

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик

$$2\cos^2 5x - 1 = \overset{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}.$$

$$\sin \alpha + \sin \alpha - \sin \beta =$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

$$\sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} + 3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4} - 3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$= 2 \cdot \sin\left(\frac{10x - \frac{\pi}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{4x}{2}\right) = 2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x$$

$$2 \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos 2x = \cos 10x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$2 \left(\sin 5x \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \cos 5x \right) \cdot \cos 2x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$2 \sin 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cos 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \sin 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x \cos 2x = 2 \cos^2 5x - 1$$

$$\sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = 2 \cos^2 5x + \sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - 1$$

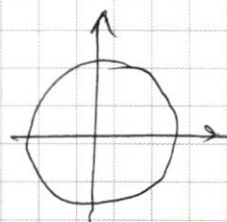
$$\cos 5x (2 \cos 5x + \sqrt{2} \cos 2x) - 1$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x).$$

$$+ 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x).$$

$$20 \times 3 \frac{12}{15} \cdot 75$$



№2 $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x,$

$\sin 7x + \sin 3x = \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x =$
 $= 2 \sin 5x \cos 2x$

$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos 5x \cos 2x$ прояснение на срд

№3 прояснение

③ $\lg(-x) = 4 \lg(y)$

④ $\lg(-x) = \lg(y)$

③ $\lg(-x) = 4 \lg(y)$

пусть $\lg(-x) = a$

$10^a = -x, \Rightarrow 10^{4a} = y$

тогда

$(-x)^4 = y$

$(-x)^4 = x+4 = x^4$

$x^4 - x - 4 = 0.$

ответ: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \\ y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}$

④ $\lg(-x) = \lg(x+4),$

$-x = x+4$

$-2x = 4$

$x = -2 \Rightarrow y = 2$

$\lg(-x) = \lg(-\frac{x}{2}).$

$-x = -\frac{x}{2}.$

$2x = x.$

$(x \neq 0 \Rightarrow \text{нет решений})$

$(-x)^4 = -\frac{x}{2} = x^4$

пусть $k = -x$

$\frac{k}{2} = (-k)^4 = k^4$

$\begin{cases} k=0, \Rightarrow x=0 \\ k = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}$

$y = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение №2

$$2\cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2\sin 5x \cos 2x,$$

$$2\cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \\ = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x), \quad \Leftrightarrow,$$

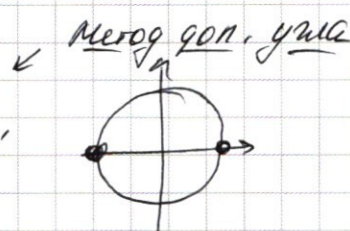
$$① \quad \cos 5x - \sin 5x = 0,$$

$$② \quad 2\cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$① \quad \frac{\cos 5x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 5x}{\sqrt{2}} = 0, \quad \Leftrightarrow \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = 0,$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}}$$



$$② \quad \cos 2x = \frac{\cos 5x}{\sqrt{2}} + \frac{\sin 5x}{\sqrt{2}} = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4}) = 0,$$

$$-2\sin\left(\frac{2x + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \sin\left(\frac{2x - 5x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0,$$

$$③ \quad \sin\left(\frac{7x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0,$$

$$④ \quad \sin\left(-\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0.$$

$$③ \quad 7x - \frac{\pi}{4} = 2\pi h \quad \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2\pi h}{7} + \frac{\pi}{28}} \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$④ \quad 3x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n \quad \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2\pi n}{3} + \frac{\pi}{12}} \quad n \in \mathbb{Z}$$

Ответ $x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi h}{7}$$

$$k, h, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}$$

(N5)

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

Ровно 2 решения

$$|(x-6)-y| + |(x-6)+y| = 12 \quad \text{это квадрат.}$$

и 8

~~Пусть $|(x-6)-y| = 5$~~

Пусть $(x-6)-y = a$

$(x-6)+y = b$

① $a \geq 0 \quad b \geq 0$.

$2x - 12 = 12$

$x = 12$

$b = 0$

② $a \geq 0 \quad b \leq 0$

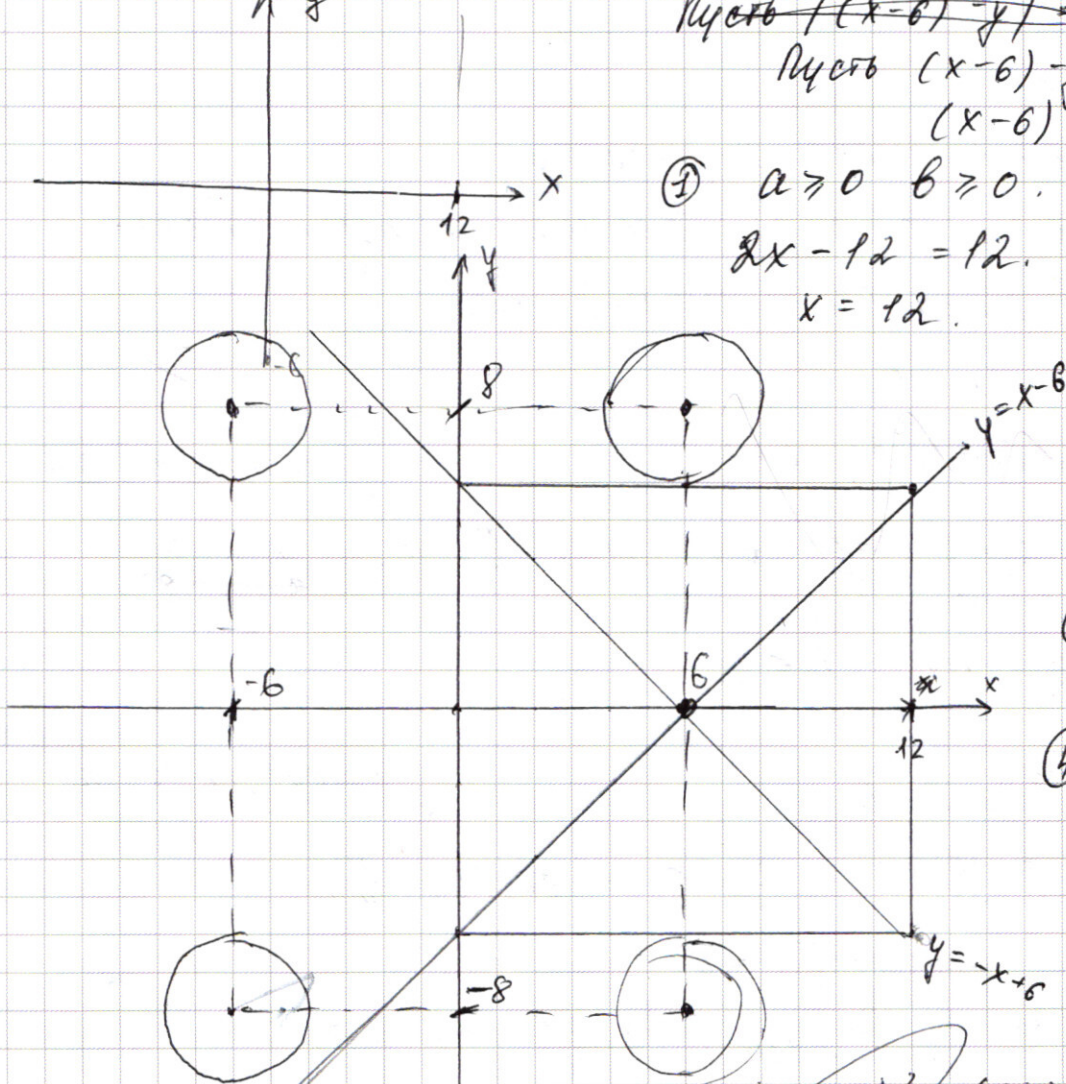
$y = -6$

③ $a \leq 0 \quad b \geq 0$

$y = 6$

④ $a \leq 0 \quad b \leq 0$

$x = 0$

центр в точке
(6; 8)

$\rightarrow (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$

покае окр-сть с $r = \sqrt{a}$ при $x \geq 6$ и $x \leq 6 \Rightarrow y \geq 8$
 $y \leq 8$ при $y \geq 8$ и $y \leq 8 \Rightarrow x \geq 6$ т.е. окр-сть без одной из
вершин

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos(\alpha)$$

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$(5x+2x) \quad (5x-2x) \quad (5x+2x) \quad (5x-2x)$

$$\sin 7x + \sin 3x = \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos 7x + \cos 3x = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (2 \cos^2 5x - 1)$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2\sqrt{2} \cos^2 5x - \sqrt{2} = \cos 5x (2 \cos 2x - 2\sqrt{2} \cos 5x) - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cos 10x = \sqrt{2} (\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 7x \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x = \sin 7x + \sin 3x$$

Пусть $\cos 7x = a$ $\cos 3x = b$

$$a + b - \sqrt{2}ab + \sqrt{2}\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} = a + b$$

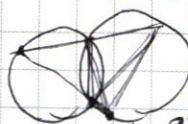
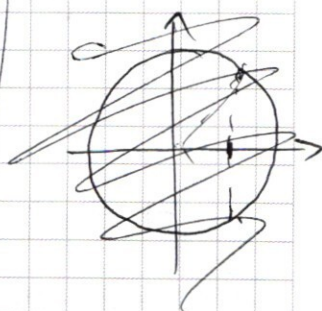
$$\frac{\cos 7x}{\sqrt{2}} - \frac{\sin 7x}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2} \cos 10x}{\sqrt{2}} = \frac{\sin 3x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos 3x}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(7x - \varphi) - \cos 10x = \sin(3x - \varphi)$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin(7x - \varphi) - \sin(3x - \varphi) = \cos 10x$$

$$2 \sin \varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$



$$2 \sin \varphi = 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$$\textcircled{N3} \begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\log_{10} y} = (-x) \log_{10}(-xy) & \textcircled{1} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad 2y^2 - 8y - (x^2 + 4x + 4) = -4 + xy.$$

$$\textcircled{2} \quad 2y^2 - (x+8)y - x^2 - 4x = 0$$

$$\Delta: (x+8)^2 - 8(-x^2 - 4x) = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$\begin{array}{r} 9x^2 + 48x + 64 \\ \underline{18x + 64} \\ 0 \end{array}$$

$$\Delta \textcircled{2}: (x+8)^2 - 8(-x^2 - 4x) = (3x+8)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{(x+8) \pm (3x+8)}{4} = \rightarrow \frac{4x+2 \cdot 8}{4} = \underline{x+4}$$

$$\rightarrow \frac{-2x}{4} = \underline{-\frac{x}{2}}$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$\text{ОРЗ: } \begin{cases} y \neq 0, \\ (-x) \geq 0, \\ (-xy) > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

$$4 \lg x \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg y \lg(x)$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg y \lg(-x) + 2 \lg^2 y = 0.$$

Однородное уравнение.

$$\frac{\lg(-x)}{\lg(y)} = t \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0.$$

$$\Delta(t): 9 - 4 \cdot 2 = 1 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \rightarrow 4$$

$$\rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lg(x) = 4 \lg(y) \textcircled{3}$$

$$\lg(x) = \lg(y) \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}: \lg(x) = 4 \lg(x+4) = \lg(x+4)^4$$

$$-x = (x+4)^4$$

$$\text{Пусть } a = -x \Rightarrow$$

$$a = (4-a)^4$$

~~нет решений, т.к.~~
~~нет решений, т.к.~~
 $(x+4)^4 > 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\log_{10} y \cdot (\log_{10} x^4 - \log_{10} y^2) = \log_{10}(-xy) \cdot \log_{10}(-x)$$

$$\begin{aligned} \lg y (4 \lg x - 2 \lg y) &= (\lg(-x) + \lg y) \lg(-x), \\ 4 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y &= \lg^2(-x) + \lg y \lg(-x) \\ &= \lg^2(-1) + \lg(x). \end{aligned}$$

$$4 \lg x \cdot \lg y - 2 \lg^2 y = \lg^2(x) + \lg y \lg x$$

$$\begin{aligned} x < 0, & \quad -x = (x+4)^4 & a = -x, \quad \frac{1}{a} = k^3 \\ xy < 0, & & a = (4-a)^4 \\ y > 0. & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 16 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 16 + 4 \cdot 16 \\ 6 \cdot 16. \end{aligned}$$

$$(16 - 8a + a^2)(16 - 8a + a^2)$$

$$\begin{aligned} (16)^2 - 8 \cdot 16a + 16a^2 + 64a^2 - 8a^3 - 8 \cdot 16a + \\ + 16a^2 - 8a^3 + a^4 \end{aligned}$$

$$(16)^2 - (16)^2 a + 6 \cdot 16a^2 - 16a^3 + a^4 = a$$

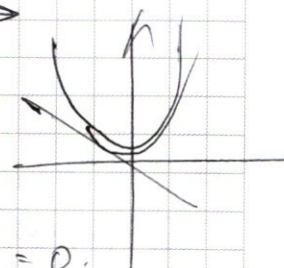
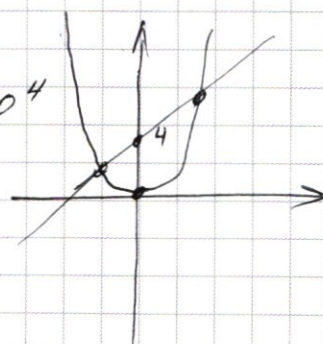
$$\begin{aligned} \lg(-x) &= 4 \lg(y) \\ a^x &= (10^a)^4 = (x)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10^{4a} &= y \\ 3^3 &= \end{aligned}$$

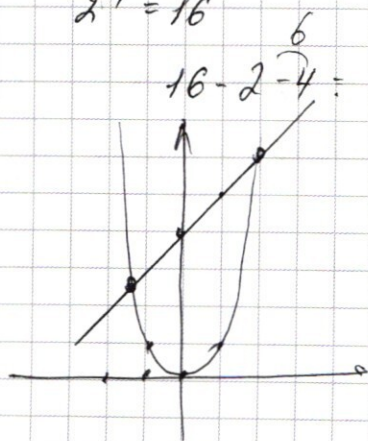
$$10^a \cdot 10^4$$

$$(-x)^4 = y$$

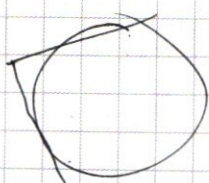
$$\begin{aligned} x^4 &= x+4 \\ -1 & \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2^3 &= 8, \\ 2^4 &= 16 \\ 16 - 2 \cdot 4 &= 6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^4 - \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{9}{2} &= 0, \\ (\sqrt{2})^4 - \sqrt{2} - 4 &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3})^4 - \sqrt{3} - 4 &= 0. \end{aligned}$$


SACF?

PC=10

$r=13$

BD=BF

$\angle CAD=90^\circ$

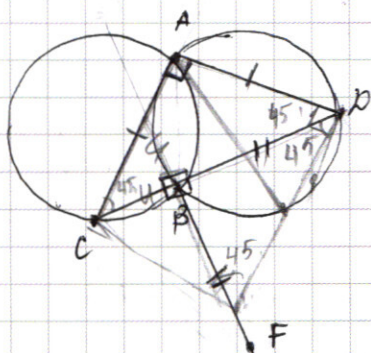
CF=?

Угол $\angle ADB$ опирается на дугу AB (меньшую) на нее же, и опирается $\angle ACB$.

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB$, т.к.

$\angle CAD=90^\circ \Rightarrow \angle ACB=45^\circ$

$AD=AC$



т.к. $\angle ADB + \angle BDF = 90^\circ \Rightarrow AC \parallel DF$

т.к. $BD=BF$, а $\angle FBD=90^\circ \Rightarrow \angle BDF=45^\circ$

Пусть $AD=a$, $BD=b$.

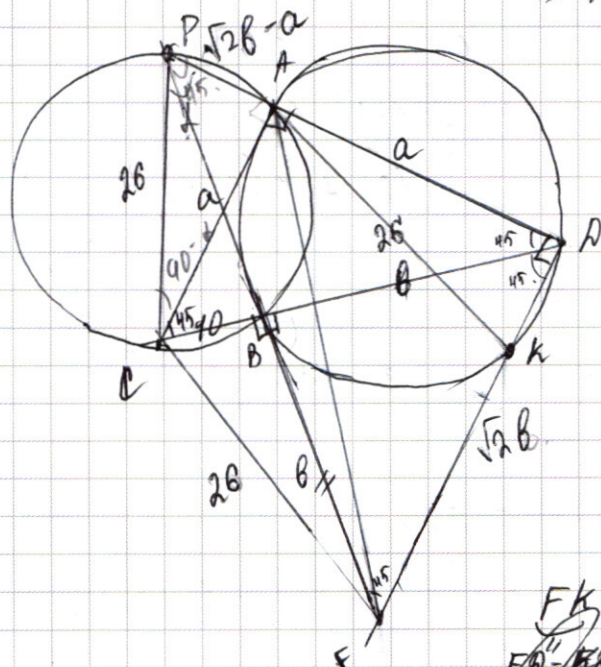
по Th Пифагора:

$KD^2 = HK^2 - AD^2 = (2b)^2 - a^2$

$FK \cdot (KD + FK) = FB \cdot (FB + BP)$

$CA = PB$ т.к. A и B симметричны относительно прямой $\perp PC$.

$PC = 2r = 26$



$FK \cdot \sqrt{2}b = b \cdot (b+a)$

$FK = \frac{b(b+a)}{\sqrt{2}b}$

$\sqrt{2}b = \sqrt{26^2 - a^2}$

$\Rightarrow (\sqrt{2}b - \sqrt{26^2 - a^2}) \sqrt{2} = (b+a)$

$CF^2 = (FD - CA)^2 + AD^2$

$\Rightarrow CF^2 = (\sqrt{2}b - a)^2 + a^2$

$CP^2 = CA^2 + PA^2$

$26^2 = a^2 + (\sqrt{2}b - a)^2$

$CF = 26$ Ответ

т.к. $CP=CF \Rightarrow \triangle PCF$ р/в $\Rightarrow CB$ - перпенд $\Rightarrow PB=BF=b$

Th Пифагора для $\triangle PDE$: $PD^2 + DE^2 = PE^2 \Rightarrow 2(\sqrt{2}b)^2 = (2b)^2$

$\triangle CFA$ и $\triangle CAD$ - равнобедренные, т.е. $S_{\triangle CFA} = S_{\triangle CAD} = \frac{a^2}{2}$

$CB = CD - BD = \sqrt{2}a - b$

$PA = PD - AD = \sqrt{2}b - a$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$b^2 + (\sqrt{2}a - b)^2 = 2b^2$$

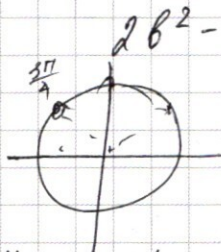
$$b^2 + 2a^2 - 2\sqrt{2}ab + b^2 = 26^2$$

~~$$2(a^2 + b^2) / 2\sqrt{2}$$~~

$$\sin(135^\circ - 2)$$

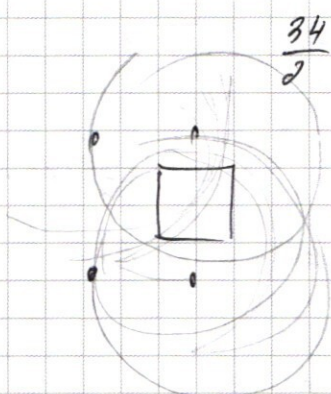
$$(\sqrt{26} - a)^2 + a^2 = 26^2$$

$$90^\circ \frac{11}{4} + \frac{211}{4} = \frac{3}{4} 11$$



$$1 - \sin^2 \theta \left(\frac{a}{2b} \right)^2$$

$$\sqrt{\frac{26^2 - a^2}{26^2}} = \cos L$$



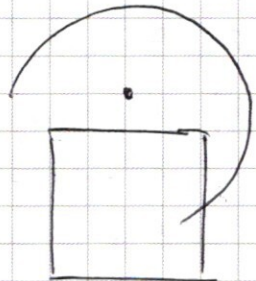
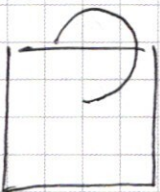
$$-y - y = 12.$$

$$x - 6 - y \geq 0, \quad a \geq 0$$

$$x - b + y \geq 0, b \geq 0.$$

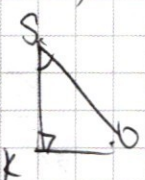
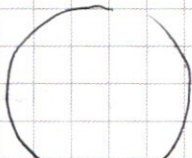
$$x - 6 \geq y$$

$$\begin{cases} y \geq -x + 6 & b \geq 0 \\ y \leq x - 6 & a \geq 0 \end{cases}$$



$$(1x+6)^2 + (1y-8)^2 = a$$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a$$



$2\sqrt{5}R,$

$$50 = 5$$

$$\frac{20}{25}$$

$$= \frac{4}{5}$$

$$\log_3 \left[\frac{2}{15} (7^{10} - 1) + 48 - 447 \right]$$

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

$$7 \overline{) 188 - 141} + 1 - 7^8$$

27

HA-008

87.95.78

$$14 = 8 + 21$$

975, 976

9-251

300-42

$$\begin{array}{r} 16875 \\ \times 25 \\ \hline 84375 \\ 337500 \\ \hline 421875 \end{array}$$

Контрольное №6

Th Пифагора в $\triangle PAC$ и $\triangle PBC$

$$\triangle PAC$$

$$PA^2 + AC^2 = PC^2$$

$$(\sqrt{2}b - a)^2 + a^2 = 26^2$$

$$\triangle PBC$$

$$PB^2 + CB^2 = PC^2$$

$$(\sqrt{2}a - b)^2 + b^2 = 26^2$$

$$2b^2 - 2\sqrt{2}ab + a^2 + a^2 = 2a^2 - 2\sqrt{2}ab + b^2 + b^2$$

Пусть $\angle CPA = d$.

Th синусов $\triangle CPA$:

$$\frac{PC}{\sin \angle PAC} = \frac{CA}{\sin \angle CPA} = \frac{PA}{\sin \angle PCA} \Rightarrow \frac{26}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sin(135^\circ - d)} = \frac{\sqrt{2}b}{\sin d}$$

$$\frac{52}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sin d}$$

$$\frac{52}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}b}{\sin(\frac{3\pi}{4}) \cdot \cos d - \sin d \cos(\frac{3\pi}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}b}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos d + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin d} = \frac{2b}{\cos d + \sin d} = \frac{52}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}b = 26(\cos d + \sin d).$$

$$52 \cdot \sin d = 2a \Rightarrow 26 \sin d = a \Rightarrow \sqrt{2}b = 26 \cos d + a$$

$$(\sqrt{2}b = \sqrt{26^2 - a^2} + a)$$

$$2b^2 - 2\sqrt{2}ab + a^2 = 26^2 - a^2$$

Th Пифагора $\triangle PAC$,

$$(\sqrt{2}b - a)^2 + a^2 = 26^2$$

$$2b^2 - 2\sqrt{2}ab + 2a^2 = 26^2$$

Ответ $CF = 26$

Ответ $S_{ACF} = 289$

$$CD = \sqrt{2}a \Rightarrow BD = b = \sqrt{2}a - 10 \Rightarrow b + 10 = \sqrt{2}a$$

Th Пифагора $\triangle CDB$: $CD^2 = CB^2 + DB^2$

$$26^2 = b^2 + 100$$

$$b^2 = (26 - 10)(26 + 10)$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ 4 \cdot 4 \end{array}$$

$$b = 4 \cdot 6 = 24 = BD$$

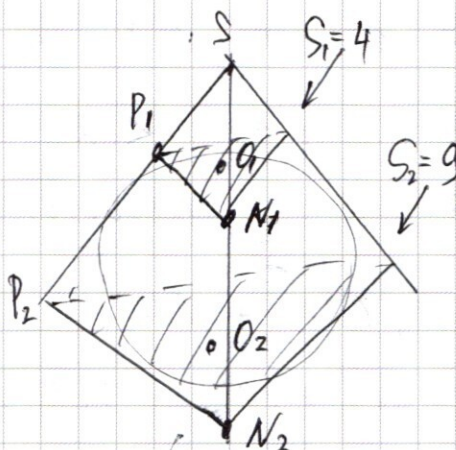
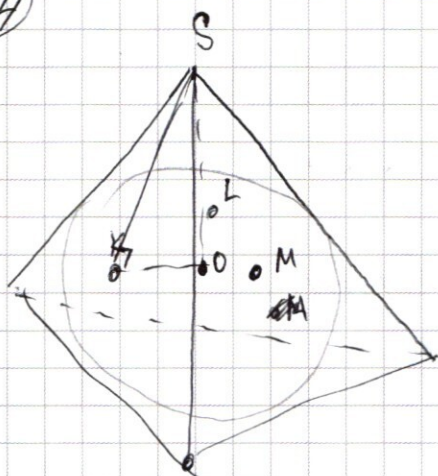
$$\sqrt{2}a = 24 + 10 = 34 \Rightarrow a = \frac{34}{\sqrt{2}}$$

$$S_{CAD} = S_{CAF} = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{34^2}{2} = \frac{34^2}{4} = 17^2 = 289$$

Ответ $S_{CAF} = 289$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



O_1 и O_2
точки касания
сферы и
плоскостей,

$$KS^2 = KO^2 + SO^2 = SL^2 = SM^2 \quad \text{т.к. } KO = LO = OM = R \text{ сферы}$$

$$KS = SL = SM$$

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{P_1 N_1}{P_2 N_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{2}{3} = \frac{SO_1}{SO_2} = \frac{SO_1}{SO_1 + 2R}$$

$$2SO_1 + 4R = 3SO_1 \Rightarrow 4R = SO_1$$

$$SK^2 = SO_1 \cdot (SO) = 4R \cdot (4R + R) = 20R^2$$

$$SK = \sqrt{20} \cdot R \quad \cos \angle KSO = \frac{SK}{SO}$$

$$\cos \angle KSO = \frac{SK}{SO} = \frac{\sqrt{20} \cdot R}{5 \cdot R} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Ответ. } \angle KSO = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

угол $\angle KSO$ не может быть тупым, т.к. $\angle SKO = 90^\circ$

⇒ №5 Продолжение

при ~~$\sqrt{a} \in [0, 2]$~~ ~~$0 \leq a \leq 2$~~ ~~решений 0~~

~~$(|x| - 6)^2$~~ $\cdot (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a$

то 4 эк-ств $0 \neq \sqrt{a}$

⇒ при ~~$\sqrt{a} \in$~~ $0 \leq \sqrt{a} \leq 2$ - 0 решений.

$(\sqrt{a} = 2 - 2 \text{ решения.}) \Rightarrow a = 4$

при $\sqrt{a} = \sqrt{(18)^2 + (14)^2}$ 2 решения,

$(a = 18^2 + 14^2 = 520)$

Ответ $a \neq 520$
 $a = 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 Продолжение

$$3^t - 1 + \frac{(1 - 3^{8t})}{8t} \leq 0.$$

$$t = x - 4.$$

$$8t \cdot 3^t - 8t + (1 - 3^{8t})t \leq 0$$

$$3^{t+4} - 8t + (1 - 3^{8t})t \leq 0$$

$$\log_3 \log_3 \log_3$$

$$t+4 \sim 4$$

$$\frac{(\log_3 3^{t+4})}{4} \log_3 (1 - 3^{8t})t \leq 0,$$

$$t \cdot (t+4) \cdot \log_3 t$$

$$(t+4) (\log_3 (1 - 3^{8t}) + \log_3 t) \leq 0$$

$$x > 0.$$

$$x < 0.$$

$$\log_3 (1 - 3^{8t}) + \log_3 t < 0$$

$$\log_3 (1 - 3^{8t}) + \log_3 t > 0$$

$$(1 - 3^{8t}) < -t$$

$$(1 - 3^{8t})t > 0.$$

$$(1 - 3^{8t}) \cdot t < 0.$$

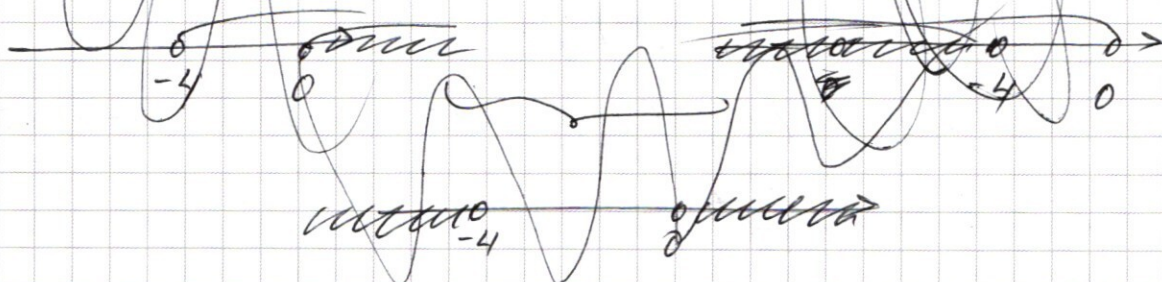
$$t < 0.$$

3 > 1
знак
не
меняется

$$t > 0.$$

$$x + 4 < 0.$$

$$x + 4 > 0.$$



№1

8

$$16875,$$

$$16875 = 25 \cdot 25 \cdot 27$$

$$16875 = 5^4 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$$

т.е. $C_n^k = C$

в. выбрать из 8 мест 4 места для "б"

$$C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$$

выбрать из 4 мест 3 места для "3"

$$C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$$

Итого по правилу умножения, $C_8^4 \cdot C_4^3 = 70 \cdot 4 = 280$

Ответ 280

№7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{34} \leq y < 85 + (3^{34} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} < 85 + (3^{81} \cdot x - x)$$

$$3^x - 85 + x + \underbrace{4 \cdot 3^{81} - x \cdot 3^{81}}_{(4-x) \cdot 3^{81}} < 0$$

$$3^x - 3^4 + x - 4 + (x-4) \cdot 3^{81} < 0$$

$$3^x - 3^4 + (x-4)(1-3^{81}) < 0 \quad / : 3^4$$

$$3^{(x-4)} - 1 + (x-4)(1-3^{81}) < 0$$

$$3^t - 1 + \frac{(1-3^{81})t}{2-1} < 0$$

Пусть $(x-4) = t$