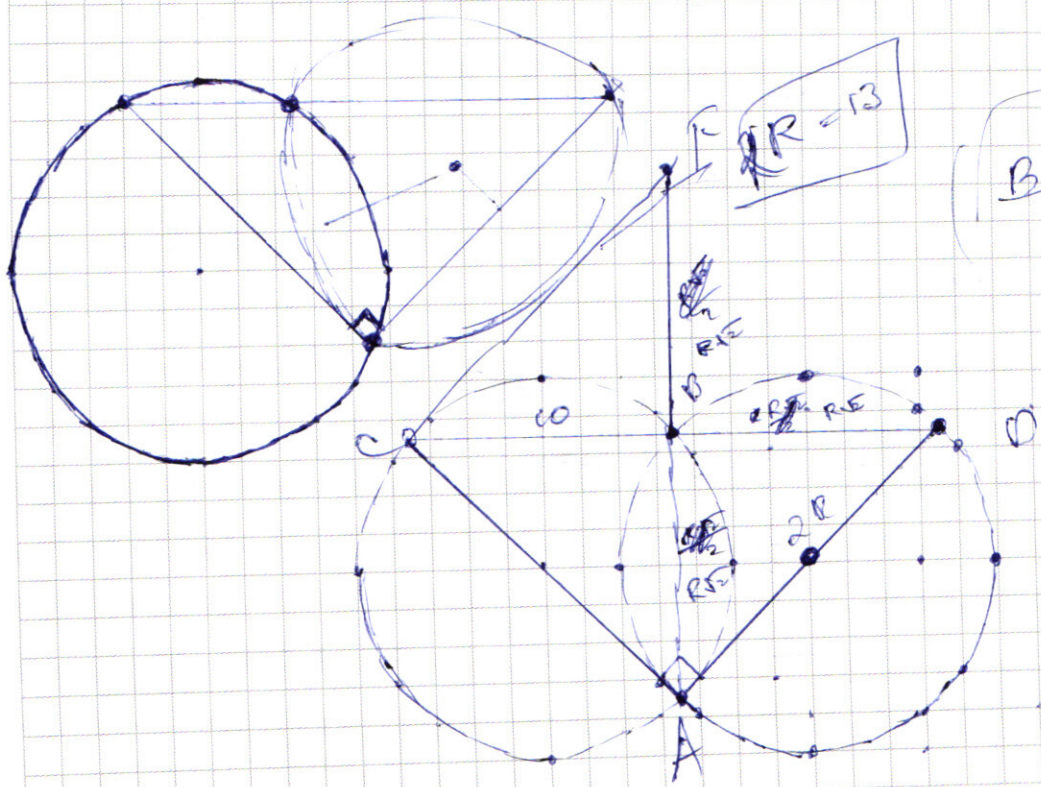
$AB = 2R \sin \alpha$
 $AB = AD \cdot \sin \alpha$

$AC \leq 2R$

$AD = 2R$ (т.е. диаметр)

$BC = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} R$

$\sqrt{13\sqrt{2}}$



$\frac{13\sqrt{2}}{2} = \frac{1,91}{6,50}$
 $70,5^\circ$
 $184,6$
 $1,91 \cdot 6,50 = 12,415$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 84$

$$\begin{cases} y \geq 3^{84} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + 84 \cdot 3^{81} - 84 \end{cases}$$

$y \geq 31 \cdot 3^{81}$
 $y < 1 + 84 \cdot 3^{81} = 1 + 84 \cdot 3^{81}$ — есть число
 $y = 1 + 3 \cdot 3^{81} + 3^{82}$

$y \geq 3^x - 4 + 4(3^{x-1}) \rightarrow y' = 3^x \cdot \ln 3$
 $y < 85 + (3^x - 1)x \rightarrow y' = 3^{x-1} - 1$
 $3^x + 4 \cdot 3^{x-1} = 85 + (3^{x-1} - 1)x$
 $x = 4$
 $x = 81: 3 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 81$
 $5 \cdot 3^{81} = 9 + 81 \cdot 3^{81}$

$x = 85$
 $\begin{cases} y \geq 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 - 85 + 85 \cdot 3^{81} \end{cases}$
 $y \geq 85 \cdot 3^{81}$
 $y < 85 \cdot 3^{81}$

1) $x = 5$ — не в пр.
2) $x = 6$
3) $x = 7$
80) $x = 84$

$x = 5$
 $\begin{cases} y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81} \rightarrow y \geq 3^5 \\ y < 85 + 5 \cdot 3^{81} - 5 \end{cases}$
 $y \geq 243 + 4 \cdot 3^{81}$
 $y < 80 + 5 \cdot 3^{81}$ — есть y .

$3^{81} + 163$
 $2 \cdot 3^{81} + 3^6 + 85 - 6$

$x = 88$
 $13 \cdot 3^{81} = 2 +$
 $x = 85$
 $(3^4 + 4) \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81}$
 $x = 85$

$$\alpha = 90^\circ - \gamma; \beta = 90^\circ - \gamma$$

$$\cos X - \cos Y = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$\beta = 0^\circ$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(15^\circ)$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos(15^\circ)$$

$$\alpha = 90^\circ - X$$

$$\beta = 90^\circ - Y$$

2 Answer:

$$X = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5};$$

$$X = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2};$$

$$X = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}$$

$$\cos X + \cos Y = 2 \sin\left(90^\circ - \frac{X+Y}{2}\right) \cos\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

$$\cos X + \cos Y = 2 \cos\left(\frac{X+Y}{2}\right) \cos\left(\frac{X-Y}{2}\right)$$

$$\cos 7X + \cos 3X = 2 \cos 5X \cos X$$

$$\sin 2X + \sin 3X = 2 \sin 5X \cos X$$

$$2 \cos 5X \cos X - \sqrt{2} \cos 10X - 2 \sin 5X \cos X = 0$$

$$2 \cos X (\cos 5X - \sin 5X) - \sqrt{2} (\cos 5X - \sin 5X) (\cos 5X + \sin 5X) = 0$$

$$(\cos 5X - \sin 5X) (2 \cos X - \sqrt{2} (\cos 5X + \sin 5X)) = 0$$

$$\cos 5X = 1$$

$$5X = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$X = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$$

2)

$$2 \cos X - \sqrt{2} (\cos 5X + \sin 5X) = 0$$

$$2 \cos X - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5X\right) = 0$$

$$\cos X - \cos\left(5X - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{4X - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{6X - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(2X - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\sin\left(3X - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16P75 = 5.3375$$

$$= 5 \cdot 5 \cdot (600 + 60 + 15) =$$
$$= 5 \cdot 5 \cdot 675 = 5^3 \cdot 135 = 5^4 \cdot 27 =$$
$$= 5^4 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 3275} \\ \underline{-15} \\ 18 \\ \underline{-15} \\ 37 \\ \underline{-35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 1135} \\ \underline{5} \\ 12 \\ \underline{10} \\ 23 \end{array}$$

Q - de monet.

	a	b	c	d	e	f	h	g
5	5	5	5	5	3	3	3	1

1) 1335555

2) 1 33585558

$$\begin{aligned} & \rightarrow \frac{8!}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 40 \cdot 7 = 280 \\ & \quad \text{✓ 1000000 280} \end{aligned}$$

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} =$$

$$20.42 = \underline{\underline{840}}$$

$$84 + 20 =$$

$$110 + 2 = 112$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

6723

6980+243i

$$\chi = 30^\circ$$

$\odot$
 $|$
 N/K
 $|$
 N
 $|$
 $\cdot$
 $|$
 N/K
 $|$
 $\cdot$
 $|$
 N/K
 $|$
 N/K

680-81 = 6719

13335555
 $(36 + 28 + 9 + 84)$

$$10^9 \cdot 3^{81} + 3^5 + 3^6 + 3^7 + \dots + 3^{84} + 80.85 - (5 + 6 + 7 + 8 + \dots + 84)$$

$$|x - \cancel{6} (y+6)| + |x + (y-6)| = 12$$

2 реи

$$|y - (x-6)| + |y + (x-6)| = 12$$

Квадрат,
с центром в
Т. (0; 0) и
сторона 12

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

1) I ч $(x-6)^2 + (y-8)^2 = a \rightarrow \text{окр } (6; 8); R = \sqrt{a}$

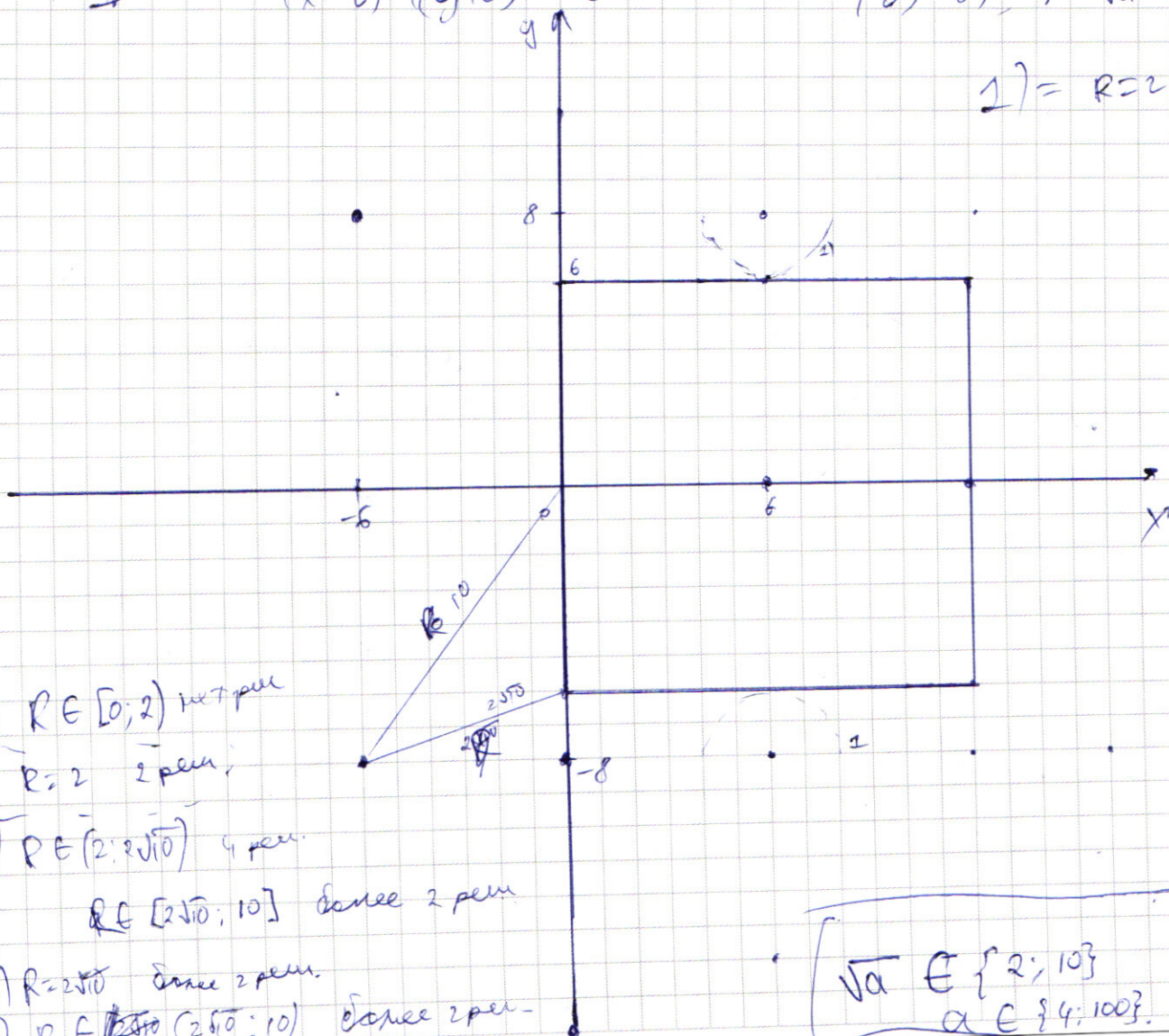
2) II ч $(x+6)^2 + (y-8)^2 = a \rightarrow \text{окр } (-6; 8); R = \sqrt{a}$

3) III ч $(x+6)^2 + (y+8)^2 = a \rightarrow \text{окр } (-6; -8); R = \sqrt{a}$

4) IV ч $(x-6)^2 + (y+8)^2 = a \rightarrow \text{окр } (6; -8); R = \sqrt{a}$

0

$$1) = R = 2 (a=4)$$



1) $R \in [0; 2)$ нет реи

2) $R = 2$ 2 реи

3) $R \in (2; 2\sqrt{10})$ 4 реи

$R \in [2\sqrt{10}; 10]$ более 2 реи

4) $R = 2\sqrt{10}$ более 2 реи

5) $R \in (2\sqrt{10}; 10)$ более 2 реи

6) $R = 10$ 2 реи

7) $R > 10$ нет реи

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\sqrt{a} \in \{2; 10\}$$

$$a \in \{4; 100\}$$

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(\lg(4-y) - \lg(y))(\lg(4-y) - 2\lg y) = 0$$

$$\lg(4-y) = \lg y \rightarrow y = 2$$

$$\lg(4-y) = \lg y^2 \rightarrow 4-y = y^2 \rightarrow y^2 + y - 4 = 0$$

$$4^{\lg 2} = 2^{\lg(4)}$$

$$D = 17$$

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ — не } y_1$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow \text{не } y_1, \text{ т.к. } x < 0$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \end{cases}$$

N3 Problem:

$$x \lg y = 2$$

$$\lg y = \frac{2}{x}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

M7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} \\ y < 85 + (3^{x-1} - 1)x \end{cases} \rightarrow$$

$$85 + (3^{x-1} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$x < 0 \text{ — нет.}$$

$$x = 0 \text{ — нет.}$$

$$x = 1 \text{ — нет.}$$

$$x = 2 \text{ — нет.}$$

$$x > 4$$

$$y < 85 + 4 \cdot 3^{x-1} - 4$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{x-1} \leq y < 81 + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$\lg y = t$$

$$t(4\lg 2 + 2t) = (\lg 2 + 2t)(\lg 2 + t)$$

$$t - 4\lg 2 - 2t^2 = \lg^2 2 + 3t \cdot \lg 2 + 2t^2$$

$$1t = \lg 2 + 3t$$

$$t = \lg 2$$

$$2t = -\lg 2$$

$$t = -\frac{\lg 2}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\lg y = \lg 2$$

Проверка:

$$\lg y = -\frac{\lg 2}{2}$$

$$\lg(y) = \lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\sqrt{y} = 2$$

$$x = -4$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = (\sqrt{2})^{\lg(2)}$$

$$= \sqrt{2}$$

Проверка:

$$\sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{256}{4}\right)^{\lg 2} = 4^{\lg 8}$$

$$64^{\lg 2} = 64^{\lg 8}$$

- верно

$$\boxed{\begin{matrix} x = -4 \\ y = 2 \end{matrix}}$$

2) $x = y - 4$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \frac{y-4}{(4-y)} (4-y)^{\lg(4-y)}$$

логарифмируем

$$\frac{(4-y)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = \frac{(4-y)}{(4-y)} (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\lg^2(4-y) - 3\lg y \cdot \lg(4-y) + 2\lg^2 y = 0$$

$$\lg^2(4-y) - \lg y \cdot \lg(4-y) - 2\lg y \cdot \lg(4-y) + 2\lg^2 y = 0$$

$$-2\lg^2 y = 0$$

$$\lg(4-y)(\lg(4-y) - \lg y) - 2\lg y(\lg(4-y) - \lg y) = 0$$

$$\lg y \cdot (4\lg(4-y) - 2\lg y) \Rightarrow (\lg y + \lg(4-y)) \cdot \lg(4-y)$$

$$4\lg y \cdot \lg(4-y) - 2\lg^2 y = \lg y \cdot \lg(4-y) + \lg^2(4-y)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-1)^{\lg(-xy)} \Rightarrow x < 0$$

$$y > 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 + xy + 4x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$\textcircled{D} x^2 + x(y+4) + (8y-2y^2) = 0$$

$$D_x = (y+4)^2 - 4(8y-2y^2) = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 =$$

$$= 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-y-4 \pm (3y-4)}{2}$$

$$x_1 = -2y$$

$$x_2 = y - 4$$

1) $x = -2y$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$\lg y \cdot \lg(16y^2) =$$

$$= \lg(2y^2) \cdot \lg(2y)$$

↓

$$\cancel{\lg y / \lg 16}$$

$$\lg y (4 \lg 2 + 2 \lg y) =$$

$$= (\lg 2 + 2 \lg y)(\lg y)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Разобьем число 16875 на простые множители: $16875 = 5 \cdot 3375 = 5^2 \cdot 675 = 5^3 \cdot 135 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$. Значит, цифрами нашего числа могут быть: 1; 3; 5; 9.

Примем сразу ~~это~~ заметим, что среди них точно есть четное 5, так как в разложении присут- ствует 4 пятерки, а $5 \cdot 3^n$, и $5 \cdot 10^n = 5$ будет больше или равно 15, что не является цифрой. Тогда цифра- ми могут быть:

1) 1; 3; 3; 3; 5; 5; 5; 5

2) 1; 1; 3; 9; 5; 5; 5; 5. (т.к. $3^3 > 9$, т.к. 3^3 - не цифра).

Всего вариантов для первого случая:

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8} = 280 \quad (\text{т.к. } 3 \text{ и } 5 \text{ повто-}$$

ряются, а числа
повре могут не
сбаваться)

Для второго случая:

$$\frac{8!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 840 \quad (\text{т.к. } 1 \text{ и } 5 \text{ повто-}$$

ряются).

~~Тогда~~ Тогда всего вариантов (чисел):

$$280 + 840 = 1120.$$

Ответ: 1120.

№ 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

Формулы суммы косинусов и синусов, а также косинус двойного угла:

$$2 \cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 & | : \cos 5x \neq 0 \\ 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0 \end{cases}$$

(по формуле
вспом. угла):

$$\begin{cases} \tan 5x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$$

(по формуле разности
косинусов):

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2}\right) \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4} + 2x}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ \cancel{x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}} \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\log y} = (-x)^{\log(-x)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

Сразу заметим, что по ООЗ:

$$\begin{cases} -x > 0 \\ y > 0 \\ \frac{x}{y^2} > 0 \\ -xy > 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y > 0. \end{cases}$$

, откуда

Выразим из второго уравнения y через x :

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2 + x(y+4) + (8y-2y^2) = 0$$

$$D_x = (y+4)^2 - 4(8y-2y^2) = y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 = 9y^2 - 24y + 16 = (3y-4)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-y-4 \pm (3y-4)}{2}$$

$$\begin{cases} x = -2y & (1) \\ x = 4y-4 & (2) \end{cases}$$

Решим систему для (1):

$$\left(\frac{(-2y)^4}{y^2}\right)^{\lg(y)} = (-(-2y))^{\lg(-(-2y)y)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

Прологарифмируем обе части равенства
($16y^2 > 0$ и $2y > 0$)

$$\lg y \cdot \lg(16y^2) = \lg(2y^2) \cdot \lg(2y)$$

$$\lg y \cdot (4\lg 2 + 2\lg y) = (\lg 2 + 2\lg y)(\lg 2 + \lg y) \quad (y > 0, \text{ т.е. } |y| = y)$$

Пусть $\lg y = t$, тогда:

$$t(4\lg 2 + 2t) = (\lg 2 + 2t)(\lg 2 + t)$$

$$t \cdot 4\lg 2 + 2t^2 = \lg^2 2 + 3t \cdot \lg 2 + 2t^2$$

$$t = \lg 2.$$

Обратная замена:

$$\lg y = \lg 2$$

$$y = 2 > 0$$

Возвращаемся к системе:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Теперь решим систему для (2)

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)y)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Снова проанализируем обе части:

$$\lg y \cdot \lg \left(\frac{(y-4)^2}{y^2} \right) = \lg((4-y)y) \cdot \lg(4-y)$$

Получим $\lg(y-4)^2 = 4 \lg|y-4| = 4 \lg(4-y)$, т.к.

$$4-y = -x > 0.$$

Тогда:

$$\lg y / (4 \lg(y-4) - 2 \lg y) = (\lg(4-y) + \lg y) (\lg(4-y))$$

$$4 \lg y \cdot \lg(y-4) - 2 \lg^2 y = \lg^2(4-y) + \lg y \cdot \lg(4-y)$$

$$\lg^2(4-y) - \lg y \cdot \lg(4-y) - 2 \lg y \cdot \lg(4-y) + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg(4-y) (\lg(4-y) - \lg y) - 2 \lg y (\lg(4-y) - \lg y) = 0$$

$$(\lg(4-y) - 2 \lg y) (\lg(4-y) - \lg y) = 0$$

$$\begin{cases} \lg(4-y) = 2 \lg y \\ \lg(4-y) = \lg y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-y = y^2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow D = 1 - 4 \cdot (-4) = 17; y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{не угодит, так как } y > 0.$$

$$y_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} > 0$$

Тогда есть все системы:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \\ x = y-4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} < 0 \\ y = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \end{cases}$$

и все решения:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 2 \end{cases} \leftarrow \text{точка } (-4; 2)$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \leftarrow \text{точка } (-2; 2)$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{17}-9}{2} \\ y = \frac{\sqrt{17}+1}{2} \end{cases} \leftarrow \text{точка } \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}, \frac{\sqrt{17}+1}{2} \right)$$

~5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

2 реш.

Первое уравнение:

$$|y-x+6| + |y+x-6| = 12$$

$$|y-(x-6)| + |y+(x-6)| = 12$$

— это квадрат со сторонами, параллельными осям, с центром в точке (6; 0) и длиной стороны 12.

Переведем второе уравнение:

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

$\Rightarrow$ при $a < 0$ нет. реш.

1)

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$

— окр-ть с центром (6; 8); $R = \sqrt{a}$

2)

$$\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + (y+8)^2 = a$$

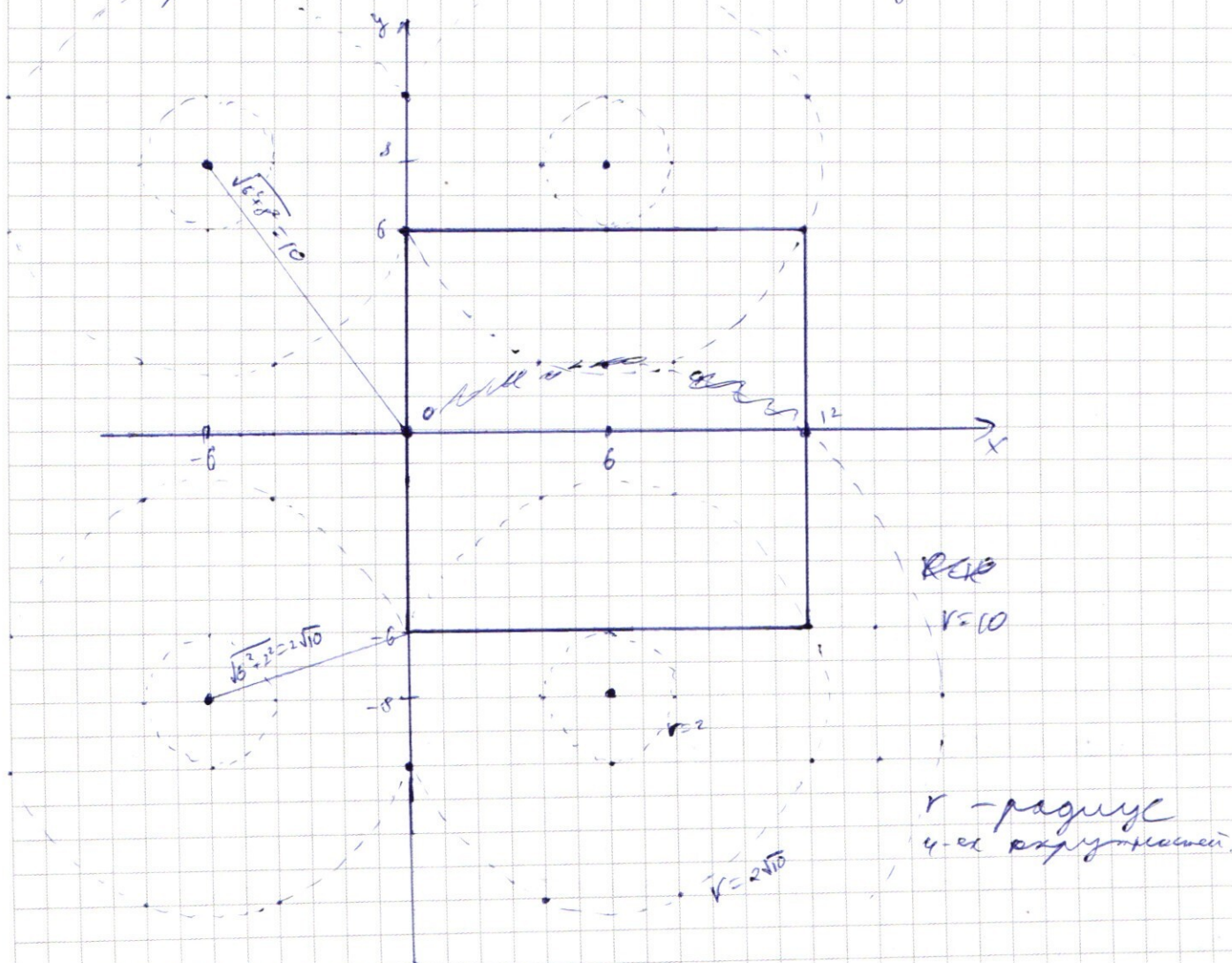
— окр-ть с центром (6; -8); $R = \sqrt{a}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ (x+6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$ — окружность с центром $(-6; 8)$; $R = \sqrt{a}$

4) $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+6)^2 + (y+8)^2 = a \end{cases}$ — окружность с центром $(-6; -8)$; $R = \sqrt{a}$

Построим все в плоскости xOy



Тогда, раздвигая эти окружности, мы можем видеть разное количество решений. Тогда:

1) При $r \in [0; 2)$: нет, реш.

2) При $r = 2$: 2 реш.

3) При $r \in (2; 2\sqrt{10})$: 4 реш.

4) При $r = 2\sqrt{10}$: 4 реш.

5) При $r \in (2\sqrt{10}; 10)$: 4 реш.

6) При $r = 10$: 2 реш.

7) При $r > 10$: нет, реш.

Тогда $\begin{cases} r = 2 \\ r = 10 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{a} = 2 \\ \sqrt{a} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4 \\ a = 100 \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} a = 4 \\ a = 100 \end{cases}$.

17.

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} \\ y < 85 + (3^{x-1} - 1)x \end{cases}$$

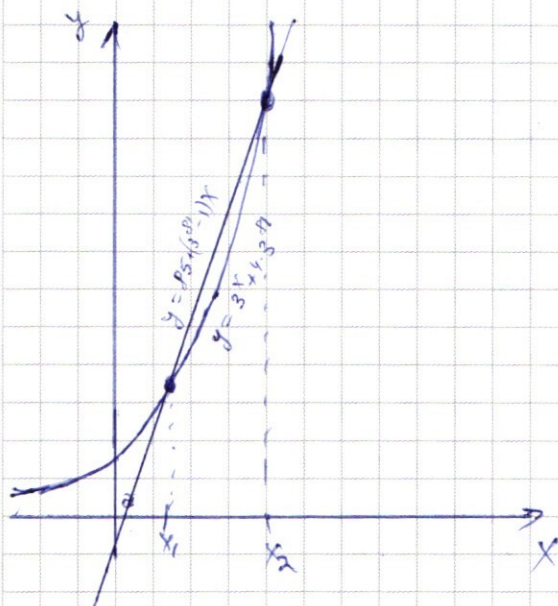
Из системы следует, что:

$$85 + (3^{x-1} - 1)x > y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}, \quad \text{т.е.}$$

$$85 + (3^{x-1} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}.$$

Графически это является несовместимостью, при которой прямая „срезает“ показательную функцию. Схематически примерный эскиз графиков:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Тогда найдем x :

$x_1 < x < x_2$, так как
одно из неравенств
строгое. Найдём x_1 и x_2 :

$$3^x + 4 \cdot 3^{x-1} = 85 + (3^x - 1) \cdot 4$$

Подберём:

$$\begin{cases} x = 4 \\ x = 85 \end{cases}$$

Действительно:

$$x = 4:$$

$$3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 4$$

$$81 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 \quad \text{— верно}$$

$$x = 85:$$

$$3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 85$$

$$3^{81} \cdot 81 + 4 \cdot 3^{81} = 85 - 3^{81} \cdot 85 - 85$$

$$3^{81} \cdot 85 = 3^{81} \cdot 85 \quad \text{— верно}$$

Осталось указать, что при каждом
минимальном и максимальном x будет
 $y \in \mathbb{Z}$.

$$x = 5:$$

$$\begin{cases} y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot 5 \end{cases}$$

$$y \geq 243 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 80 + 5 \cdot 3^{81}$$

Тогда для x :

$$5 \leq x \leq 84 \quad (\text{всего } 80 \text{ значений})$$

Всё y для каждого x будет
разность правых частей неравенств.

$$x = 84:$$

$$\begin{cases} y \geq 3^{84} + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1) \cdot 84 \end{cases}$$

$$y \geq 31 \cdot 3^{81}$$

$$y < 1 + 84 \cdot 3^{81}$$

Получа для каждого x будет значение y :

$$3^{81} \cdot (x-4) + 85 - x - 3^x.$$

Получа всего решений:

$$3^{81} (5+6+7+\dots+80) + 80 \cdot 85 - (8+6+7+8+\dots+84) - (3^5+3^6+3^7+\dots+3^{84}).$$

Посчитаем:

$$3^{81} (5+6+7+\dots+80) = 3^{81} \cdot \frac{5+80}{2} \cdot 80 = 3^{81} \cdot 85 \cdot 40$$

$$(5+6+7+\dots+84) = \frac{5+84}{2} \cdot 80 = 89 \cdot 40$$

$$3^5+3^6+3^7+\dots+3^{84} = \frac{3^5(3^{80}-1)}{3-1} = \frac{3^{85}-3^5}{2}$$

Всего:

$$N = 3^{81} \cdot 85 \cdot 40 + 80 \cdot 85 - 89 \cdot 40 - \frac{3^{85}-3^5}{2} =$$

$$= 3^{81} \cdot 85 \cdot 40 + 40(170-89) - \frac{3^5(3^{80}-3)}{2} = 3^{81} \cdot 3400 +$$

$$+40 \cdot 81 - \frac{81}{2} \cdot 3^{81} + \frac{243}{2} = 3^{81} \cdot \left(3400 - \frac{81}{2}\right) + 3240 + \frac{243}{2} =$$

$$= \frac{3^{81} \cdot 6719}{2} + \frac{6723}{2}$$

Это целое число, деленное на 2, и оно представлено в виде двух слагаемых. Немного еще

~~Ответ:~~ ~~$\frac{3^{81} \cdot 6719}{2} + \frac{6723}{2}$~~ представляется:

$$N = \frac{3^{81} \cdot 6719}{2} + \frac{6723}{2} = \frac{3^{81} \cdot 6719}{2} + \frac{6719}{2} + 2 = \frac{(3^{81}+1) \cdot 6719}{2} + 2.$$

Ответ: $\frac{(3^{81}+1) \cdot 6719}{2} + 2.$

№6

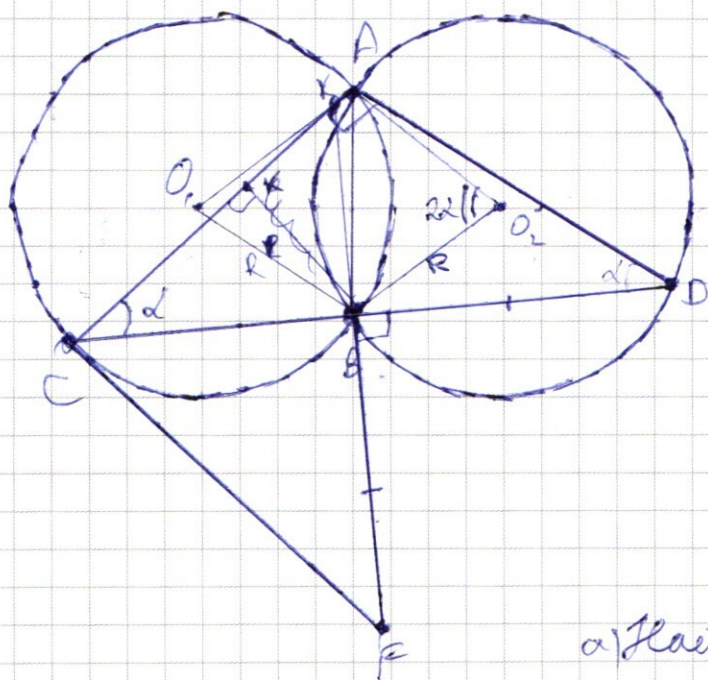
Дано: две окружности:

$$R=13;$$

$$\angle CAO=90^\circ;$$

$$BF=BD; \quad BF \perp CD.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\text{д) } BC = 10$$

а) Найти: CF .

б) Найти: $S_{\triangle ACF}$.

Решение:

Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда:

$\angle AO_1B = 2\alpha$, но в силу симметрии:

$$\angle AO_2B = \angle AO_1B = 2\alpha \Rightarrow \angle ADC = \alpha$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle ADC = \alpha \\ \angle ACD = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD - \text{равнобедр.} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

$\triangle ACO$ - прямоугольный

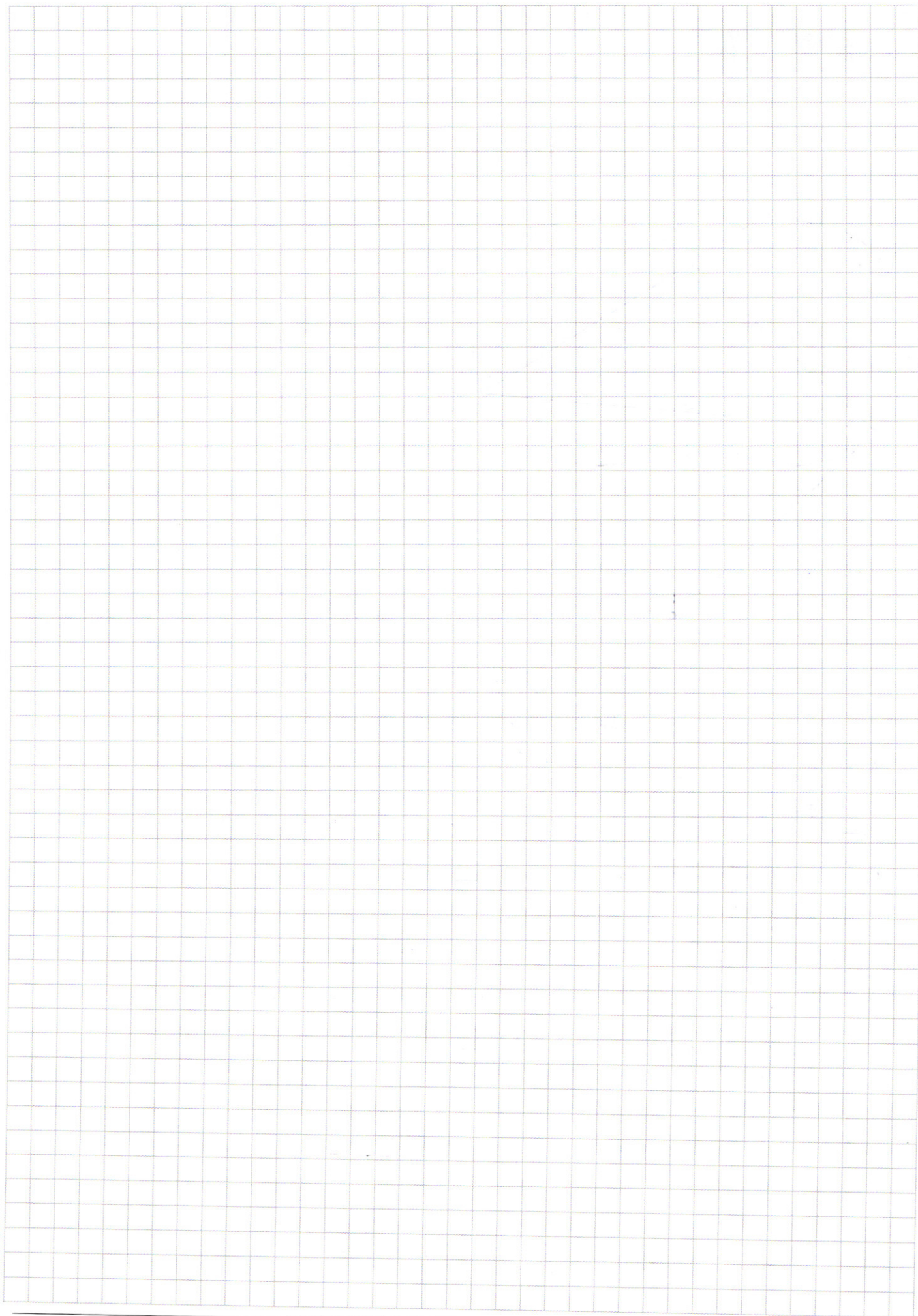
Поэтому проведем $BK \perp CD$

в $\triangle AO_2B$:

$$AB = 2R \sin \alpha, \text{ но в } \triangle CBK: KB = AC \sin \alpha$$

$$\frac{KB}{AB} = \frac{AC}{2R}$$

$$AB = 2R \sin \alpha = 2 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)