

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\frac{1+81-81}{2}$$

$$41 \cdot 81$$

$$B+25R$$

$$B \cdot$$

$$3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9 + 3^{10}$$

$$3^5 + 3(3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9)$$

$$x + 3^{10} = 3^5 + 3^6 x$$

$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = 3^5$$

$$bx = \frac{3^{10} - 3^5}{2}$$

$$3x = \frac{3^{11} - 3^6}{2}$$

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1}$$

$$a_1 (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) =$$

$$= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$$

$$\frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ 18 \\ + 18 \\ \hline 36 \\ 18 \\ + 18 \\ \hline 54 \\ 18 \\ + 18 \\ \hline 36 \\ 360 \\ - 36 \\ \hline 324 \\ + 106 \\ \hline 520 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

н/л.

Решение.

$16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \Rightarrow$ 8-значное число
фактически состоит из трех троек, четы-
рех пятерок и единицы ЛИБО из од-
вятки, тройки, четырех пятерок и
двух единиц.

1) набор: 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 1. Количество чисел
из фактных цифр: $\frac{8!}{3!4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 280$
(Считал так: $8!$ - кол-во чисел если бы все
цифры были разными, но мы посчитали до-
полнительно разное перестановкам троек
и пятерок между собой, поэтому делим
на кол-во таких перестановок)

2) набор 3, 3, 5, 5, 5, 5, 1, 1. Кол-во чисел:
 $\frac{8!}{4!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

(Считал из тех же соображений что и в 1)

Итого: $840 + 280 = 1120$

Ответ: 1120.

N2.

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x;$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x;$$

$$2(\cos 5x \cos 2x - \sin 5x \cos 2x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0;$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0;$$

$$\left[\cos 5x - \sin 5x = 0; \right.$$

$$\left. 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0; \right]$$

1) $\cos 5x - \sin 5x = 0$, $\cos 5x = \sin 5x$; $\because \cos 5x \neq 0$, умнож. $0 = 1 - \cos 10x$

$$\tan 5x = 1;$$

$$\Rightarrow 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

2) $2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$;

$$\Leftrightarrow 2 \cos 2x - 2 \left(\sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0; | :2$$

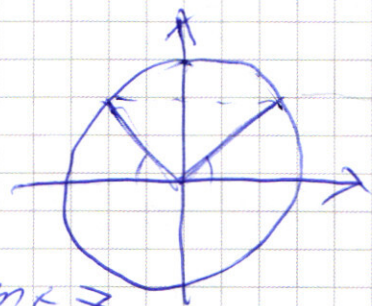
$$\cos 2x = \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(2x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left[2x + \frac{\pi}{2} = 5x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. 2x + \frac{\pi}{2} = \pi - \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} 3x &= \frac{\pi}{4} + 2\pi k', k' \in \mathbb{Z} \\ 7x &= \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]$$



см. стр. 3.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2 (продолж.)

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k'}{3}, k' \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{26} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k'}{3}, k' \in \mathbb{Z};$
 $\frac{\pi}{26} + \frac{2\pi m}{7}, m \in \mathbb{Z}.$

N3.

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{x}{y} \right)^{\log y} = (-x)^{\log(-x+y)} \quad ① \end{array} \right.$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0; \quad ②$$

$$② \quad 2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0;$$

$$0 = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$y_2 = \frac{-x+8 \pm (3x+8)}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = x+4 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Отв ③ ур.:

$$\begin{cases} y > 0 \\ -x > 0 \\ -xy > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \text{т.к. } y \text{ и } x \text{ разных знаков}$$

этот случай не подходит $\Rightarrow y = x+4$

~~$$2x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 0$$~~

①

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2 \lg y} = (-x)^{\lg(-x^2-4x)}$$

уравнения:

$$\begin{cases} x < 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$x \in (-4; 0)$$

Т.к. $f(t) = \lg t$ возрастает

$$\Rightarrow 2 \lg(x+4) \lg\left(\frac{x^2}{x+4}\right) = \lg(-x^2-4x) \lg(-x)$$

$$\Rightarrow 2 \lg(x+4) (\lg x^2 - \lg(x+4)) = (\lg(-x) + \lg(x+4)) \lg(-x)$$

Т.к. $\lg x^2 = 2 \lg|x|$, на ОДЗ $x < 0 \Rightarrow \lg x^2 = 2 \lg(-x)$
 $\lg(x+4) = a$; $\lg(-x) = b$

$$2a(2b-a) = (b+a)b$$

$$4ab - 2a^2 - b^2 - ab = 0;$$

$$-2a^2 - b^2 + 3ab = 0; \quad 2a^2 + b^2 - 3ab = 0;$$

$$2 \lg^2(x+4) + \lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \lg(x+4) = 0;$$

$$D = 9b^2 - 4b^2 = 5b^2$$

$$\begin{cases} a = \frac{3b - b\sqrt{5}}{4} \\ a = \frac{3b + b\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\lg(x+4) = \frac{\lg(-x)(3-\sqrt{5})}{4}$$

хорошо.

✓

✓

СМ ЛИСТ № 4

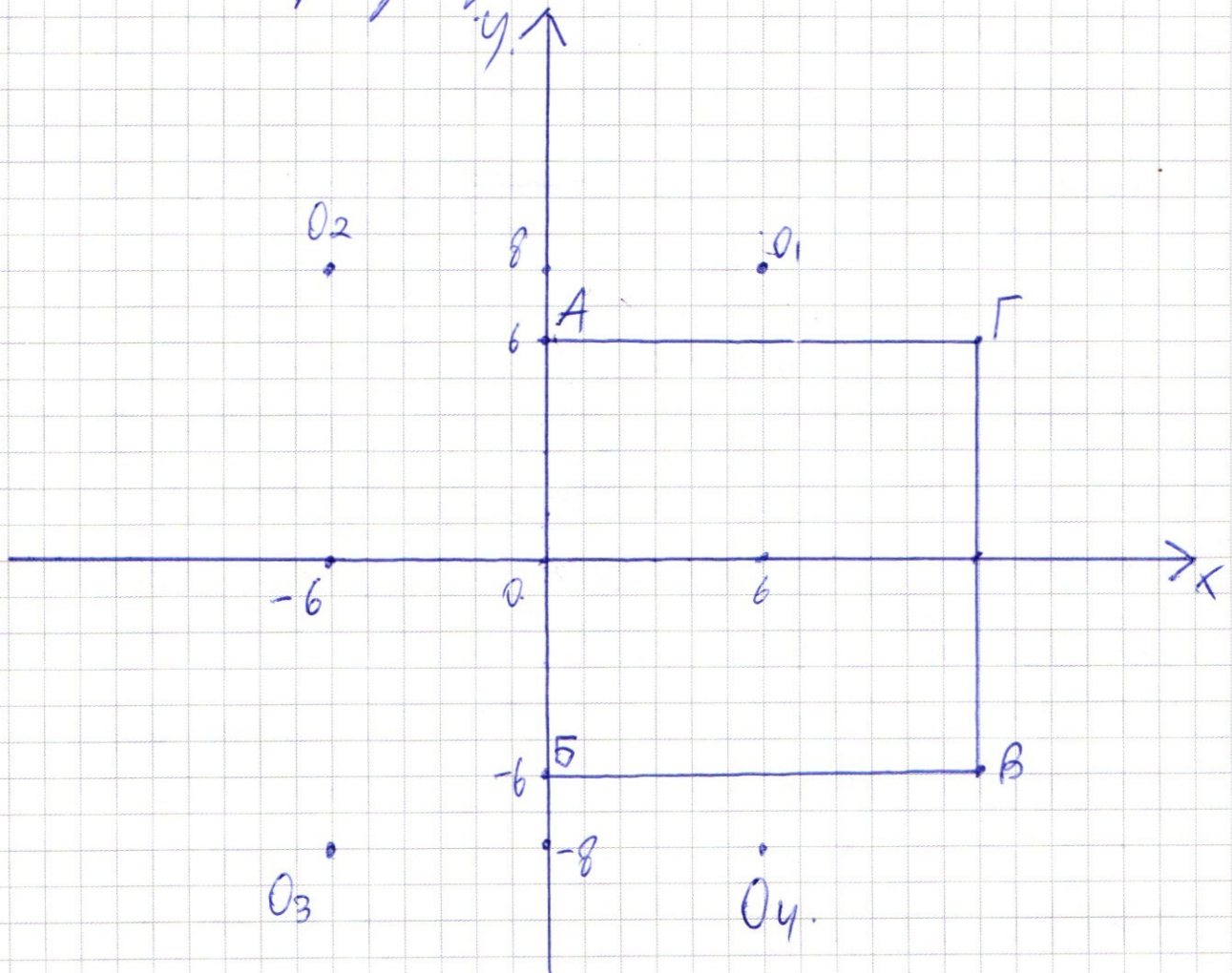
интер лист.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ ((x-6)^2 + (y-8)^2 = a \end{cases}$$

Множество реш. 1 ур. - квадрат с центром в $(6; 0)$ со стороной 12. 2 уравнения - четыре окружности симметричные отн. осям радиусов 5а.



каковы окр. $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4 с центрами в O_1, O_2, O_3 и O_4 соотв.

Первое ~~начальное~~ пересечение произойдет при $\alpha = 40^\circ$, окр. ω_1 и ω_4 симметрично относительно сторон кв., при этом ~~еще~~ ω_2 и ω_3 не окружат еще одну точку, т.к. расстояние от их центров до шин. точки кв. $\rho(O_2; A) = \rho(O_3; B) = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} \approx 6.32$. Далее при увеличении α окруж. имеют 4 реш., при $\alpha = 40^\circ$, ω_2 и ω_3 пройдут через точки А и В соотв., но в силу симметрии, ω_1 и ω_4 тоже пройдут через них, а также через В и Г, т.к. O_1 и O_4 лежат на сер. пер. ~~Окруж. ω_2 и ω_3 за симметрии~~
~~любая точка на этих окруж. равно~~
~~удалена от O_1 и O_4 , А и В~~
~~и от~~

До тех пор пока ω_1 и ω_4 имеют одну точку с окр. мы окруж. имеют еще двух реш., т.к. все 4 окружности охватят п. квадрата. В тот момент когда O_1 и O_4 перестанут иметь одну точку с окр., ω_2 и ω_3 все еще охватят пересекать все симметричные точки на АГ и БВ и еще на минимуме одной на АВ, либо каждая охватит пересекать АГ и БВ, все еще ≥ 2 решения.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$x = 5$$

$$y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + 5 \cdot 3^{81} - 5$$

$$85 + 5 \cdot 3^{81} - 3^5 - 4 \cdot 3^{81}$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + 3^{81} + 60 \cdot 3^x - x$$

$$x = 7$$

$$x = 1$$

$$[2; 5)$$

$$y \geq 3 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + 3^{81} - 1$$

$$x = 4 \quad \begin{cases} y \geq 3 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 243 \\ - 80 \\ \hline 163 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 243 \\ 3 \\ \hline 729 \\ - 720 \\ \hline 90 \end{array}$$

№5 (продолж.)

И наконец 2 решения будет когда w_1 кв. = Γ , а w_2 в точке B , тогда каждая окр. будет иметь 1 осев. точку с квадратами.

$$R = p(O_2; b) = p(O_3; \Gamma) = \sqrt{18^2 + 14^2}$$

$$\Rightarrow \alpha = R^2 = 18^2 + 14^2 = 520$$

Ответ: 4; 520.

№7.

$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$ ① Заметим что при $x \leq 4$ нет решений, также заметим что $f(x) = 85 + (3^{81} - 1)x$ растёт быстрее чем $g(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$, при этом обе функции монотонны. $\Rightarrow$ ~~если~~ при каком-то x , система представит выполняться, то и при больших x решение будет.

1) при $x = 5$: для $x = 5$ имеем:

$$\begin{cases} y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + 5 \cdot 3^{81} \end{cases}$$

$$85 + 5 \cdot 3^{81} - 3^5 - 4 \cdot 3^{81} = (3^{81} - 163) \text{ пар рещ.}$$

2) $x = 6$:

$$\begin{cases} y \geq 3^6 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + 6 \cdot 3^{81} \end{cases}$$

$$85 + 6 \cdot 3^{81} - 3^6 - 4 \cdot 3^{81} = (2 \cdot 3^{81} - 650) \text{ пар рещ.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для $x=5$: $3^{81} + 80 - 3^5$

Для $x=6$: $2 \cdot 3^{81} + 80 - 3^6$

Для $x=n$: $(n-4) \cdot 3^{81} + 80 - 3^n$ пар решений.

$(n-4) \cdot 3^{81} + 80 < 3^n$

при $n=81$: $77 \cdot 3^{81} + 80 < 3^{81}$ - неверно.

при $n=82$: $78 \cdot 3^{81} + 80 < 3^{82}$ - неверно

~~при $n=100$: $96 \cdot 3^{81} + 80 < 3^{100}$~~

при $n=90$: $86 \cdot 3^{81} + 80 < 3^{90}$ - верно.

при $n=85$: $81 \cdot 3^{81} + 80 < 3^{85}$ - неверно.

при $n=86$: $82 \cdot 3^{81} + 80 < 3^{86}$ - верно

$\Rightarrow$ максимальное n , (т.е. максимальный x) - 86.

Т.о. x принимает значения в $[5, 86]$
Отсюда посчитать кол-во пар (x, y)

$$\begin{aligned} \sum_{x=5}^{86} (3^x + 2 \cdot 3^x + \dots + 81 \cdot 3^x + 80 \cdot 81) - \\ - (3^5 + 3^6 + 3^7 + \dots + 3^{81}) &= 3^{81} \cdot 41 \cdot 81 + 80 \cdot 81 \cdot \frac{3^5(3^{81}-1)}{2} - \\ &= 81(3^{81} \cdot 41 + 80) - \frac{3^5(3^{81}-1)}{2} \end{aligned}$$

ответ: $81(3^{81} \cdot 41 + 80) - \frac{3^5(3^{81} - 1)}{2}$ пар (x, y)
 удовл. условию.

$\sqrt{3}$ (модуль)

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\log y} = -x^{\log(-x+y)}$$

т.к. $y = \log t$

$$\Rightarrow \log y (4 \log(-x) - 2 \log(x+y)) = (\log(-x) + \log y) \log(x);$$

$$\log(x+y) (4 \log(-x) - 2 \log(x+y)) = (\log(x) + \log y) \log(-x),$$

a b

$$a(4a - 2b) = (a + b)a$$

$$4ab - 2b^2 - a^2 - ab = 0;$$

$$3ab - 2b^2 - a^2 = 0;$$

$$3 \log(x+y) \log(-x) - 2 \log^2(x+y) - \log^2(-x) = 0$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0;$$

$$1 = 2b^2 - 8b^2 = b^2.$$

$$\begin{cases} a = \frac{3b+b}{2} = 2b \\ a = \frac{3b-b}{2} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log(-x) = 2\log(x+y) \\ \log(-x) = \log(x+y) \end{cases}$$

т.к. $y = F(t) = \log t$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = (x+y)^2 \\ -x = x+y \end{cases} \begin{cases} -x = x^2 + 6x + 16 \\ x = -2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^2}{4}\right)^{2\lg y} = (x+y)^{\lg(1-x+y)},$$

$$2\lg y + \lg y \cdot x^2 - 1 = (\lg(x+y) - \lg y) \cdot x;$$

$$2\lg y (2\lg y + x - 1) = \lg y \cdot x$$

$$2\lg y (x+y) \lg\left(\frac{x^2}{x+y}\right) = (\lg(1-x) + \lg(x+y)) \lg(1-x)$$

$$\left(\frac{x^4}{4^2}\right)^{\lg y} = -x \lg(x+y);$$

$$\lg y (4\lg(x) + 2\lg y) =$$

№ 9 (продолж.)

$$x^2 + 2x + 16 = 0. \quad 17.$$

$$x_{23} = \frac{-2 \pm \sqrt{81 - 64}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-2 - \sqrt{17}}{2}$$

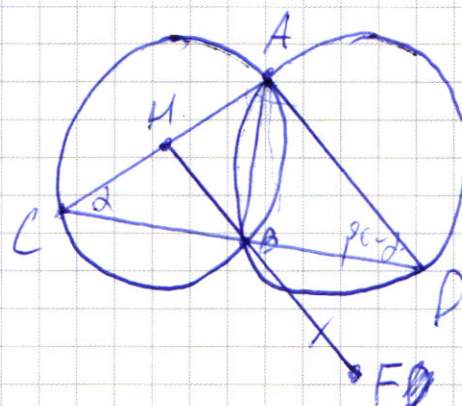
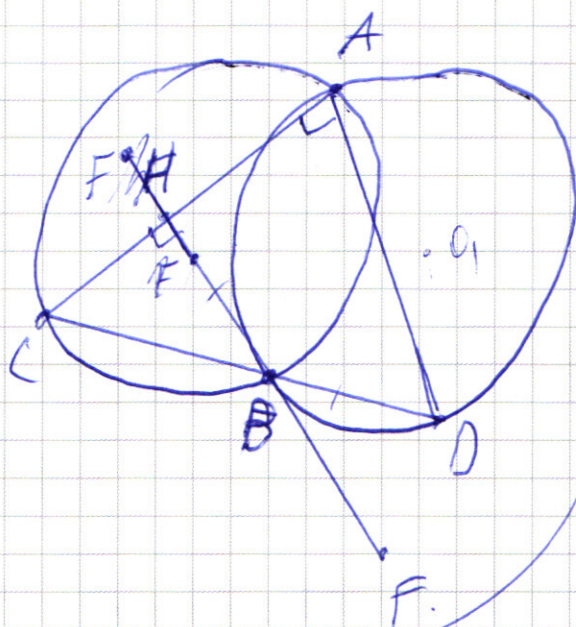
$$y_1 = -2 + 4 = 2.$$

$$y_2 = -\frac{-2 + \sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

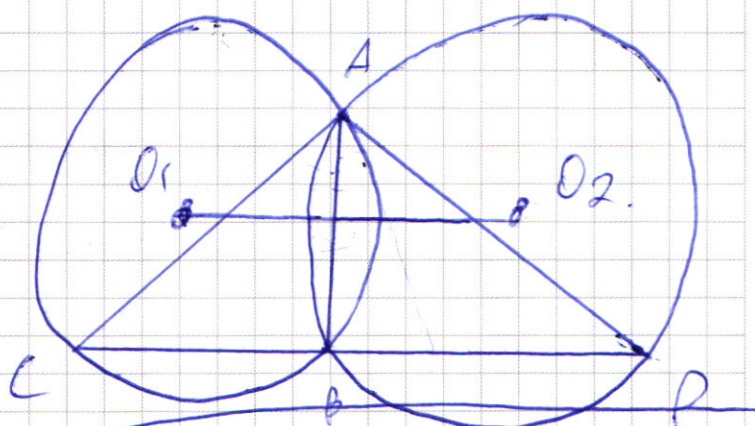
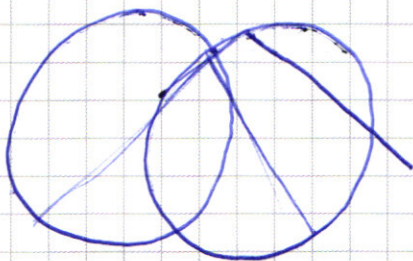
$$y_3 = -\frac{-2 - \sqrt{17}}{2} + 4 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

№ 6043.

ответ: $(-2; 2) \left(\frac{-2 + \sqrt{17}}{2}; \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \right)$



$CA \perp DA$.

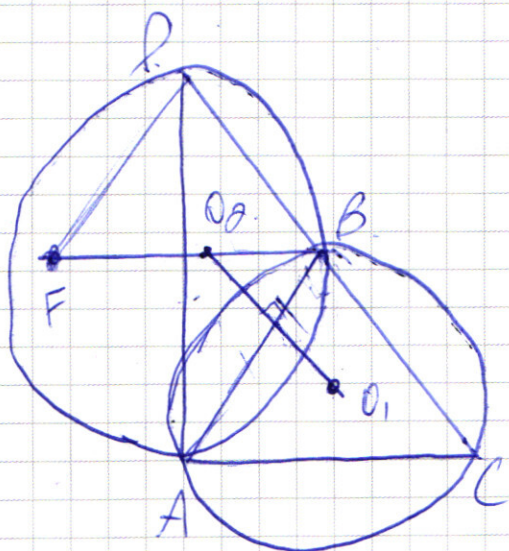


$CA \perp DA$.

$$y \geq 3 + 4 \cdot 3^6$$

$$y <$$

$$x = \frac{200}{x}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0;$$

$$2y^2 - y(x+8) - x^2 - 4x = 0;$$

$$0 = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2.$$

$$\begin{aligned} -x+6+y \\ x-6+y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x+6+y \\ -x+6-y \\ -2x+12 &= 12 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x-6-y \\ -x+6-y \\ -2y &= 12 \Rightarrow y = -6 \end{aligned}$$

$$\frac{x+8+3x+8}{4} = x+4$$

$$\frac{x+8-3x-8}{4} = -\frac{1}{2}x$$

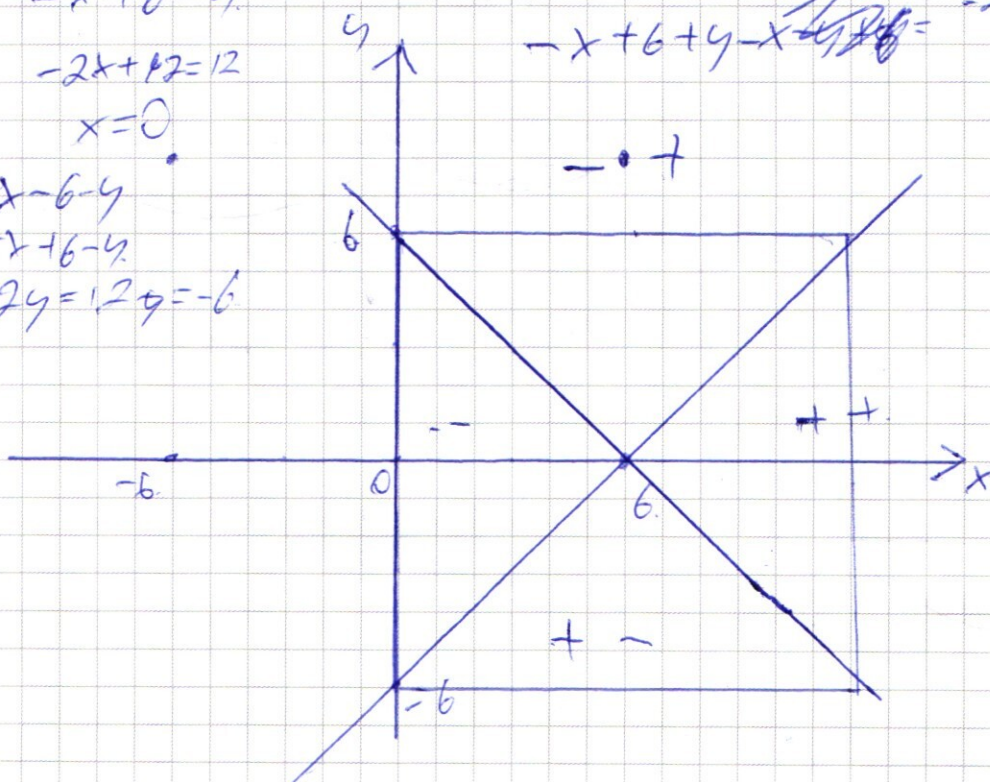
$$2x^2 + 16x + 32 - x^2 - 4x =$$

$$-x+6+y - x-4-y = -2x+12$$

$$x-6-y=0$$

$$y = x-6$$

$$y = -x+6$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

8 8 8 8 8 8 8 8

8.9⁷ - 8-значная.

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 3375 \overline{) 5} \\ 675 \overline{) 5} \\ 135 \overline{) 5} \\ 27 \overline{) 3} \\ 9 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ - 15 \\ \hline 18 \\ - 15 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \overline{) 5} \\ - 30 \\ \hline 37 \\ - 35 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \overline{) 5} \\ - 5 \\ \hline 17 \\ - 15 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \overline{) 5} \\ - 10 \\ \hline 35 \end{array}$$

$$16875 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 625 \\ \hline 4375 \\ 1250 \\ \hline 174375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 625 \\ \hline 4375 \\ 1250 \\ \hline 16875 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 70 \\ 4 \\ \hline 280 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + \cos(5x+2x) \\ + \cos(5x-2x) \end{array} = 2 \cos 5x \cos 2x$$

$$\begin{array}{l} + \sin(5x+2x) \\ + \sin(5x-2x) \end{array} = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times 20 \\ \hline 840 \\ + 280 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$2(\cos 2x)(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)$$

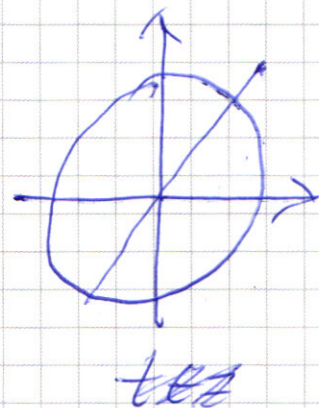
$$\sqrt{2} \left(\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\sin \frac{\pi}{4}} \cos 5x + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\cos \frac{\pi}{4}} \sin 5x \right) = \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{4} + 5x \right) \right)$$

$$2 \cos 2x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 5x \right) = \cos 10x;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \cos \beta \sin \alpha.$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha.$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$



23

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0;$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x^2 - 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(y - 4) + 2y(y - 4) = 0$$

$$D = (y - 4)^2 + 8y(y - 4) =$$

$$= (y - 4)(y - 4 + 8y) =$$

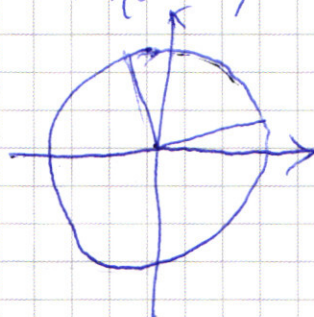
$$= y^3 - 78y + 16 + 8y^2 - 32y =$$

$$= 8y^2 - 110y + 16$$

$$y^2 - 8y + 16 + 8y^2 - 32y - 8y^2 - 6y - 16 =$$

$$= 15y^2 - 46y + 16 = 0;$$

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha.$$



$$2x + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} - 5x;$$

$$7x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = 4\frac{\pi}{4}.$$