

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x + 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.
$$\begin{array}{r|l} 16875 & 3 \\ 5625 & 3 \\ 1875 & 3 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 5 \end{array}$$
 7 цифр

$\{3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 1\}$

набор для составления ^{возможностей} числа,
удовлетворяющего условию.

$$N = \frac{8!}{3! \cdot 4!} \rightarrow \text{число вариантов, которые можно составить из цифр 3 и 5}$$

или из цифр "3" (все "3" для одной цифры) и цифр "5" (все "5" для одной цифры)

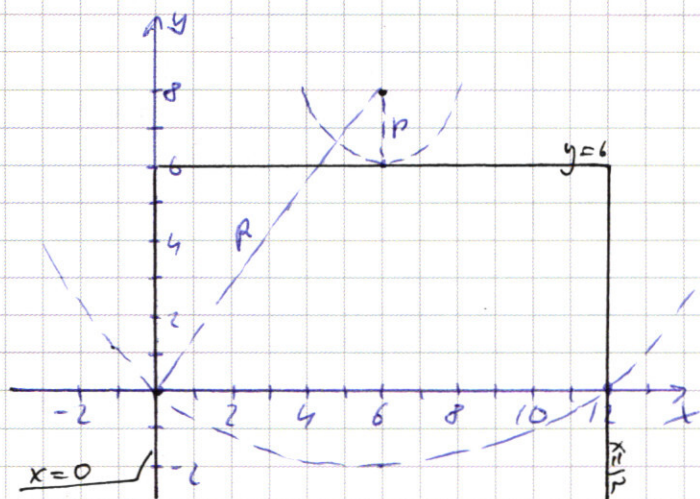
$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$$

Ответ: 280 чисел.

5.
$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1)
$$\begin{cases} y \leq x-6 < -y \\ -x+6+y & -x+6-y = 12 \\ -y \leq x-6 < y \\ -x+6+y & +x-6+y = 12 \\ x-6 \geq y \\ x-6-y & +x-6+y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6 < -y \\ x=0 \\ -y \leq x-6 < y \\ y=6 \\ x-6 \geq y \\ x=12 \end{cases} \begin{cases} y < 6 \\ x=0 \\ 0 \leq x < 12 \\ y=6 \\ y \leq 6 \\ x=12 \end{cases}$$



$$P/w (2) (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

Это окружность с центром в т. (6; 8) и $R_0 = \sqrt{a}$, границей которой являются части окружности, у которых $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

тогда система будет иметь ^{два} решения:
 $r < \sqrt{a} \leq R$

$$r = 8 - 6 = 2 \quad R = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

↑
по т. Пифагора.

$$2 < \sqrt{a} \leq 10$$

$$4 < a \leq 100$$

Ответ: $a \in (4; 100]$.

$$2. \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x - 2 \sin 5x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$$

$$(\cos(5x) - \sin(5x)) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0 \quad \text{в)} \quad \begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 5x = \sin 5x \\ \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \end{cases} \quad \begin{cases} \cos 5x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x) \\ \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{4} - 5x) \end{cases}$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi k$$

$$5x = -\frac{\pi}{2} + 5x + 2\pi k \rightarrow \text{нет решений}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{4} + 5x + 2\pi k$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}$; $x_2 = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}$; $x_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$; $k \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Дано: сферы с центрами O вписаны в тригранник с вершиной S и касаются его граней в точках K, L, M ; $S_1 = 4$ и $S_2 = 9$

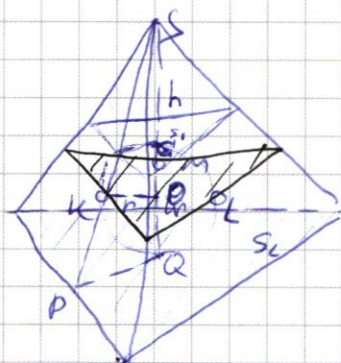
Найти: $\angle KSO$ и $S_{\text{пол}}$

Решение: 1) так как сечение угла $\angle SO \rightarrow$ подобные треугольники с

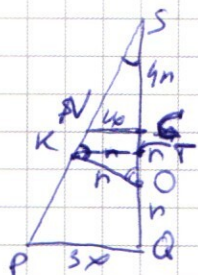
$$K^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow K = \frac{2}{3}$$

$$\rho(S, S_1) = h \quad \rho(S, S_2) = 2r$$

$$\frac{h}{h+2r} = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{h = 4r}$$



2)



из $\triangle SKO$ - прямоугольный: $SG = 4r = \rho(S, S_1)$

$$GO = r, KO = r - \rho(O, K) \Rightarrow$$

$$\sin \angle KSO = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

3) $\angle(KLM)$ сечение будет также подобно меньшему сечению S_1 и S_2 .

а) сечем оциклим $KT \perp SQ \rightarrow$ проекто-трапеция.

$$\angle \text{угол } \cos \angle KOT = \frac{r}{5r} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin \angle KOT = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$KT = KO \cdot \sin \angle KOT = r \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$5) \frac{NG}{KT} = \frac{2 \times}{\frac{2\sqrt{6}}{5}r} = \frac{5\sqrt{6}}{5r}$$

$$6) \text{ из } \triangle SGN - \text{прямоугольный: } \angle G \angle NSG = \frac{4r}{2r} = \frac{2r}{r}; \angle G \angle NSG + 1 = \frac{1}{2r}$$

$$\lg NSG = 24 \Rightarrow \frac{24}{x} = 2\sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{12}{\sqrt{6}}$$

$$\frac{N6}{100} = \frac{5x}{\sqrt{6}r} = \frac{5 \cdot \frac{12}{\sqrt{6}}}{\sqrt{6}r} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{S_1}{S_{\text{sum}}} = \frac{25}{36} \Rightarrow S_{\text{sum}} = \frac{4 \cdot 36}{25} = \frac{16 \cdot 36}{100} = 5,76$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 16 \\ \hline 216 \\ 36 \\ \hline 576 \end{array}$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$; $S_{\text{sum}} = 5,76$.

3. $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} & (1) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 & (2) \end{cases}$

$$\begin{cases} y > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

(1) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x) + \lg y}$

$$\left(\frac{x^4}{y^2 \cdot (-x)}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$(-x)^{\left(\frac{(-x)^3}{y^2}\right)^{\lg y}} = (-x)^{\lg(-x)}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2)^{\lg y} = \frac{(-x)^{\lg(-x)}}{(-x)^{\lg y}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-\frac{x}{y})}$$

$\Rightarrow 4 \lg y = 2 \lg 2$

$$2 \lg y^2 = 2 \lg 2 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \Rightarrow x = -2\sqrt{2}$$

$\left(\frac{y-y}{y}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg \frac{4-y}{y}}$

$$\left(\frac{(-y+y)}{y}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg 4-y}$$

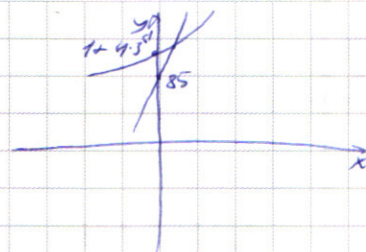
$$(4-y)^{\lg 4^2} = (4-y)^{\lg 4-y} \cdot y^{\lg y^2}$$

$$(4-y)^{\lg \frac{4^2}{4-y}} = y^{\lg y^2} \quad y=1 \quad 4-1=3 \quad \lg \frac{1}{3} \neq 1 \lg 1$$

$$y=2 \quad 2 \lg 4 = 2 \lg 4 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=-2$$

Ответ: $x_1 = -2\sqrt{2}, y_1 = \sqrt{2}; y_2 = 2, x_2 = -2$.

$$7. \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} & (1) \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x & (2) \end{cases}$$



при $x_0 = 4$ $y_1 = y_2$
 $y_1 = 3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 81 + 4 \cdot 3^{81}$

$y_2 = 85 + (3^{81} - 1)4 = 81 + 4 \cdot 3^{81} \rightarrow$ графики пересекутся впервые

Реш (2): $K = (3^{81} - 1) \rightarrow$ график и ось абсцисс

y_2 почти совпадает с прямой $y = x = 0 \rightarrow$

y_2 больше не пересекет y_1 , т.к. растет медленнее.

при $x_1 = 85$

$$y_1 = 3^{85} + 4 \cdot 3^{81} = 3^4 \cdot 3^{81} + 4 \cdot 3^{81} = 85 \cdot 3^{81}$$

$$y_2 = 85 + (3^{81} - 1) \cdot 85 = 85 \cdot 3^{81}$$

графики пересекутся во 2-ой раз.

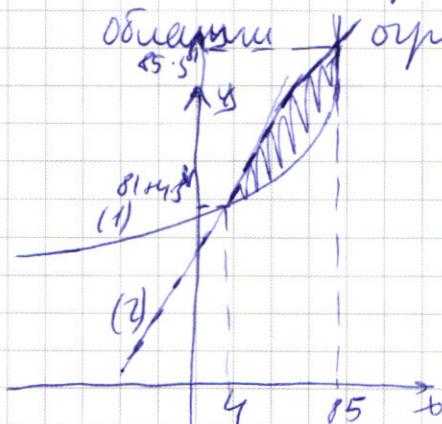
Каждый из нас по-своему будет равно:

$$x_1 - x_0 + 1 = 85 - 4 + 1 = 82$$

человек

т.е. эти пары чисел будут лежать в

области ограниченной этими двумя функциями.



$$85 \cdot 3^{81} \quad (4; 81 + 4 \cdot 3^{81})$$

$$(85; 85 \cdot 3^{81})$$

$$\int_4^{85} (85 + (3^{81} - 1)x) dx - \int_4^{85} (3^x + 4 \cdot 3^{81}) dx$$

$$\int_4^{85} (85 + (3^{81} - 1)x) dx = 85 \cdot (85 - 4) + (3^{81} - 1) \left(\frac{85^2}{2} - \frac{4^2}{2} \right) = 85 \cdot 81 + (3^{81} - 1) \left(\frac{85^2}{2} - \frac{4^2}{2} \right) =$$

$$\int_4^{85} (3^x + 4 \cdot 3^{81}) dx = 3^x \ln 3 \Big|_4^{85} + 4 \cdot 3^{81} (85 - 4) = 3^{85} \ln 3 - 3^4 \ln 3 + 4 \cdot 3^{81} \cdot 81$$

$$85 \cdot 81 + (3^{81} - 1) \cdot \frac{81 \cdot 89}{2} - \ln 3 (3^{85} - 3^4) + 4 \cdot 81 \cdot 3^{81} \rightarrow \text{площадь фигур}$$

$$\left(85 \cdot 81 - \frac{81 \cdot 89}{2} \right) + 3^{81} \left(\frac{81 \cdot 89}{2} + 4 \cdot 81 \right) - \ln 3 (3^{85} - 3^4) = 3^{81} \left(\frac{81 \cdot 89}{2} + 4 \cdot 81 \right) -$$

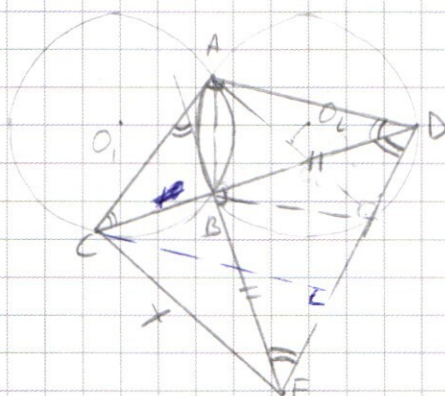
$$- 81 \cdot 2 - \ln 3 (3^{85} - 3^4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б. Дано: окружности $(O_1; R=13)$ и $(O_2; R=15)$ пересекаются в т. A и B ,
 $C \in (O_1; R)$ и $D \in (O_2; R)$, $B \in CD$, $\angle CAD = 90^\circ$ $BF \perp CD$,
 $BF = BD$

Найти: а) CF; б) если $B=10$; $S_{\text{эф}}$.

Решение: а) т.к. скорости равны $\rightarrow$ ~~хотят~~^{длин}, ~~оур-сье~~



точками АВ в выпуклых углах $\Rightarrow$
угол, опирающийся на эти
дуги равен $\Rightarrow \angle ACO = \angle AOC$

2) т.к. ΔCDA - равнобедренный $\Rightarrow$
 $\angle PCD = \angle PDC = 45^\circ$

3) При ΔFBD - приращении $\rightarrow$
 b/δ ($bF = BD$)

$$\angle BFD = \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow \angle ADF = 90^\circ$$

4) $\angle CAD = \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{DF}$ ~~$\overline{AC} \parallel \overline{DF}$ $\wedge$ $\angle CAD = \angle ADF$~~

~~$\Rightarrow$ GB-Entwicklung $\Rightarrow$ Jarošanský $\Rightarrow$ CATF-Klafter $\Rightarrow$
 $A \in BF, (AB=BF=CB=BD)$~~

5) ти СВА-транзактивный →

~~At the drawing of cards~~

~~$X = \alpha R = 26.66$~~

c) ~~Ombens~~: 26.

8)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 7x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x + \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 3x = \sin 4x \sin 2x$$

$$\cos 7x = \sqrt{2} \cos 7x \cdot \cos 3x + \cos 2x = \sin 7x + \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x + \sin 2x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$1 - \sqrt{2} \cos 5x + \frac{\cos 3x}{\cos 7x} = \frac{\sin 7x - \sqrt{2} \sin 7x \sin 3x}{\sin 7x}$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} = \frac{2 \cos \alpha \cdot \cos \beta}{2} = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$2 \cos 5x \cos 2x$$

$$2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\frac{1}{\cos 3x} \cdot \frac{1}{\cos 7x} =$$

$$\frac{1}{\cos 3x} = \frac{1}{\cos 7x} \Rightarrow \cos 7x = \cos 3x$$

$$\sum \frac{1}{\cos 3x} = \frac{1}{\cos 7x}$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 5x + \sqrt{2} \sin 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \cos 5x) / \cos 2x$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) / (2 \cos 2x) = \sqrt{2} \cos 5x / \cos 2x$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^x$$

$$y < 85 + (3^x - 1)x$$

$$x =$$

$$85 < 3^x$$

$$-1 + 4 \cdot 3^x \leq 3^x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^x \leq 85 + 3^x \Rightarrow 3^x \leq 85$$

$$3^x \leq 85$$

$$\ln(3^x) = \ln(85) \Rightarrow x = \frac{\ln(85)}{\ln(3)}$$

$$\frac{252}{91} = \frac{252}{91} \Rightarrow \frac{252}{91} = \frac{252}{91}$$

$$x^2 + 2x + 4x + 2x = 8$$

$$x^2 + 4x + 2x = 8 \Rightarrow x^2 + 6x + 2x = 8$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

