

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, & (-x)^{\lg(x-y)} + \lg(y) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① Разложим 16875 на множители

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

$5 \cdot 3 = 15$; $5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow$ в данном 8-значном числе
каждая цифра, $\neq 5$ равна 5

$3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow$ в данном числе либо присутствуют
три тройки, либо пара "3 и 9"

Цифры, из которых состоит число:

1) 3 3 3 5 5 5 5 1 ..

2) 9 3 5 5 5 5 1 1

В 1 случае кол-во возможных чисел: $\frac{8!}{3! \cdot 4!}$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \cdot 5 = 280$$

число цифр
↓
8!
3! · 4!
↑ ↑
три "3" четыре "5"

Во 2 случае кол-во возможных чисел: $\frac{8!}{4! \cdot 2!}$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 56 \cdot 15 = 840$$

8!
4! · 2!
↑ ↑
четыре "5" две "1"

Всего вариантов: $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120

④ Дано:

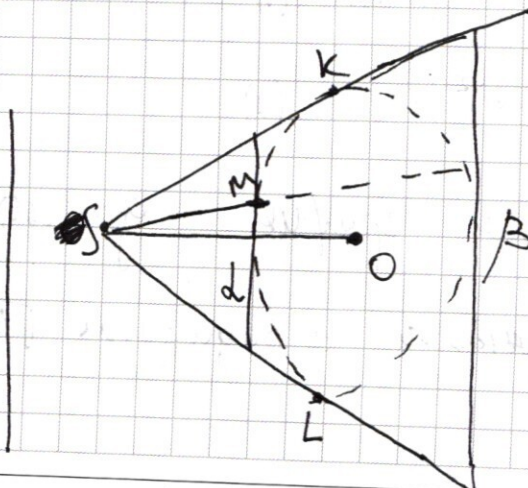
Зр угол;

вершина S;

K; L; M — т. кас
с впис. шаром

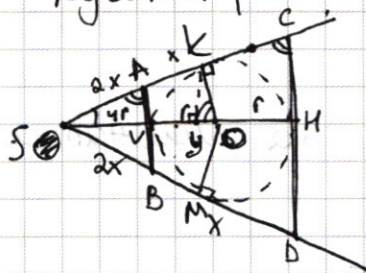
O — ц. впис. шара;

L; B — пл-ти;



$$S_{kLM} = ?$$

представим картинку с двумя
пути (S_K и S_M) плоской



C, D-T. как бы ^{SON}_S ^{SON}_S

$$\triangle OAB \sim \triangle OCD \text{ по } YY \Rightarrow \frac{4}{9} = \cancel{100} (\text{коэф подобия})^2 \Rightarrow$$

$$\frac{S_A}{S_C} = \frac{2}{3}$$

Обозначим $SA = 2x \Rightarrow SC = x$

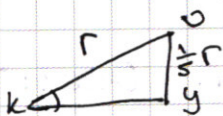
 $\Delta SCH \sim \Delta SOK$ по 99

то же соотношение
выполняется для
прямой SO

$VH\text{-диаметр} = 2r \Rightarrow SV = 4r$

радиус
шара

у-т.п. сечения KML и SO



$$\frac{SC}{CH} = \frac{50}{KO} \Rightarrow \frac{3X}{CH} = \frac{5r}{r} = 5$$

$$\sin \angle KSO = \frac{CH}{SC} = \frac{CH}{3x} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{4r + \frac{4}{5}r}{4r} = \frac{24/5}{4} = \frac{24}{20} = \frac{6}{5}$$

$$\left(\frac{20}{24}\right)^2 = \frac{400}{576} = \text{соотношение площадей}$$

Отвѣт: 5,76; $\arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$.

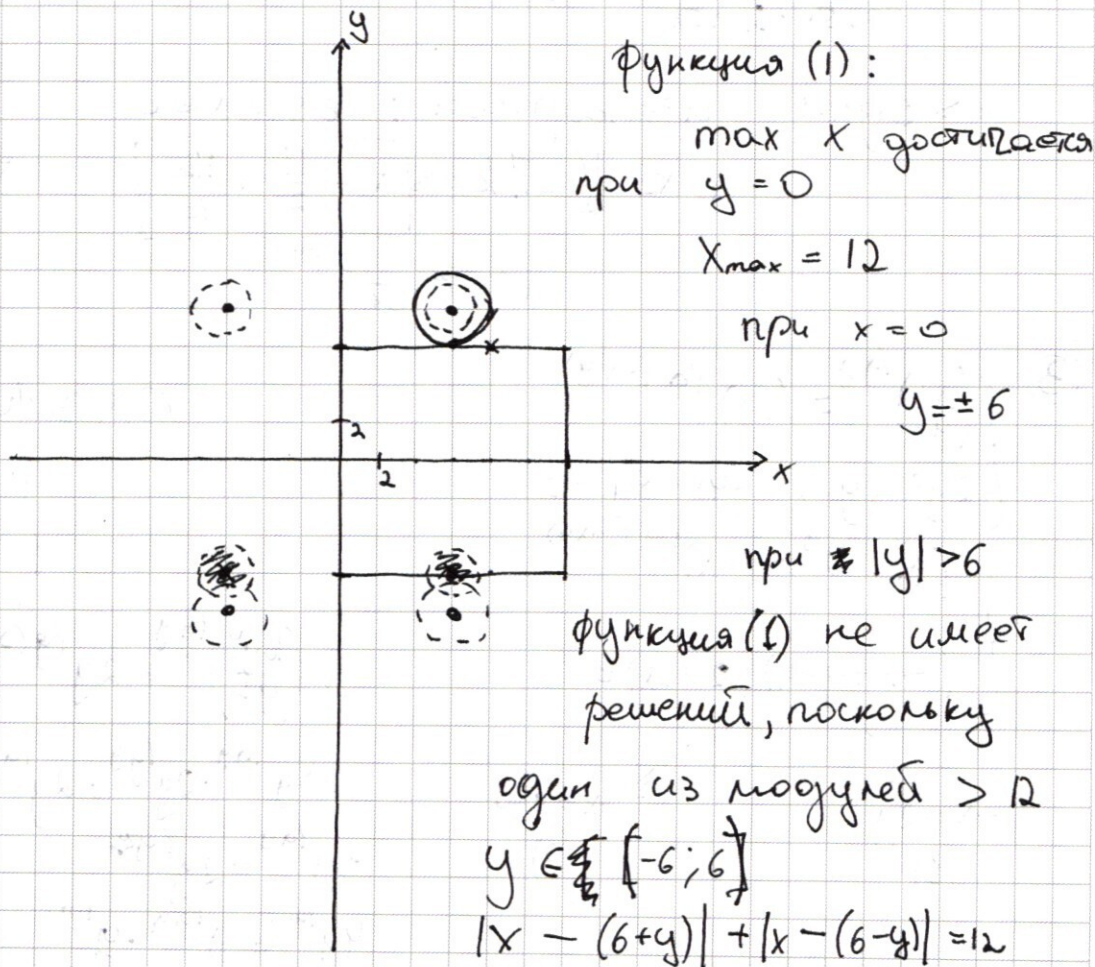
(5) $|x-6-y| + |x-6+y| = 12^*$ (1)

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 9 \quad (2)$$

построим график — данных функций.

(2) - окружности с радиусом $\sqrt{|a|}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\boxed{x=12}$
 если $|y|=6: |x-12| + |x|$

2 решения y системы будут, если каждая из
 окружностей касается графика ф-ции (1), то есть
 (для окружностей,
 чей центр находится
 в положительной части
 оси Ox) | радиус окружностей = 2
 (при радиусе < 2 0 точек $\cap$,
 при радиусе > 2 4 точки $\cap$).

$2 = \sqrt{1a} \Rightarrow a = 4$

$\boxed{\text{Ответ: } a=4}$

$$2) \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\frac{2 \cos 2x \cos 10x}{\cos 5x + \sin 5x} - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

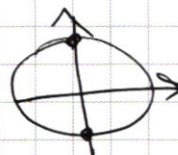
$\Rightarrow$ или из корней: $\cos 10x = 0$

$$10x = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$$

ответ $\rightarrow$

ОДЗ:

$$x \neq \frac{3\pi}{4} + \pi k$$



$$3) \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \\ \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ (-x + y - 4)(2y + x) = 0 \end{cases}$$

$$\swarrow$$

$$-x = 2y$$

$$(1)$$

$$\searrow$$

$$-x = 4 - y$$

$$(2)$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \\ y < 4 \end{cases}$$

$$1) \left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = 2y^{\lg(2y^2)}$$

$$8y^{\lg y} \cdot 2y^{\lg y} = 2y^{\lg y} \cdot 2y^{\lg 2y}$$

$$8y^{\lg y} = 2y^{\lg y}$$

$$4y^{\lg y} = y^{\lg y} \cdot y^{100}$$

$$4 = y^{100} \Rightarrow y = 4^{1/100}$$

$$2y \neq 0$$

$$2) \left(\frac{(4-y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y) \cdot y}$$

$$\frac{(4-y)^{4 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$\frac{(4-y)^{3 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$y^{2 \lg y} = (4-y)^{3 \lg y - \lg(4-y)}$$

$$\left(\frac{y}{4-y}\right)^{2 \lg y} = (4-y)^{\lg y - \lg(4-y)}$$

$$y = 4 - y \Rightarrow y = 2$$

$$y = 4 - y \text{ при } y = 2$$

$$\text{Ответ: } (2 \cdot 4^{1/100}; 4^{1/100}); (-2; 2).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16875 \mid 3$$

$$5625 \mid 3$$

$$1875 \mid 3$$

$$625 \mid 5$$

$$125 \mid 5$$

$$25 \mid 5$$

$$5 \mid 5$$

$$\Delta$$

$$C_8^3 + C_8^1$$

$$3 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1$$

$$9 \ 3 \ 3 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 1 \ 1$$

$$C_8^1 + C_8^1 + C_8^2$$

$$\frac{3^3 \cdot 2^4 \cdot 1}{3! \cdot 4!} = \frac{8^3}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1}$$

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$22110$$

$$C_5^2 + C_5^1 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} + \frac{5!}{4! \cdot 1!}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 4!}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!}$$

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4$$

$$55555551$$

$$2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$$

$$C_8^1 = 8$$

$$16875 \mid 3$$

$$\begin{array}{r} 16875 \\ -15 \\ \hline 18 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$5625 \mid 3$$

$$\begin{array}{r} 5625 \\ -3 \\ \hline 26 \\ -24 \\ \hline 22 \\ -21 \\ \hline 15 \\ -15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ -24 \\ \hline 22 \\ -21 \\ \hline 15 \\ -15 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$1875 \mid 3$$

$$\begin{array}{r} 1875 \\ -18 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0 \end{array}$$

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

$$C_4^1 + C_4^1 + C_4^1$$

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 6$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

12 вариантов

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 3x\right) - \sqrt{2}\cos 10x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 3x\right)$$

$$\sin 7x - \cos 7x + (\sin 3x - \cos 3x) + \sqrt{2}\cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2}\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos 10x = 0$$

$$\boxed{\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 10x = 0}$$

$$\frac{1}{2}(\sin x + \sin y) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} =$$

$$\cos \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{2}$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos 0$$



SSS1

$$\frac{1}{2}\left(\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}}{2}$$

92.2.2.1

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} + 3x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{7x - \frac{\pi}{4} - 3x + \frac{\pi}{4}}{2}$$

$$2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) + \cos 10(7x + 3x) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$$

$$\cos \varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \cos -\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{1}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg 8} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$2y^2 - 8y + 8 - x^2 - 4x - 4 - xy = 0$$

$$2(y-2)^2 - (x+2)^2 - (xy+y) = 0$$

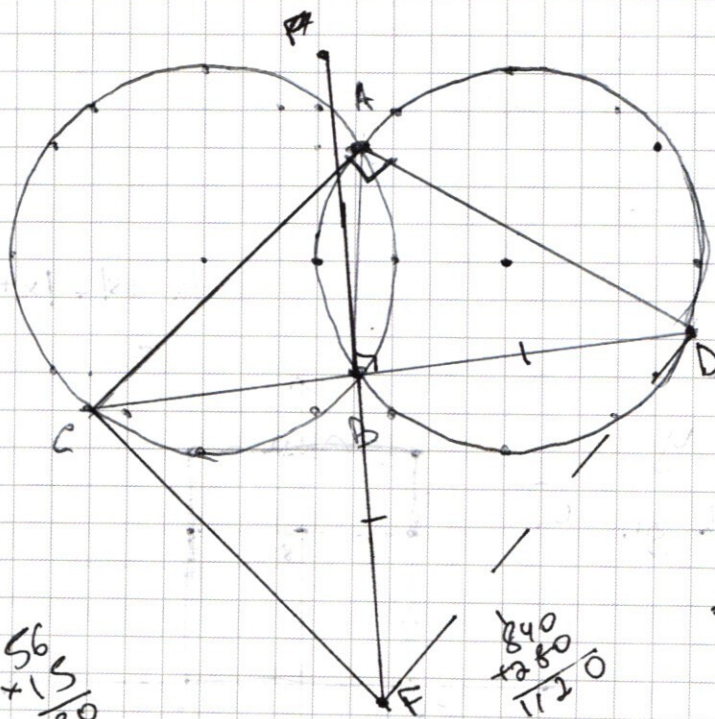
$$\log_2 8 = 3$$

$$2 \geq 1$$

$$2 < 10$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x-1}$$

$$y < 81 + 4 + 3 \cdot x - x$$



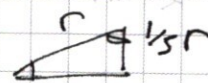
CF=?

$$\left(\frac{20}{24}\right)^2 = \frac{400}{24^2}$$

$$\frac{24^2}{100}$$

$$\frac{4r + \frac{4}{5}r}{4r} = \frac{24}{5}$$

$$= \frac{24}{20}$$



по подобию

$$\frac{3x}{y} = \frac{5r}{r} = 5$$

$$\sin \angle KSO = \frac{y}{3x} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$x - 6 = a$$

$$|6 - y| + |6 + y| = 12$$

$$6 = 6$$

$$y = 0$$

$$x - 6 \geq y$$

$$x - 6 - y + x - 6 + y = 12$$

$$2x - 12 = 12$$

$$x = 12$$

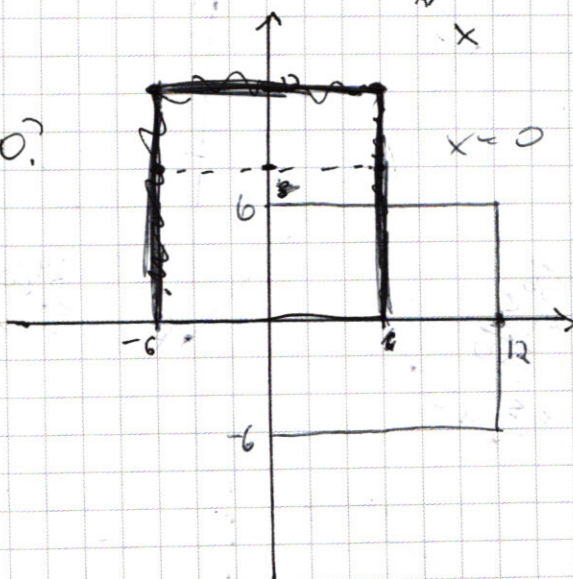
$$\cos \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$-6 - y + y - 6 = 0$$

$$(6 - 12) + (12 - 6)$$

$$x - 6 \leq y$$

$$|x - 12| + |x + 6| = 12$$



$$\sin x + \cos y$$

$$2 \sin$$

$$2 \sin$$

$$0$$

$$\frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{2} \cos 0 = 1$$

$$\frac{1}{2} (\sin x + \sin y) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\cos x + \cos y) = \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}$$

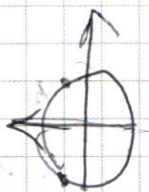
$$\frac{1}{2} (\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$



$$\cos \frac{\pi}{2} = 1 - 12$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = -12$$

$$\sin \pi + \sin \frac{\pi}{2}$$

$$2) -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{6} = 1 + 0 = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$$

$$\frac{2 \cos 2x \cdot \cos 10x}{\cos 5x + \sin 5x} = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\cos 10x = 0$$

$$10x = \pi/2 + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$$

$$3x = \frac{3\pi}{10} + \pi k$$

$$x = \frac{3\pi}{10} + \pi k$$

$$15x = \frac{15\pi}{10} + 15\pi k$$

$$(2y-x+4)(y+3x) = 2y^2 + 36xy - xy - 3x^2 + 4y + 12x$$

$$(-x+y-4)(2y+x) = 0$$

$$-x^2 - 2xy + 2y^2 + xy$$

$$-x^2 - 2xy + 2y^2 + xy - 8y + 4x$$

$$\begin{cases} 2y = -x \\ -x = 4-y \end{cases}$$

$$y =$$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = 2y^{\lg(2y^2)}$$

$$(16y^2)^{\lg y} = 2y^{\lg 2y^2}$$

$$1) 8y^{\lg y} \cdot 2y^{\lg y} = 2y^{\lg y + \lg 2y}$$

$$8y^{\lg y} \cdot 2y^{\lg y} = 2y^{\lg y} \cdot 2y^{\lg 2y}$$

$$4y^{\lg y} = y^{\lg 2y} = y^{\lg y + \lg 100}$$

$$4y^{\lg y} = y^{\lg y} \cdot y^{100}$$

$$4 = y^{100}$$

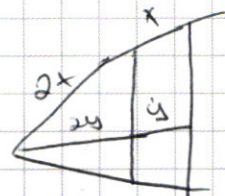
$$y = 4^{\frac{1}{100}}$$

$$2) \left(\frac{(4-y)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg(4-y) \cdot y}$$

$$\frac{(4-y)^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = (4-y)^{\lg(4-y)} \cdot (4-y)^{\lg y}$$

$$\frac{V^{4\lg y}}{y^{2\lg y}} = V^{\lg V} \cdot V^{\lg y}$$

$$V^{\lg y} \cdot V^{3\lg y} = V^{\lg y} \cdot V^{\lg V} \cdot y^{2\lg y}$$



$$\Delta 3: \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$2^3 \cdot 2^1 = 2^4$$

$$y < 4$$

$$\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{4}{9}$$

$$8 = 2^3$$

$$-x = 2 \cdot 4^{\frac{1}{100}} \quad 4 - 2 = 2$$

$$4 - y = V$$

$$2^{\lg 2} = 2^{\lg 2}$$