

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Число 16875 раскладывается на простые множители следующим образом:

$$16875 = 3^3 \cdot 5^4.$$

Таким образом, каждое из восьмизначных чисел записывается цифрами из набора: 1, 3, 5, 9, т.к.

$9 = 3^2$, а любые другие произведения этих однозначных чисел либо уже принадлежат к набору, либо двузначны.

Наборы всех используемых цифр таковы:

I. 5 5 5 5 3 3 3 1

II. 5 5 5 5 9 3 1 1, т.к. единственная возможность изменить набор связана с представлением 9 как $9 = 1$ или $3 \cdot 3$.

Тогда число первого набора:

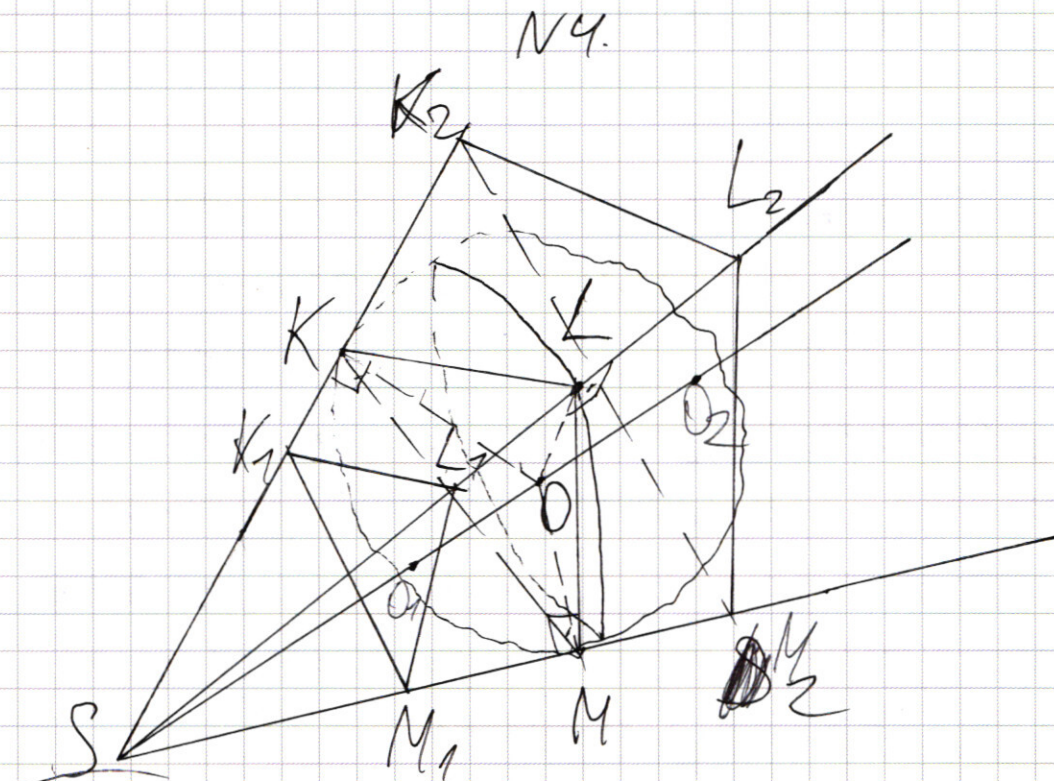
$$C_4^8 \cdot C_3^4 \cdot 1 = \frac{8! \cdot 4! \cdot 1}{4! 4! 3! 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$$

Второго набора:

$$C_4^8 \cdot C_2^4 \cdot C_1^2 \cdot 1 = \frac{8! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1}{4! 4! 2! 1! 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 280 \cdot 3 = 840$$

Qmbem. 7120.

Ny.



250-

SKLM-?

$\frac{L_2 S}{L_1 S} \cdot \frac{M_2 S}{M_1 S} = \frac{K_2 S \cdot \sin \angle KSO}{K_1 S \cdot \sin \angle KSO}$
 (но не перевернула), и $\Delta K_2 L_2 M_2$ (м.к. $\frac{K_1 O_1}{K_2 O_2} = \frac{K_1 S \cdot \sin \angle KSO}{K_2 S \cdot \sin \angle KSO}$).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\frac{S_2}{S_1} = k^2 = \left(\frac{k_2 L_2}{k_1 L_1} \right)^2 = \frac{9}{4}$

$\frac{k_2 L_2}{k_1 L_1} = \frac{3}{2}$. Тогда ~~по теореме~~ $\frac{O_2 S}{O_1 S} = \frac{3}{2}$

Пусть $O_2 S = 3x$, тогда $O_1 O_2 = 2 R_{\text{окр}} =$
 $= 3x - 2x = x$. $R_{\text{окр}} = \frac{x}{2} = OK$

$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{SO_2 r} = \frac{0,5x}{2,5x} = \frac{1}{5}$

$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$

Поскольку $(KLM) \perp SO$, т.е. SK, SL, SM — касательные (по аналогии с двукратной ситуацией: ~~AC~~ $AC \perp OB$ (т.к. AO, OC — радиусы)),

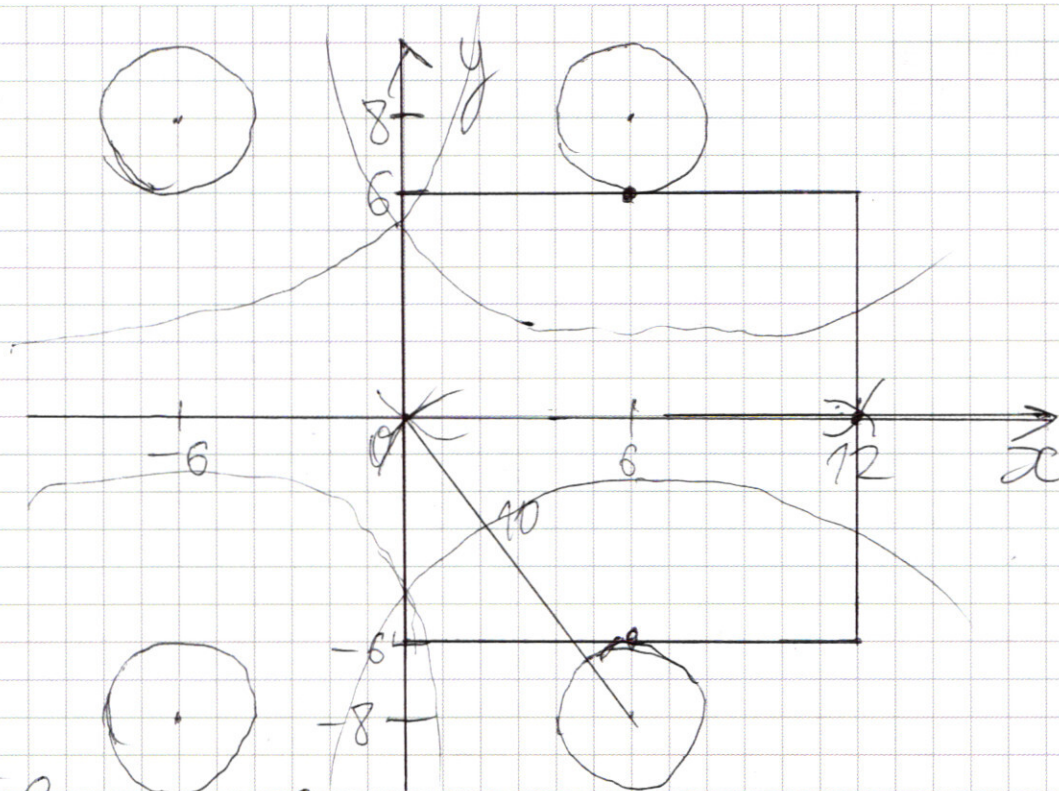
$\triangle KLM \sim \triangle K_2 L_2 M_2$ с коэффициентом $\frac{O_1 S}{O_2 S} =$

$\frac{2x}{2,5x} = \frac{4}{5}$. Тогда $S_{KLM} = S_1 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{25}{16}\right) =$
 $= 6,25$.

Ответ. $\arcsin\left(\frac{1}{5}\right); 6,25$.

N 5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x-6|)^2 + (|y-8|)^2 = a \end{cases}$$



Первое уравнение системы задаёт квадрат со сторонами 12 и вершинами $(0; 6)$, $(12; 6)$, $(12; -6)$, $(0; -6)$. Второе задаёт четыре окружности с центрами $(-6; 8)$, $(-6; -8)$, $(6; 8)$, $(6; -8)$ и радиусом $\sqrt{a}$. Пусть $\sqrt{a} = b$.
 При $b < 2$ окружности не пересекаются с квадратом, и решений 0. При $b = 2$ каждая из правых окр. ~~касается~~ касается квадрата — два решения. При $2 < b < 10$ система имеет 4 решения, т.к. каждая прав. окр. ~~касается~~ пересекает кв. 2 раза, а левая — 1 (в точке, уже принадл. к аналогичной окр. справа). При $b = 10$ точка пересечения $(0; 0)$ принадл. всем окр., ~~и решения~~ а $(12; 0)$ — двум правым, и решений снова

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Затем при $10 < b < 14$ решений ⁴, при $b = 14$ ⁶ решений, при $14 < b \leq \sqrt{260}$ 8 решений, при $b = \sqrt{260}$ 4 решения, при $b > \sqrt{260}$ 0. Тогда условие выполн. только при $b = 10$ и $b = 2$, т.е., $a = 100$ и $a = 4$.
Ответ. 4; 100.

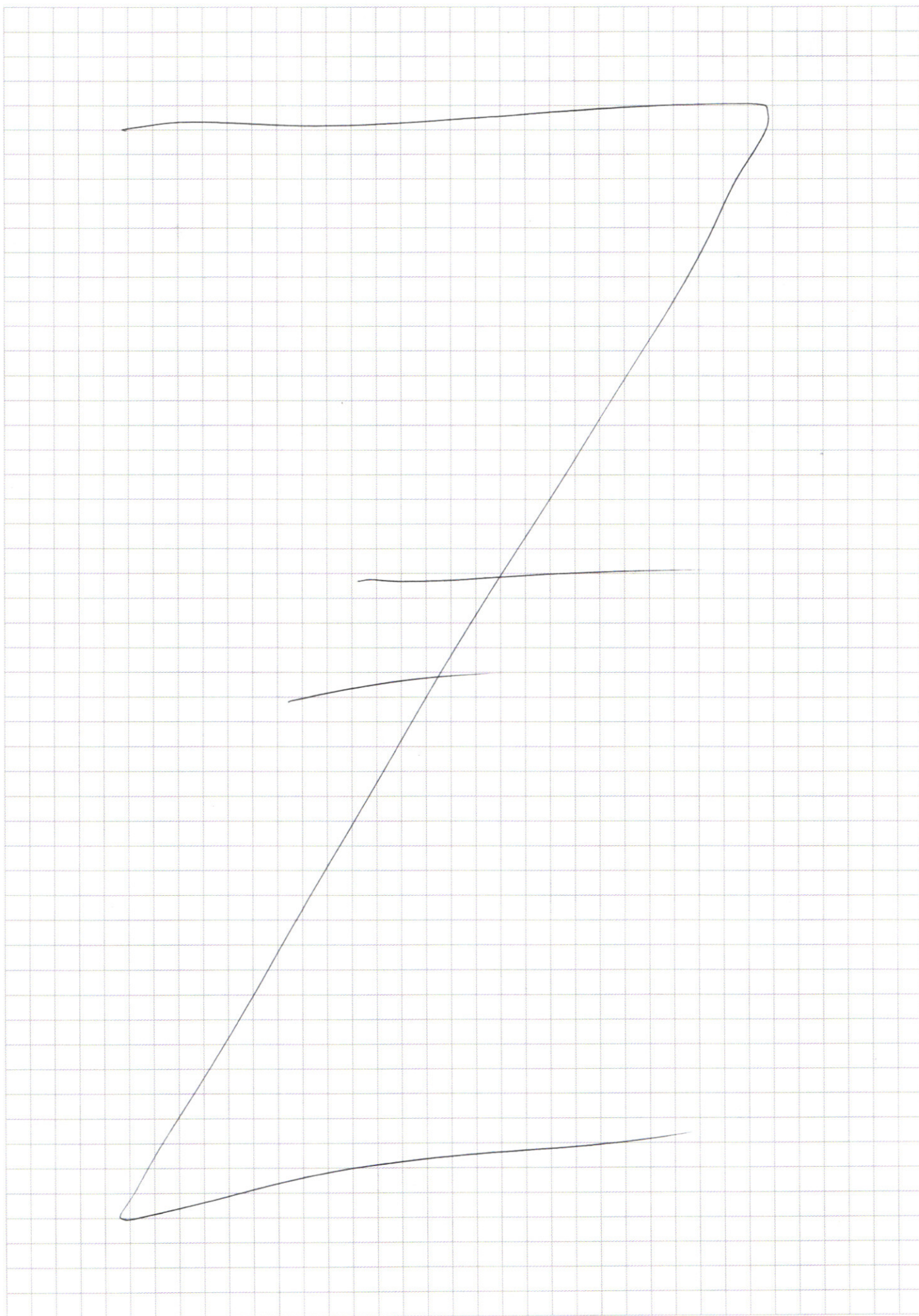
N2

$$\begin{aligned} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x &= \sin 7x + \sin 3x \\ 2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x &= \sqrt{2} \cos 10x \\ \sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) &= \cos 10x \\ \sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) &= (\cos 5x - \sin 5x) \cdot (\cos 5x + \sin 5x) \\ \cos 5x - \sin 5x &= 0 \\ \cos 5x &= \sin 5x \\ 5x &= \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

N3.

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right) \lg y = (-x) \lg(-xy), & -x \neq 0 \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y \leq 0 \\ x^2 + xy + 4x + 8y - 7y^2 \leq 0 \\ x = \frac{-y - 4 \pm \sqrt{3y - 4}}{2} \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16800 : 25 = 168 \cdot 4 = 400 + 200 + 82$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16875 : 25 = 675 \end{array}$$

$$675 : 5 = 135$$

$$120 + 15 = 135 : 5 = 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$625 \cdot 27 = 16875$$

abcdefgh

$$5^4 \cdot 3^3 = 16875$$

1359

I. 55553337

II. 55559311

$$12500 +$$

$$+ 4200 + 140 + 35 =$$

$$= 16875$$

$$4222$$

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$5; \dots$$

$$C_4^8 = \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$1 \cdot 5 = 5$$

$$3 \cdot 5 = 15$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$5 \cdot 5 = 25$$

$$9 \cdot 9 = 81$$

$$9 \cdot 5 = 45$$

$$9 \cdot 3 = 27$$

$$1 \cdot 9 = 9$$

$$C_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 6$$

$$C_2^3 = 3$$

$$C_4^8 = \frac{8!}{4!4!} \cdot C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} \cdot C_1^2 = \frac{2!}{1!1!} \cdot C_1^1$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos(5x+2x) + \cos(5x-2x) =$$

$$= \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x =$$

$$= 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\sin(5x+2x) + \sin(5x-2x) =$$

$$= \sin 5x \cos 2x + \cos 5x \sin 2x + \sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x =$$

$$= 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \frac{\cos^2 5x - \sin^2 5x}{(\cos 5x + \sin 5x)}$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x = \sin 5x$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \cos 2x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\cos 2x \geq 0$$

$$2 \cos^2 2x = 1 + 2 \sin 5x \cos 5x$$

$$2 \cos^2 2x = 1 + \sin 10x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$SK_1 = SK \cdot \frac{2}{2,5}$$

$$K = \frac{4}{5}$$

$$S_{KL} = S_1 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^2$$

$$x + 5 + y - x + 6 - y = 2x + 12 = 12 \quad (x=0) \quad = 4 \cdot \left(\frac{25}{16} \right) = \frac{25}{4} = 6,25$$

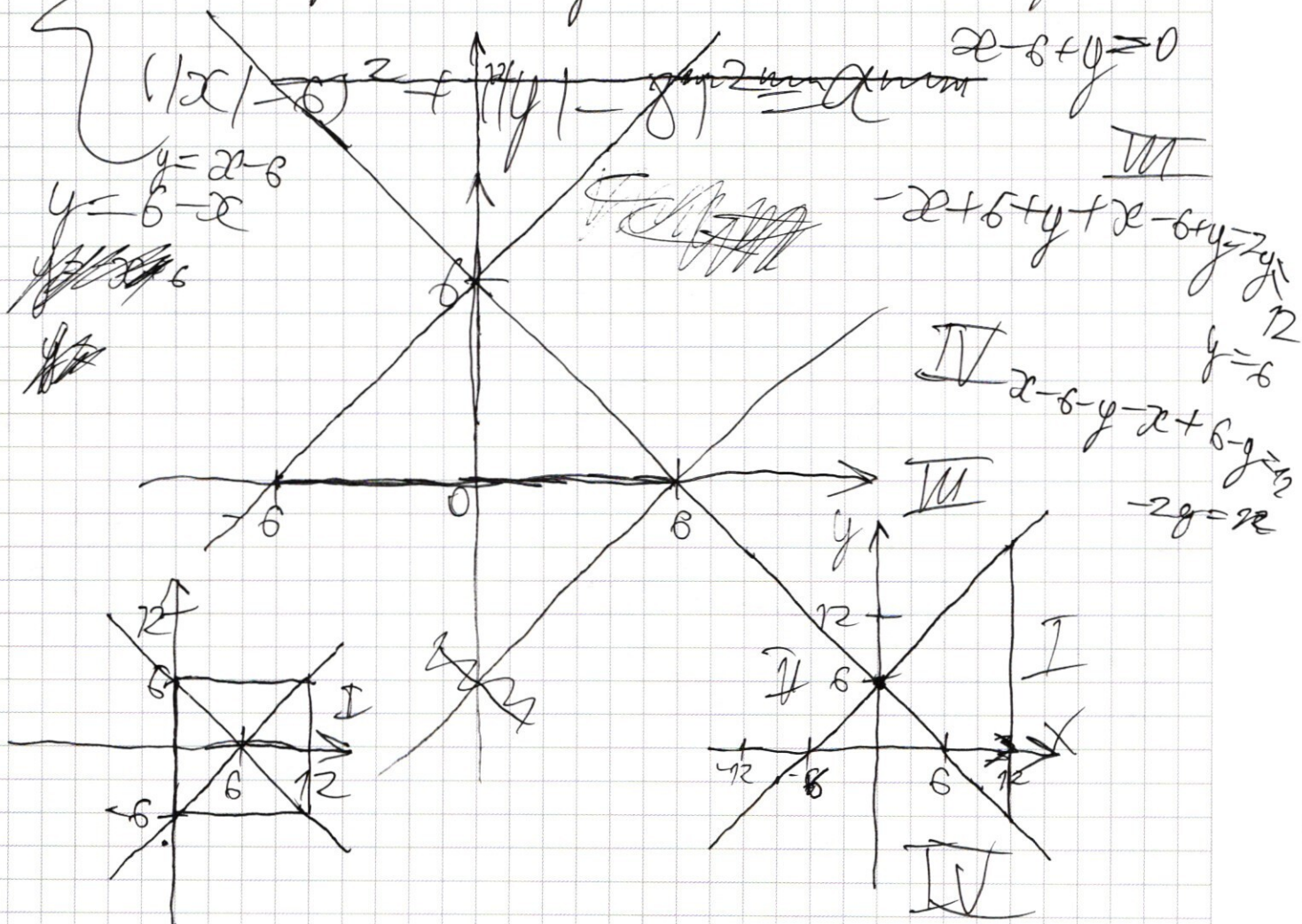
$$\int |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad \begin{matrix} 2x-2y \\ 2x-2y \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{matrix}$$

$2x - 2y$
 $20 = 12$
 $2x - 2y > 0$

$$x - 2 + y \geq 0$$

$$-x + 5 + y + x - 6 + y = 2y - 1$$

IV $x - 6 - y - x + 6 - y = 3$
 $-2y = 3$



$$(12x-6)^2 + (14y-8)^2 = a$$

$$a < 2 \quad \text{O}$$

$$a = 2 \quad \text{2}$$

$$\sqrt{4+36} = \sqrt{40}$$

$$2 < a \leq \sqrt{40} \quad \text{4}$$

$$\sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{260}$$

$$\sqrt{6^2+8^2} = 10$$

$$a < 2 \quad \text{O}$$

$$a = 2 \quad \text{2}$$

$$2 < a \leq \sqrt{40} \quad \text{4}$$

$$\sqrt{40} < a < 10 \quad \text{4}$$

$$a = 10 \quad \text{2}$$

$$10 < a < \sqrt{260} \quad \text{4}$$

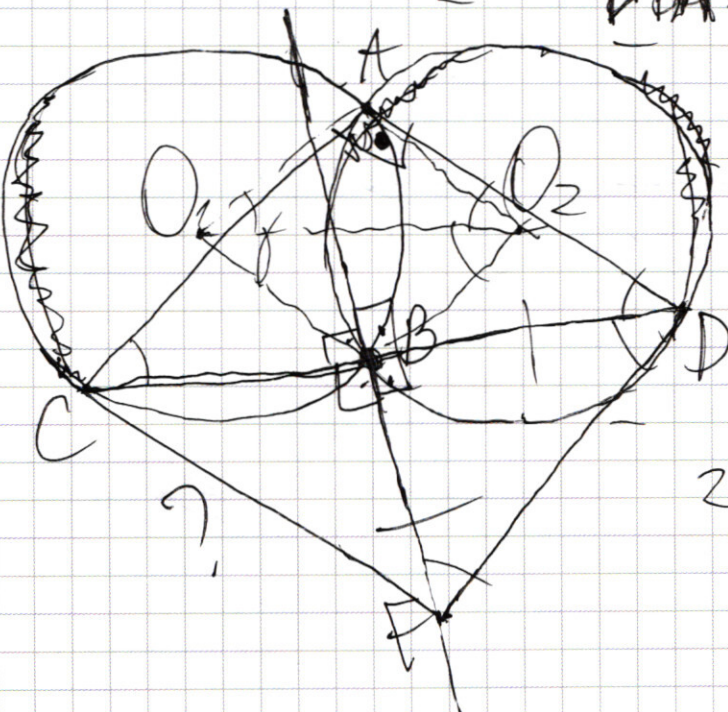
$$\sqrt{260} < a < 26 \quad \text{6}$$

$$a < 26 \quad \text{8}$$

$$\sqrt{260} \quad \text{4}$$

$$> \sqrt{260} \quad \text{O}$$

$$\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = \frac{\angle AOB}{2} = \angle BDA = 45^\circ$$



$$2r = 26$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left\{ \left(\frac{x^4}{y^2} \right) \lg y = (-x) \lg(-xy) \right.$$

$$\left. 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \right.$$

$$x^2 + xy + 4x + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x = \frac{-y-4 \pm \sqrt{y^2 + 8y + 16 - 4(8y - 2y^2)}}{2}$$

$$\begin{aligned} y^2 + 8y + 16 - 32y + 8y^2 &= \\ &= 9y^2 - 24y + 16 = \\ &= (3y - 4)^2 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-y-4 \pm \sqrt{(3y-4)^2}}{2}$$

$$x = \frac{2y-8}{2} = y-4$$

$$y \neq 0$$

$$x = \frac{-4y}{2} = -2y$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2} \right) \lg y = (4-y) \lg(-xy)$$

$$((y-4)^4)^{\lg y} \cdot \left(\frac{1}{y^2} \right)^{\lg y} = (4-y) \lg(-xy)$$

$$(4-y)^4 \lg y \cdot \left(\frac{1}{y^2} \right)^{\lg y} = (4-y) \lg(-xy)$$

$$(4-y)^{4 \lg y - \lg(2y)} = (y^2)^{\lg y}$$

$$4 \lg y - \lg(2y) = \lg y (4 - \lg(2y))$$

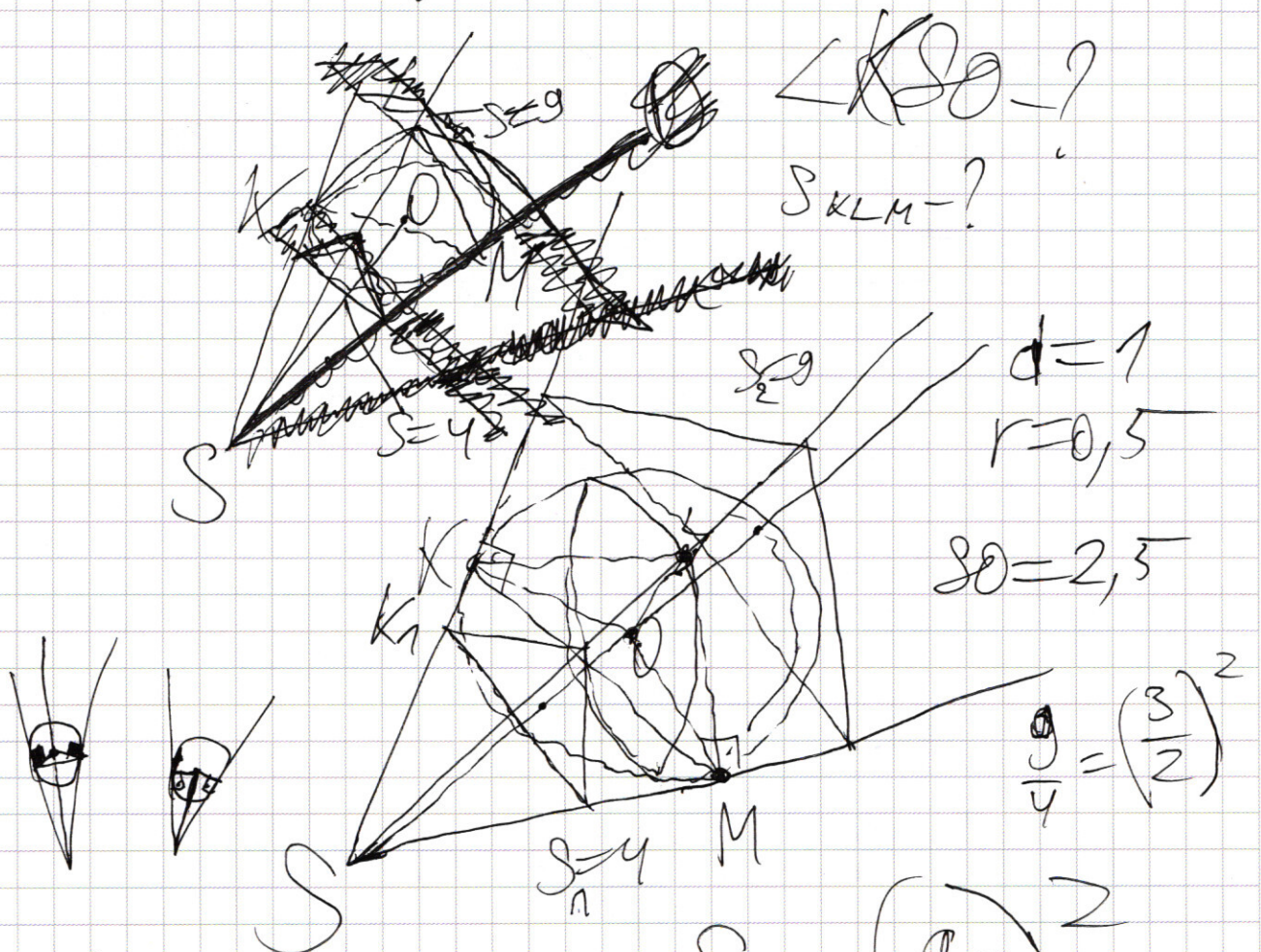
$$(4-y)^{\lg y (4 - \lg(2y))} = (y^2)^{\lg y}$$

$$(4-y)^{4 - \lg(2y)} = y^2$$

$$(4-y)^2 = \frac{\lg(4y)}{2} = y$$

$$\log_y 4-y = 2 - \frac{\lg(4y)}{2}$$

$$(4-y)^{4 - \lg(4-y)} = y^2$$



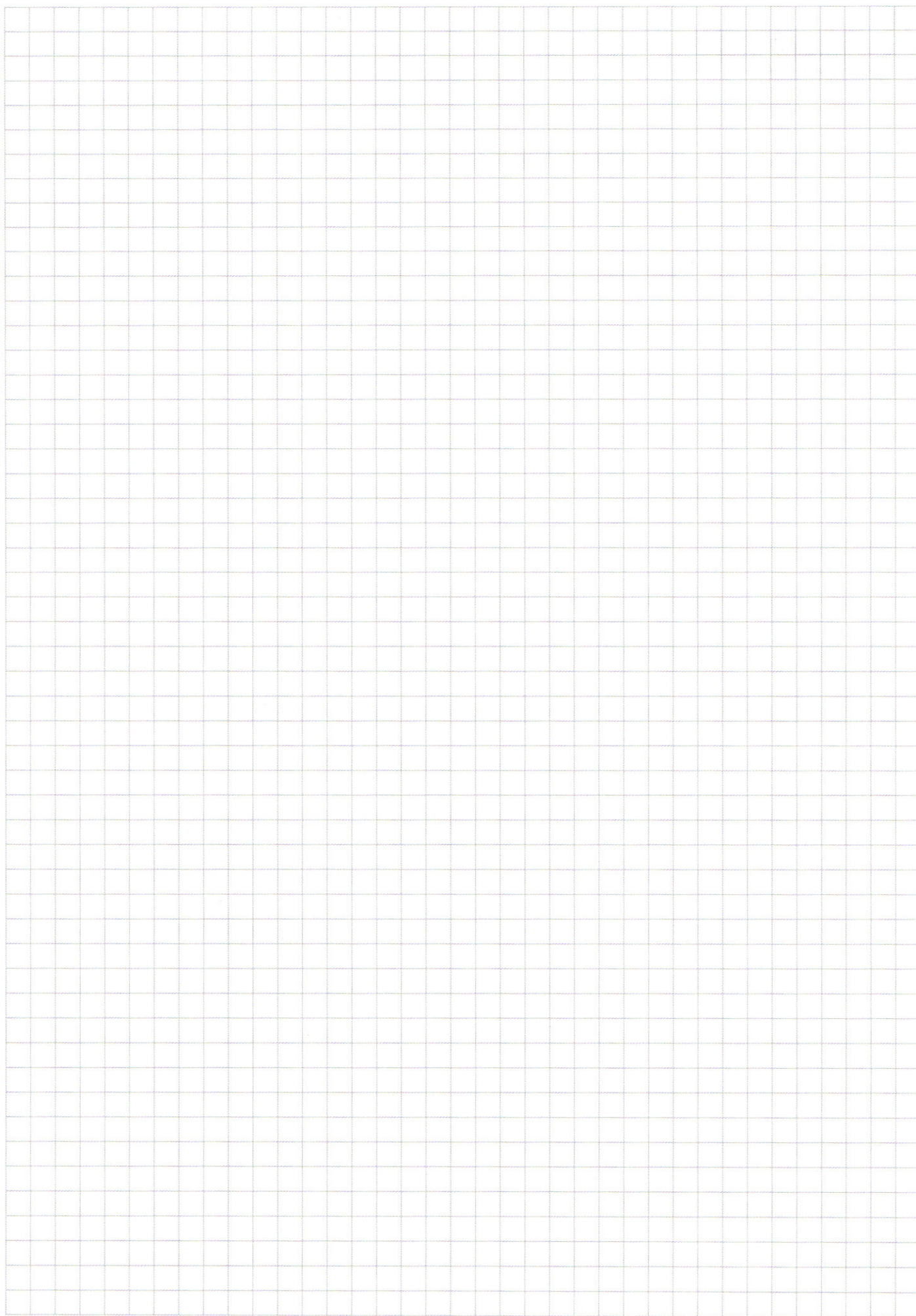
$(KLM) \perp SO$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2$$

$$SO=2,5 \quad \angle KSO = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$OK = r = 0,5$$

$$SK = \sqrt{2,5^2 - 0,5^2} = \sqrt{6,25 - 0,25} = \sqrt{6}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)