

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓1.

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 = 5^4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \Rightarrow$ составим число из этих цифр, т.к. если будут другие произведений не получится; в обоих случаях по 4 на 5⁴ их можно расставить $C_4^8 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$, т.к. из позиций не важен, в 1 случае мы можем поставить 1^ю на 4 позиции, а 3^ю на все оставшиеся $\Rightarrow$ всего в 1 случае $B_1 = C_4^8 \cdot 4 = 70 \cdot 4$; во втором случае 9^ю можем поставить на 4 оставшиеся позиции, т.к. 9^ю займем одну 3^ю на 3, 1^ю на оставшиеся; $B_2 = C_4^8 \cdot 4 \cdot 3 = 70 \cdot 12$;
Всего чисел $B_1 + B_2 = 70 \cdot 4 + 70 \cdot 12 = 70 \cdot 16 = 1120$
Ответ: 1120 чисел

✓2.

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cdot \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \cos 10x = 2 \cdot \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$1) \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} k$$

$$2) \sqrt{2} \cdot \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x = \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sin(5x + \arctan 1)$$

$$\cos 2x = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2\theta} + \frac{2}{\theta}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k; \frac{\pi}{2\theta} + \frac{2}{\theta}\pi k; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{3} \cdot \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } y > 0, x < 0$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad - \text{применим по основанию 10}$$

$$\lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}; \lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y^2}\right) = \lg(-x) \cdot \lg(-xy)$$

$$\lg y \cdot (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-x) (\lg(-x) + \lg y), \text{ где ОДЗ}$$

$$\lg y (4\lg(-x) - 2\lg y) = \lg^2(-x) + \lg(-x) \cdot \lg y$$

$$(1) \lg^2(-x) + 2 \cdot \lg y - 3 \lg(-x) \cdot \lg y = 0;$$

$$\text{или (1) если } \lg(-x) = 0 \Rightarrow -x = 1, x = -1$$

$$\text{тогда в исходном уравнении } \left(\frac{(-1)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = 1^{\lg y}; y^{-2\lg y} = 1^{\lg y}$$

$$1 = 1^{\lg y}, y^{2\lg y} = 1 \Rightarrow y^{2\lg y} = 1, \lg y = 0; \text{ то } y = 1; \text{ тогда во втором уравнении:}$$

$$2 \cdot 1^2 - (-1) \cdot 1 - (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 8 \cdot 1 = 0$$

$$2 + 1 - 1 + 4 - 8 = 0$$

$$-2 = 0 \quad \text{неверно} \Rightarrow x \neq -1; \Rightarrow \lg(-x) \neq 0$$

$$\text{подставим (1) во второе уравнение на } \lg^2(-x)$$

$$2 \cdot \frac{\lg^2 y}{\lg^2(-x)} - 3 \frac{\lg y}{\lg(-x)} + 1 = 0; \quad D = 9 - 8 = 1;$$

$$\frac{\lg y}{\lg(-x)} = \frac{3 \pm 1}{2}; \quad \text{а) } \frac{\lg y}{\lg(-x)} = 1 \Rightarrow \lg y = \lg(-x) \Rightarrow y = -x;$$

тогда во втором уравнении

$$2(-x)^2 - x \cdot (-x) - x^2 - 4x - 8(-x) = 0$$

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0; \quad 2x^2 + 4x = 0; \quad x \neq 0; \quad 2x + 4 = 0; \quad x = -2; \quad y = 2$$

$$\text{б) } \frac{\lg y}{\lg(-x)} = \frac{1}{2}; \quad 2\lg y = \lg(-x); \quad y = \sqrt{-x}; \quad \text{подставим во второе уравнение}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$$2y^2 - (-y^2) - y - (-y)^2 - 4(-y^2) + 8y = 0$$~~

~~$$2y^2 + y^3 - y^4 - 4y^2 - 8y = 0, y \neq 0$$~~

~~$$= y^3 + y^2 - 2y - 2 = 0; \quad y^3 - y^2 + 2y + 2 = 0$$~~

$$2(\sqrt{-x})^2 - x\sqrt{-x} - x^2 - 4x - 8\sqrt{-x} = 0; \quad x \leq 0$$

$$\frac{3}{4} - (\sqrt{-x})^4 - (\sqrt{-x})^3 - 4(\sqrt{-x})^2 - 8\sqrt{-x} = 0$$

$$(\sqrt{-x})^3 + (\sqrt{-x})^2 + 4\sqrt{-x} + 8 = 0, \quad \sqrt{-x} = t$$

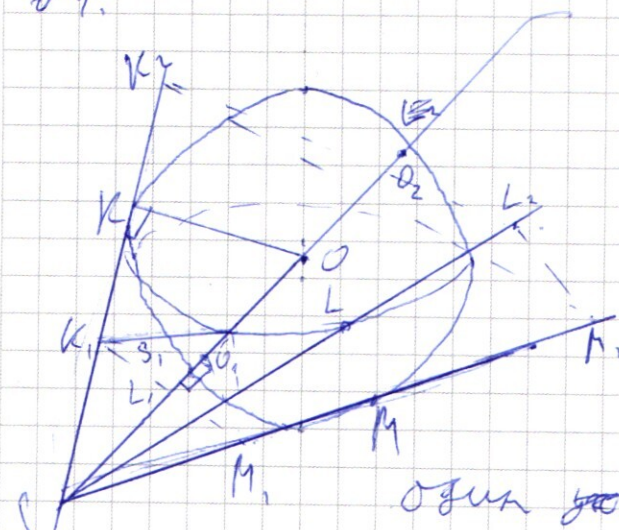
$$t^3 + t^2 + 4t + 8 = 0; \quad (t+2)(t^2 - t + 4) = 0$$

$$t = -2 ; \quad t^2 - t + 4 = 0, \quad D = 1 - 16 < 0 \text{ kein } \text{per}$$

$$\sqrt{-10} = -2 \text{ kein reelles}$$

Außen: $(-2; 2)$

✓ 4.



Demo: $S_{\Delta} K, L, M_1 = 4, S_{\Delta} K, L, M_2 = 5$

 $\triangle K, L, M, \perp SO; \triangle K_2, L_2, M_2, \perp SO$
$$F_{\text{Hain}} \subset K \subset KSO; @ \subset K \subset H.$$

Решение: $O_2 \in K, L, M, N$
а.к. $h_{O_2} = K, L, M, N, 150$

4 $K_2 L_2 M_2 \perp SO$, also $K_1 L_1 \parallel K_2 L_2$

$\Rightarrow K_1 L_1 \parallel K_2 L_2$ u oboju na

of the $\mathbb{Z}_2$ group, and $K_1 M_1 \parallel K_2 M_2$

$$\text{analog} \Rightarrow \partial K_1 M_1 L_1 \cup \partial K_2 M_2 L_2; \mathbb{R} \text{ konvergenz von } K_1 = \frac{K_1 M_1}{K_1 L_1}; K_1^2 = \frac{\partial K_1 L_1 M_1}{\partial K_2 L_2 M_2} \Rightarrow K_1^2 = \frac{4}{9}; K_2 = \frac{2}{3}$$

н.к. приращен погреб $\Rightarrow$ мезопей $\hookrightarrow K_7 M, L_1 \sim \frac{3}{5} K_2 M, L_2,$
 (н.к. приращен на оган зор и оскарден
 погреб) $\Rightarrow SO_1, SO_2$ - чистотна зор и оскарден

$$\frac{SO_1}{SO_2} = K_1; \text{ Пусть } SO_1 = x \Rightarrow SO_2 = \frac{SO_1}{K_1} = \frac{3}{2}x$$

$SO_2 - SO_1$ — расстояние между сферами, пусть R — радиус сфер; $\Rightarrow 2R = SO_2 - SO_1 = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$; $R = \frac{x}{4}$

SK — касание сфер $\Rightarrow SK \perp KO$; $\Rightarrow \triangle SKO$ — прямоугольный $KO = R$; $SO = SO_1 + R = x + \frac{x}{4} = \frac{5}{4}x$; $\sin \angle SKO = \frac{KO}{SO} =$

$$= \frac{\frac{1}{4}x}{\frac{5}{4}x} = \frac{1}{5}; \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right); KS = \sqrt{SO^2 - OK^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{4}x\right)^2 - \left(\frac{1}{4}x\right)^2} = \frac{x}{4} \sqrt{25 - 1} = \frac{\sqrt{24}x}{4}; \text{ т.к. } KO \perp LO, MO$$

поэтому $\Rightarrow$ тетраэдр $KOLM$ — правильным $\Rightarrow KLM \perp SO$

$\Rightarrow$ аналогично $\triangle K_1L_1M_1 \sim \triangle K_2L_2M_2 \sim \triangle KLM$, пусть T

$\Rightarrow SO$ — перпендикуляр $(SO, KLM) \Rightarrow \triangle KOT \perp SO$; $\triangle KTS$ — прямоугольный

$$\sin \angle KST = \sin(\angle KSO) \cdot KS = \frac{1}{5} \cdot \frac{x\sqrt{24}}{4} = \frac{x\sqrt{24}}{20};$$

K_2 — касание между $\triangle K_1L_1M_1$ и $\triangle KLM$

$$K_2 \approx \frac{KL}{K_1L_1} = \frac{ST}{SO_1} = \frac{x\sqrt{24}}{20} \quad \& \quad ST = \sqrt{KS^2 - KT^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{x^2 \cdot 24}{4^2} - \frac{x^2 \cdot 24}{20^2}} = \frac{x}{4} \sqrt{24} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{x}{4} \sqrt{\frac{24^2}{25^2}}$$

$$= \frac{x}{4} \cdot \frac{24}{25} = \frac{6}{5}x; K_2 \text{ — касание между } \triangle K_1L_1M_1 \text{ и } \triangle KLM,$$

$$K_2 = \frac{K_1L_1}{K_1L} = \frac{SO_1}{ST} = \frac{x}{\frac{6}{5}x} = \frac{5}{6}; K_2 = \frac{SO_{K_1L_1M_1}}{SO_{KLM}} \Rightarrow$$

$$SO_{KLM} = \frac{SO_{K_1L_1M_1}}{K_2} = \frac{4}{\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{4 \cdot 36}{25} = \frac{144}{25}$$

$$\text{Ответ: } \arcsin\left(\frac{1}{5}\right); \frac{144}{25}$$

или

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

рассмотрим (1) вариант $\text{откуда } \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

III) Schluss

$y = -6$

$$x \in \{0, 1\}$$

$$(\|x\| - 6)^2 + 4 = a$$

IV C_f : $y=6$; $x \in [0; 12]$; $(|x| - 2)^2 + 4 = 9$ по условию

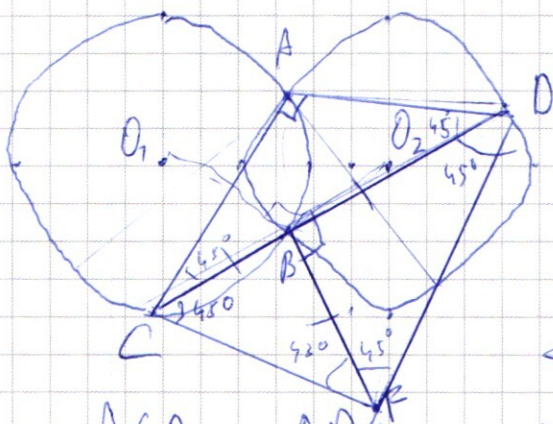
for all x and y $x = 0$

$$6^2 + 4^2 = 52 = 36 + 16 = 52$$

но $\frac{\partial}{\partial x} yz = 0$, тогда $xz = \frac{1}{2} b$, $a = 4$

Order: 4,52,900

26



a) $R = 13$; $\angle CAD = 30^\circ$

g) $BF \cong BD$, $CF = ?$

м.к. $\angle ACD$ и $\angle AOB$ одна

на от AB , разн

Важно, чтобы каждый из

$$\leftarrow A(D_2) < A(BB) \text{ which } < (A(D_2) \approx 0^\circ)$$

$$\angle ACD + \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = 45^\circ \Rightarrow AC \perp AD \quad (DA \perp AC \sqrt{2})$$

$O_1 O_2 \perp AB \} \angle F = \sqrt{BF^2 + BC^2} \quad ; \quad BC = CD - BD$

$$CP = \sqrt{BP^2 + (CD - BP)^2}; \text{ m.k. } A \in \widehat{AB} = 45^\circ, \angle AP, B -$$

gen $z \rangle \angle A O_1 B_2 \angle \widehat{AB}, z \approx 90^\circ$ ~~ist~~; $O_1 A = O_1 B = O_2 A = O_2 B =$

- розн, $\Rightarrow O_1 + O_2 \text{ в } A - \text{в } B = \text{квадрат} \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

к.п. $AD \perp CA; AD \perp DF; \Rightarrow AD \perp \text{пл. } CDF$ - логично, верно

(useful)

$$x - 6 - y + x - 6 + y = 12;$$

$$2x = 24; x = 12$$

$$\begin{cases} -y \geq 6 \\ y \geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq -6 \\ y \geq 6 \end{cases}$$

$$\text{II) пусть } \begin{cases} x - 6 - y \leq 0 \\ x - 6 + y \leq 0 \end{cases}$$

$$x - 6 - y + x - 6 + y = -12$$

$$2x = 0; x = 0$$

$$\begin{cases} -y \leq 6 \\ y \leq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 6 \\ y \leq 6 \end{cases}$$

$$\text{III) пусть } \begin{cases} x - 6 - y > 0 \\ x - 6 + y < 0 \end{cases}$$

$$x - 6 - y - x + 6 - y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6;$$

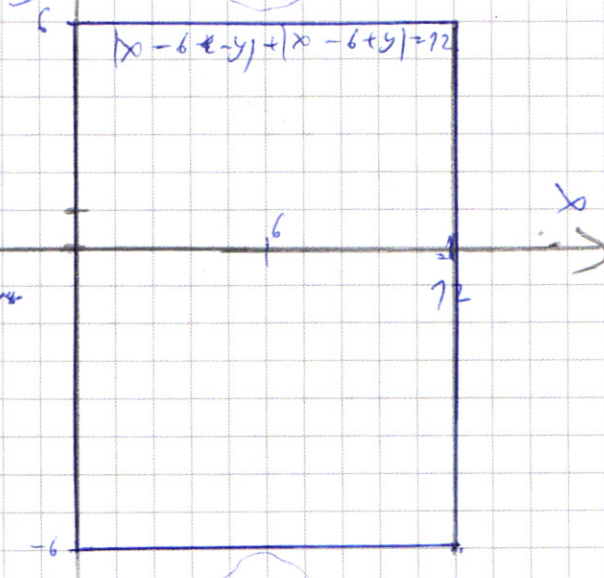
$$\begin{cases} x > 12 \\ x < 12 \end{cases}$$

$$\text{IV) пусть } \begin{cases} x - 6 - y < 0 \\ x - 6 + y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$-x + 6 + y + x - 6 + y = 12$$

$$2y = 12; y = 6$$



(2) выразим радиус и окружность

радиус $\sqrt{a}$;

$$\text{I) } x = 12, y \in (-6; 6)$$

$$6^2 + (y-8)^2 = a - \text{не отриц.}$$

но y может быть ≤ 0 и тогда $a > 100$

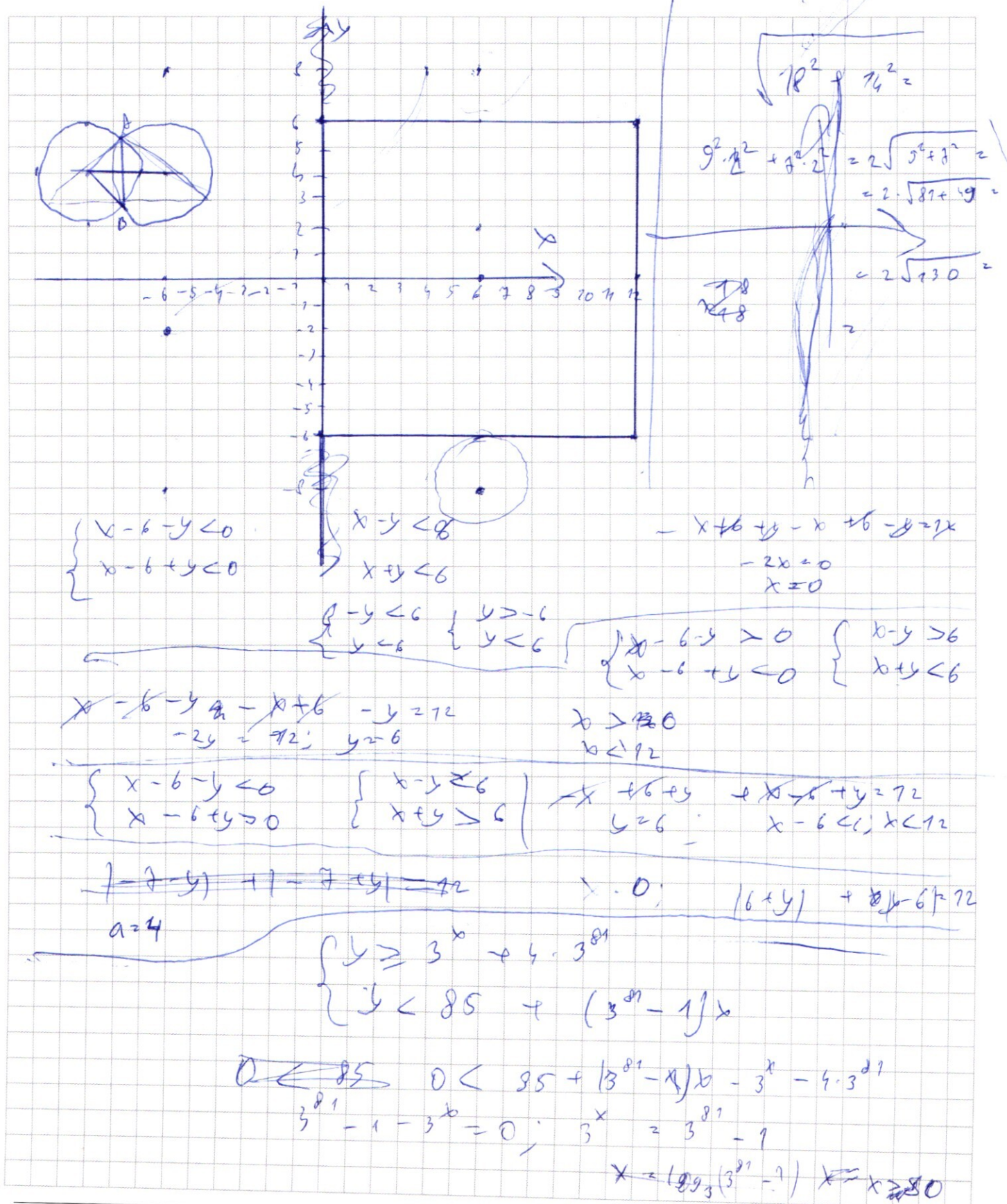
$$\text{II) пусть } x \geq 0;$$

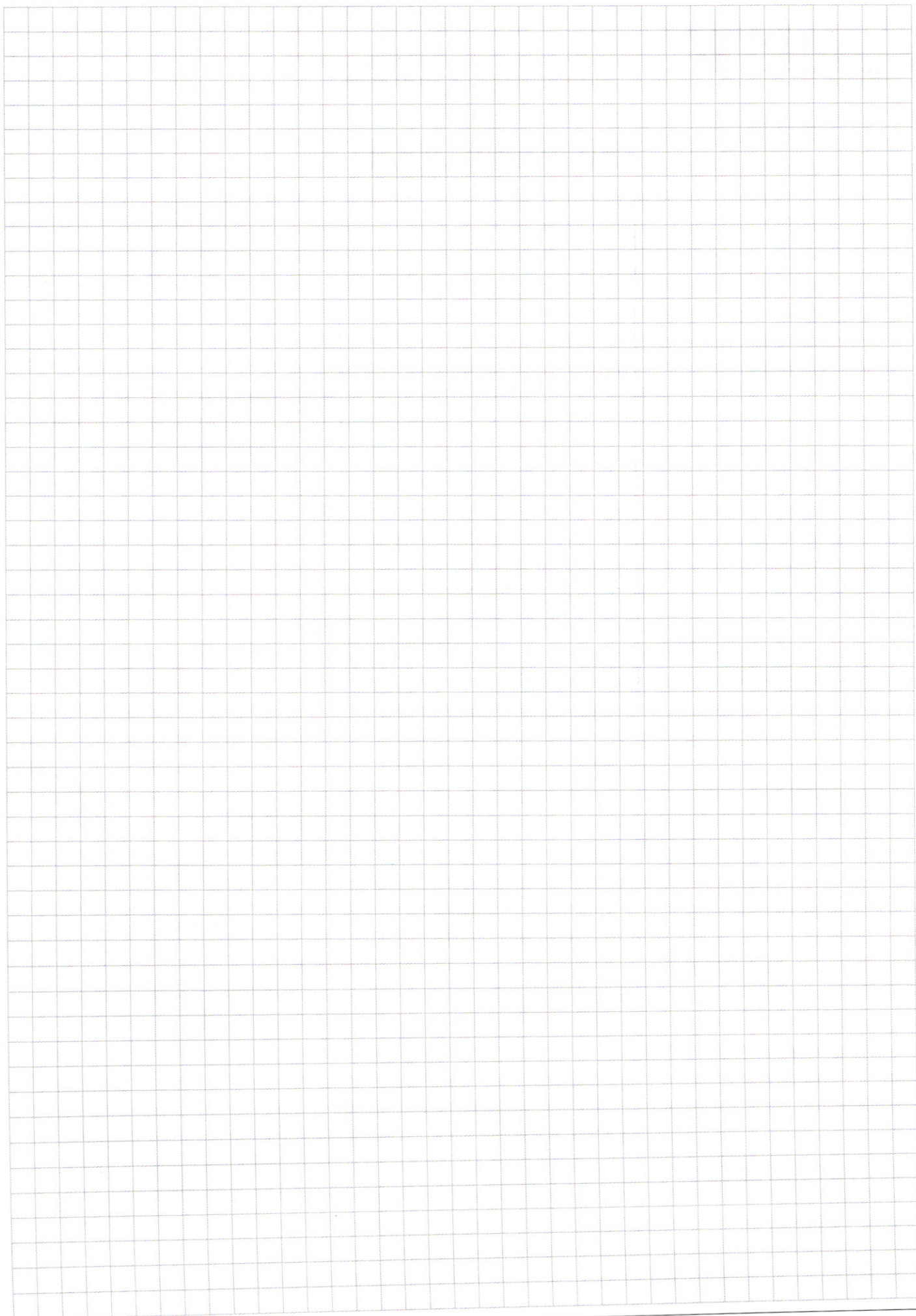
$$6^2 + (y-8)^2 = a, \text{ тогда } y \geq 0 \text{ и } x \geq 0$$

но если $y \geq 0$, то есть $y \geq 0$ и $x \geq 0$

$$a = 6^2 + 8^2 = 100, \text{ но } y \geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

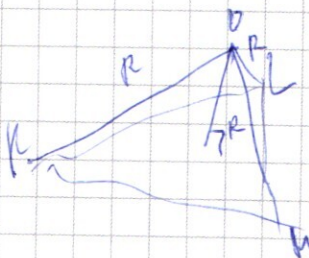
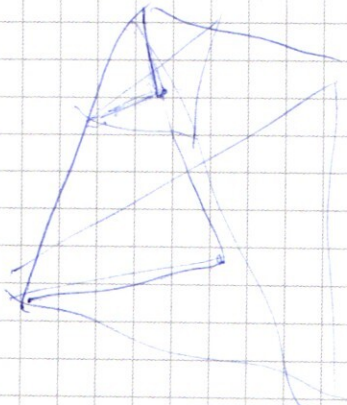
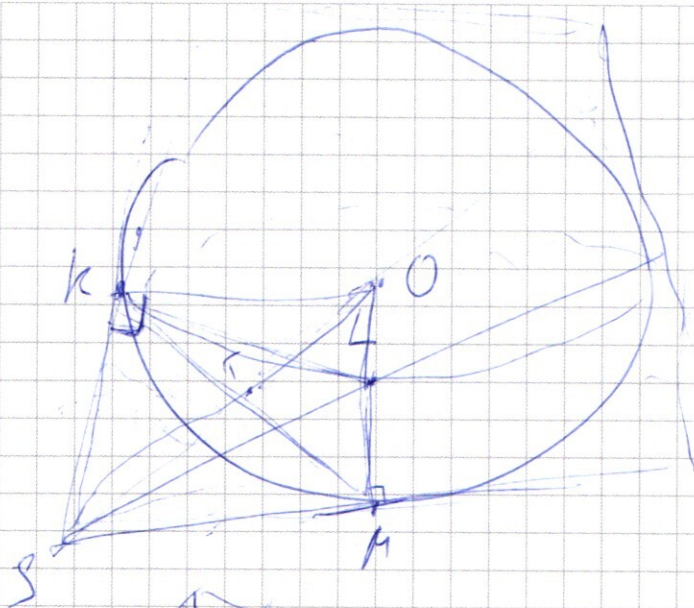




☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~tg ∠KSO =~~

$$k_2 = \frac{kS}{SO_1} = \frac{\frac{5}{4}x}{\frac{5}{4}x} = 1$$

$$\cos \angle KSO = \frac{kO}{SO} = \frac{\frac{3}{4}x}{\frac{5}{4}x} = \frac{3}{5}$$

$$ST = \sqrt{kS^2 - Tk^2}$$

$$= \sqrt{kS^2 - kS^2 \cos^2 \alpha} = kS \sin \alpha$$

∠KSO = ?

$$SO_1 = 4$$

$$SO_2 = 9$$

$$S_1 \sim S_2 \triangle 1 \sim S_2$$

$$\frac{SO_2}{SO_1} = k^2$$

$$k = \frac{3}{2}$$

$$SO_1 = x$$

$$SO_2 = \frac{3}{2}x \quad ; \quad 2R = SO_2 - SO_1 = \frac{3}{2}x - x = \frac{1}{2}x$$

$$R = \frac{x}{4}$$

$$SO = x + \frac{x}{4} = \frac{5}{4}x$$

$$x ; \frac{x}{4} ;$$

$$kS^2 + kO^2 = SO^2$$

$$kS = \sqrt{SO^2 - kO^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{4}x\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{x}{4} \sqrt{25 - 1} = \frac{x}{4} \sqrt{24}$$

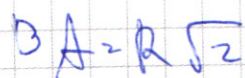
$$= \frac{x}{4} \sqrt{6} \cdot 2 = \frac{x}{2} \sqrt{6}$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{6}{2} = \frac{3x}{2}$$

$$Tk = kS \cos \alpha$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{x\sqrt{6}}{10} = \frac{3}{5} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9x}{50}$$

$$= \frac{9x}{50} \cdot \frac{\sqrt{24}}{2} = \frac{9x}{50} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 2 = \frac{9x}{50} \sqrt{6}$$



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}^0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

16	17	15	5			
15			33	5	5	
18		20				
15		37		67	5	5
		35		5		
37			25	17	10	27
35			25	75	35	
25				25		
25				25		
0						

$$76875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 5^4 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 76 \\ \times 70 \\ \hline 7120 \end{array}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 70$$

$$\cos 70^\circ + \cos 30^\circ - \sqrt{2} \cos 70^\circ = \sin 70^\circ + \sin 30^\circ$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x}{y} \right)^{199} &= (-x)^{199} (-xy) \\ 2y^2 - xy - x^2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$8.7 \cdot \frac{6.8}{2} = 5.4 \cdot 6.7 = 20.422$$
$$\approx 840$$

$$8 \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 8 \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 40 \cdot 7 = 280$$

$$2y(y-4) + x(x+4) - xy = 0$$

$$19 \frac{x^6}{y^2}, 19y = 19(x-y) \cdot (x+y), \therefore (419x - 219y) - 19y = (4y + (x-y))19(x)$$

$$4 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y = (\lg y)^2 - x^2 + (\lg^2 x - x^2)$$

$$2/g^2 y - 3/g(x) \cdot 1/g(y) + (y^2 - x)^2 = 0$$

$$2 \frac{19(y)}{19(x)^2} - 3 \frac{14(y)}{19(x)} + 1 = 0$$

$$\frac{19(x)}{(x-x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-a^3 - a^2 - 2a - 8}{(x-x)^2} = 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

② $9 - 8 = 1$;

$$t_2 = \frac{3 \pm 1}{4}, \quad t_2 = 7$$

$$7 \approx \frac{7}{2}$$

$$\left(\frac{16}{4}\right)^{\log_2} = 4^{\log_2}$$

2 1914

$$\begin{array}{r} a^3 + a^2 + 2a + 8 \mid a^2 - 2a + 2 \\ \underline{a^3 + 2a^2} \\ -a^2 + 2a + 2 \\ \underline{-a^2 + 2a + 2} \\ 0 \end{array}$$

$$4n + 8 \quad y = -x$$

$$ac - 2$$

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 3x = 0 \quad | : x$$

$$2x^2 + 4x \geq 0, \quad x \neq 0$$

$$\sqrt{-b \pm 2}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}; \quad \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}; \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \beta = 2 \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = -\sqrt{2} \cdot \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = -\sqrt{2} \cdot (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\sin 5x + \cos 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$$

$$2 \cos 2x = -\sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$-\sqrt{2} \cdot \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \sin(5x + \arctan(1))$$

$$-\cos 2x = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$-1 + 2 \sin^2 x = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$-\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$2x = 5x + \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$-3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi k}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$-2x = 5x + \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$-7x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi k}{7} - \frac{3\pi}{28}$$

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$$

$$x = 6 - y$$

$$x - 6 - y > 0; \quad x - 6 + y > 0$$

$$\begin{cases} x - y > 6 \\ x + y > 6 \end{cases}$$

$$-y \geq -6$$

$$y \geq -6$$

$$y \leq 6$$

$$y > -6$$

$$x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$2x = 24; \quad x = 12$$

$$x = 12; \quad -6 < y < 6$$

$$36 + (y - 8) = 0$$

$$|y - 8| = 0; \quad y = 8$$