МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра

Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача. 1

1) Разложим 16875 на множители: $16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

2) т.к. $5\cdot5>9$ и $5\cdot3>9$, то эти произведения нельзя заменить одной цифрой. Т.к. $3\cdot3=9$, то в числе может быть либо две цифры 3, либо одна цифра 9

3) Т.к. только цифра 1 не меняет произведение, то доведем количество цифр до 8 единицами.

4) Тогда $16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot1$ либо $16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot9\cdot3\cdot1\cdot1$

5) Рассмотрим первый набор. Под пятерки выбирается 4 позиции из 8, значит, вариантов выбора C_4^8, под тройки выбирается 3 позиции из оставшихся 4, значит, вариантов C_3^4, единица занимает единственное свободное место → 1 вариант. Т.о. всего чисел $C_4^8\cdot C_3^4\cdot1 =$
$= \frac{8!}{4!\cdot4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot1!}\cdot1 = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 280$

6) Аналогично рассмотрим второй набор. Для пятерок 4 места из 8 → C_4^8 вариантов, для 9 - 1 место из 4 → C_1^4 вариантов, для тройки - 1 из 3 → C_1^3 вариантов, для единиц оставшиеся места - 1 вариант. Т.о. всего чисел $C_4^8\cdot C_1^4\cdot C_1^3\cdot1 = \frac{8!}{4!4!}\cdot\frac{4!}{3!\cdot1!}\cdot\frac{3!}{2!1!}\ \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{2} = 840$

7) Значит, общее количество чисел $280+840=1120$

Ответ: 1120

Задание. 5

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

1) Рассмотрим первое уравнение

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ x-6-y+x-6+y = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \\ x-6-y-x+6-y = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \\ -x+6+y+x-6+y = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \\ -x+6+y-x+6-y = 12 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq -x+6 \\ x = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq x-6 \\ y < -x+6 \\ y = -6 \end{cases} \\ \begin{cases} y > x-6 \\ y \geq -x+6 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y > x-6 \\ y < -x+6 \\ x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

2) Рассмотрим второе уравнение

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-6)^2+(y-8)^2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ (x-6)^2+(-y-8)^2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ (-x-6)^2+(y-8)^2 = a \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (-x-6)^2+(-y-8)^2 = a \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ (x-6)^2+(y-8)^2 = a \text{ - окружность с центром } O_1(6;8) \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \\ (x-6)^2+(y+8)^2 = a \text{ - центр } O_2(6;-8) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \\ (x+6)^2+(y-8)^2 = a \text{ - центр } O_3(-6;8) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ (x+6)^2+(y+8)^2 = a \text{ - центр } O_4(-6;-8) \end{cases} \end{array}\right.$$

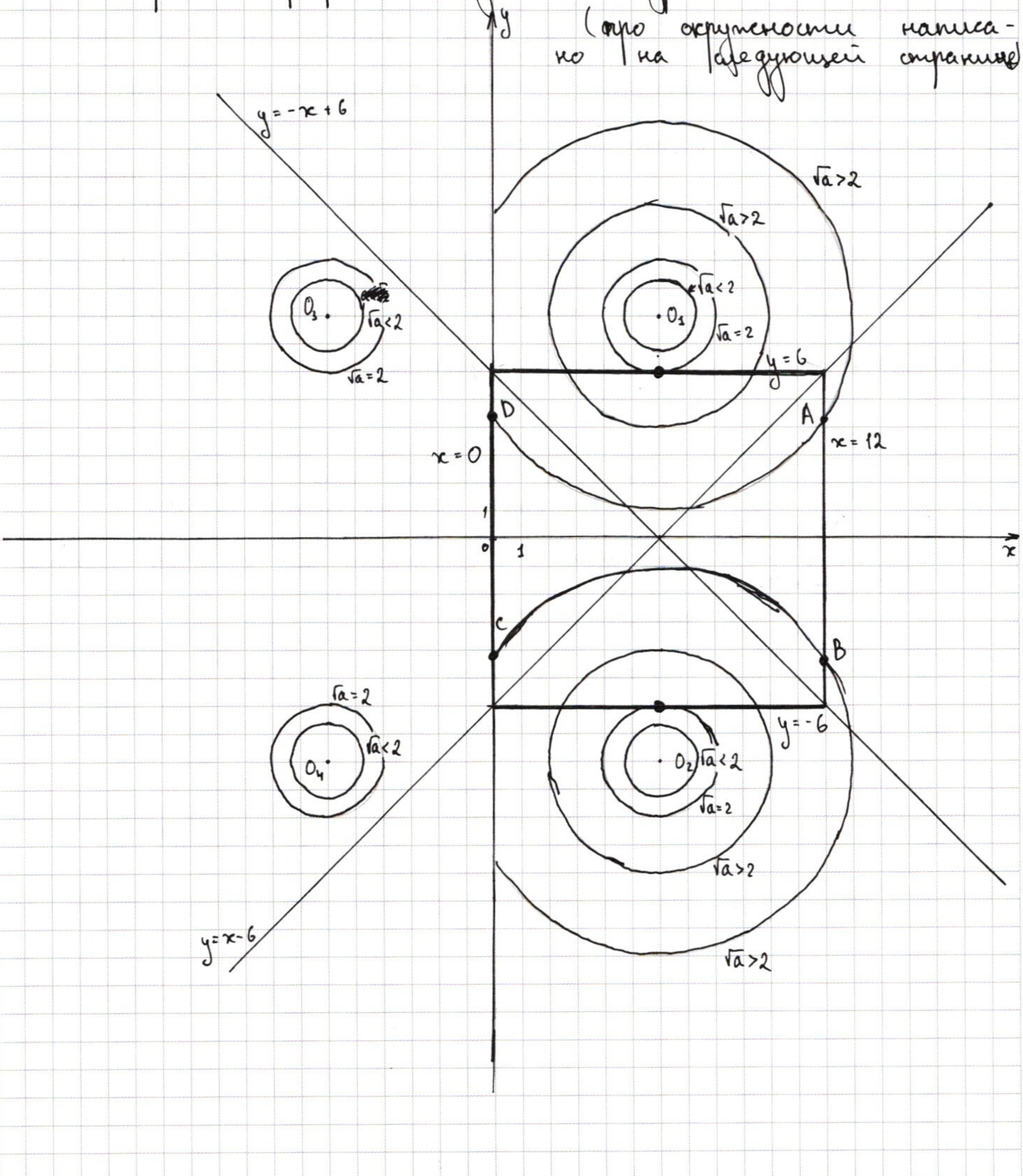
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Построим графики полученных уравнений

(про окружности написано на следующей странице)



4) Радиусы всех окружностей равны $\sqrt{a}$. Рассмотрим различные его значения.

Если $\sqrt{a} < 2$, решений нет

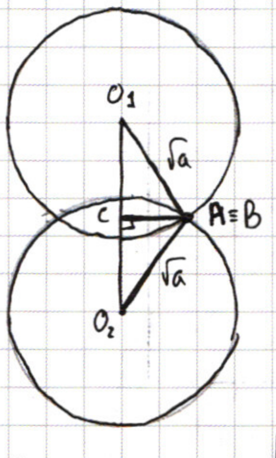
Если $\sqrt{a} = 2$, то два решения $(6;6)$ и $(6;-6)$

Так как условия существования окружностей с центрами O_3 и O_4 $x<0$, то их можно не рассматривать, т.к. все решения второго уравнения все решения лежат в области $x \geq 0$

Если $\sqrt{a} > 2$, то решений четыре *если $\sqrt{a} > \sqrt{232}$ решений снова нет

При $\sqrt{a} > 2$ два решения будет, если точка A совпадет с точкой B, а точка C совпадет с точкой B

Схематично эта ситуация такова:



т.к. O_1AO_2 - равнобедренный, то A - лежит на серединном перпендикуляре к O_1O_2

Серединный перпендикуляр к O_1O_2 - это Ox, значит $A(12;0)$

Тогда $\sqrt{a} = O_2A = \sqrt{(12-6)^2 + (0-8)^2} = 10$

5) Значит, два решения при $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$ и

$\sqrt{a} = 10 \Rightarrow a = 100$

Ответ: 2; 100

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание. 2

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$

$\frac{1}{2}\cos\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} - \sqrt{2}\cos 10x = \frac{1}{2}\sin\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2} \quad |\cdot 2$

$\cos 5x\cos 2x - 2\sqrt{2}\cos 10x = \sin 5x\cos 2x$

$\cos 5x\cos 2x - \sin 5x\cos 2x - 2\sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 0$

$\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) - 2\sqrt{2}(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) = 0$

$(\cos 5x - \sin 5x)(\cos 2x - 2\sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad |: \cos 5x \\ \cos 2x - 2\sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) = 0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}1 - \operatorname{tg} 5x = 0 \\ \cos 2x = 2\sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)\end{array}\right.$

~~Рассмотрим второе уравнение. Пусть $t = \cos 5x$, тогда $\sin 5x = \pm\sqrt{1-t^2}$~~

~~1) Рассмотрим $\sin 5x = \sqrt{1-t^2}$~~

~~$\cos 5x + \sin 5x = t + \sqrt{1-t^2}$. Пусть $f(t) = t + \sqrt{1-t^2}$, тогда~~

~~$f'(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t) = 1 - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2} - t}{\sqrt{1-t^2}}$~~

~~Найдем нули производной: $t = \pm 1; 0$~~ ~~$-1 \; - \; 0 \; - \; 1$ max min~~

~~Значит, $f_{min} = f(1) = 1 + \sqrt{1-1} = 1$, $f_{max} = -1$~~

~~2) Рассмотрим $\sin 5x = -\sqrt{1-t^2}$~~

~~Пусть $f(t) = t - \sqrt{1-t^2}$, тогда $f'(t) = \frac{\sqrt{1-t^2}+1}{\sqrt{1-t^2}}$~~

~~Найдем нули производной: $t = \pm 1$~~ ~~$-1 \; + \; 1$ min max~~

~~$f_{min} = f(-1) = -1 - \sqrt{1-1} = -1$~~

~~$f_{max} = f(1) = 1 - \sqrt{1-1} = 1$~~

~~Таким образом, если $\sin 5x$ не отрицательный (ра-~~

вен корню), то $(\cos 5x + \sin 5x) \geq 1$, $2\sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x) \geq 2\sqrt{2}$, уравнение ~~не име~~ $\cos 2x = 2\sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)$ не имеет решений, т.к. $\cos 2x \leq 1$.

Если $\sin 5x$ не положительный уравнение может иметь решения.

Так как замена $\sin 5x = t$ или $\cos 5x = t$ были бы одинаковы, то $\cos 5x$ тоже не положительный. Тогда
$\cos 2x = -2\sqrt{2}(|\cos 5x| + |\sin 5x|)$

но замена $|\cos 5x| = t$, $|\sin 5x| = \sqrt{1-t^2}$ такая же, как $\cos 5x = t$, $\sin 5x = \sqrt{1-t^2}$, значит {

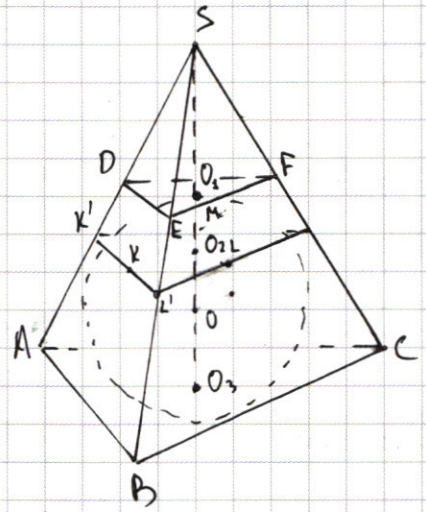
Из первого уравнения совокупности $\operatorname{tg} 5x = 1$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$

Задача. 4.



Дано: трехгранный угол S

вписанная сфера

K, L, M - точка касания

$S_1 = 4$

$S_2 = 9$

Найти: $\angle KSO$, S_{KLM}

Решение

1) Проведем (ABC), касающуюся сферы снизу, получим пирамиду SABC, описанную около сферы

2) Пусть (DEF) - плоскость, касающаяся сферы сверху

3) Тогда $S_2 = S_{ABC}$, $S_1 = S_{DEF}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) Пусть $(KLM) \cap SA = K'$, $SO \cap (DEF) = O_1$, $SO \cap (KLM) = O_2$, $SO \cap (ABC) = O_3$

~~5) т.к. $(DEF) \parallel (ABC)$ и $DO_1 \subset (ASO_3)$, $AO_3 \subset (ASO_3)$, то $DO_1 \parallel AO_3$.~~

5) Из $\triangle SDO_1$ и SAO_3

$\left.\begin{array}{l} \angle ASO_3 - \text{общий} \\ \angle SO_1D = \angle SO_3A = 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \triangle SO_1D \sim \triangle SO_3A \Rightarrow \frac{SO_1}{SO_3} = \frac{SD}{SA}$

6) т.к. $(ABC) \parallel (DEF)$ и $DE \subset (ASB)$, $AB \subset (ASB)$, то есть не скрещивающиеся, то $DE \parallel AB$

7) Из $\triangle SDE$ и SAB;

$\left.\begin{array}{l} \angle DSE - \text{общий} \\ \angle SDE = \angle SAB \text{ при } DE \parallel AB \end{array}\right| \Rightarrow \triangle SDE \sim \triangle SAB \Rightarrow \frac{SD}{SA} = \frac{SE}{SB}$

Аналогично $\triangle SEF \sim \triangle SBC$ и $\triangle SFD \sim \triangle SCA \Rightarrow$ ~~$\frac{SE}{SB} = \frac{EF}{BC}$~~

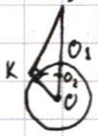
Отсюда $\left.\begin{array}{l} \frac{SD}{SA} = \frac{DF}{AC} = \cancel{\frac{SE}{EB}}\ \frac{DE}{AB} \\ \frac{SF}{SC} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC} \end{array}\right| \Rightarrow \frac{DF}{AC} = \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$

8) Значит, $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = k^2$

$k = \frac{DE}{AB} = \frac{SD}{SA} = \frac{SO_1}{SO_3} = \frac{SO_1}{SO_1 + 2R}$

$k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SO_1}{SO_1 + 2R} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3SO_1 = 2SO_1 + 4R$

$SO_1 = 4R$

9) 

т.к. K – точка касания, то $\angle SKO = 90^\circ$

значит, $\sin KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{SO_1 + R} = \frac{R}{4R + R} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin 0{,}2$

10) Из $\triangle SKO_2$: $SO_2 = KS \cdot \cos \angle KSO = \sqrt{SO^2 - OK^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}} =$

$= \sqrt{25R^2 - R^2} \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = R\sqrt{24} \cdot \frac{\sqrt{24}}{5} = 4{,}8R$

11) $\frac{S_{(KLM)}}{S_{ABC}} = \left(\frac{K'L'}{AB}\right)^2 = \left(\frac{SO_2}{SO_3}\right)^2 = \left(\frac{4{,}8R}{2R + 4R}\right)^2 = \left(\frac{4{,}8}{6}\right)^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64$

$S_{(KLM)} = S_{ABC} \cdot 0{,}64 = 9 \cdot 0{,}64 = 5{,}76$

Ответ: $\arcsin 0{,}2$; $5{,}76$

Задание. 6

Дано:

Окр$_1$(O_1; 13)

Окр$_2$(O_2; 13)

Окр$_1$ ∩ Окр$_2$ = A, B

C ∈ Окр$_1$

D ∈ Окр$_2$

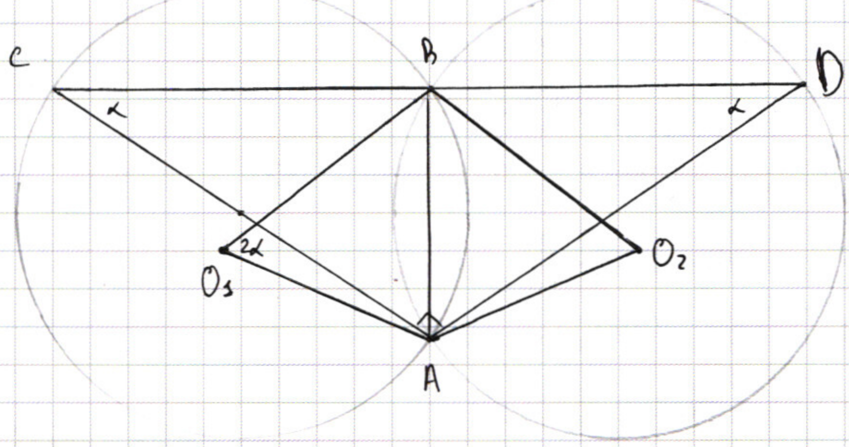
B ∈ CD

$\angle CAD = 90°$

$BF \perp CD$

$BF = BD$

Найти: CF



Решение

1) Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle AO_1B = 2\alpha$, как центральный

2) т.к. BA – общая $BO_1 = O_1A = AO_2 = BO_2 = 13$, то $\triangle BO_1A = \triangle BO_2A$

значит $\angle BO_2A = \angle BO_1A = 2\alpha$

3) $\angle BDA = 0{,}5 \angle BO_2A = \alpha$ как вписанный

4) Из $\triangle CAD$: $2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45° \Rightarrow CA = AD$

тогда $2\alpha = 90°$, значит $\angle O_1AB = 45°$, $\angle O_2AB = 45°$,

значит, $O_1 \in CA$ и $O_2 \in DA$, иначе $\angle CAD = 90°$, но

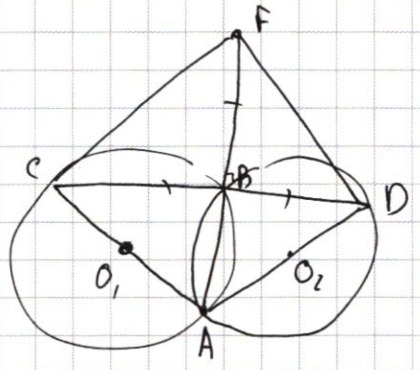
$\angle CAD < \angle O_1AB + \angle O_2AB$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)



тогда $AB \perp CD$, т.к. опирается на диаметр, значит B - середина CD

$CD = 2R\sqrt{2} = 26\sqrt{2} \Rightarrow BD = BF = 13\sqrt{2}$

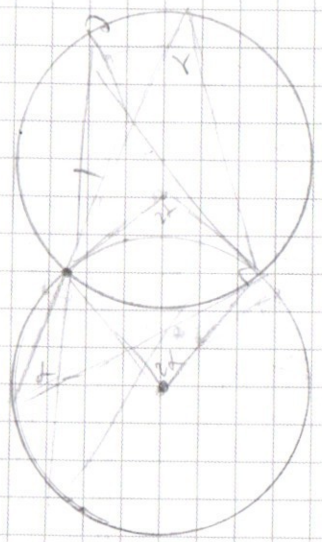
$CB = BD = 13\sqrt{2}$

$CF = \sqrt{CF^2 + CB^2} = 26$

Ответ: а) 26

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$-\frac{\sqrt2}{4} \le t + \sqrt{1-t^2} \le \frac{\sqrt2}{4}$

$t + \sqrt{1-t^2} \le \frac{\sqrt2}{4}$

$\sqrt{1-t^2} \le \frac{\sqrt2}{4} - t$

$\begin{cases} \frac{\sqrt2}{4} - t \ge 0 \\ 1-t^2 \ge 0 \\ 1-t^2 \le \frac{1}{16} - \frac{\sqrt2}{2}t + t^2 \end{cases}$

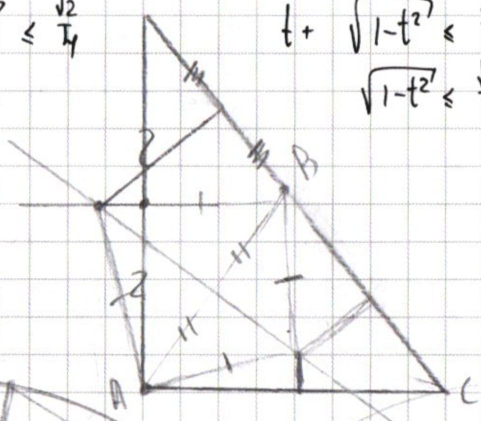
$2t^2 - \frac{\sqrt2}{2}t - \frac{15}{16} \le 0$

$AO = BO = CO$

$AO_2 = BO_2 = CO_2$

$D = \frac12 + 4 \cdot \frac{15}{16} \cdot 2 = \frac12 + \frac{15}{2} = 8$

$t = \frac{\frac{\sqrt2}{2} \pm 2\sqrt2}{4}$ $t_1 = \frac{5\sqrt2}{8}$



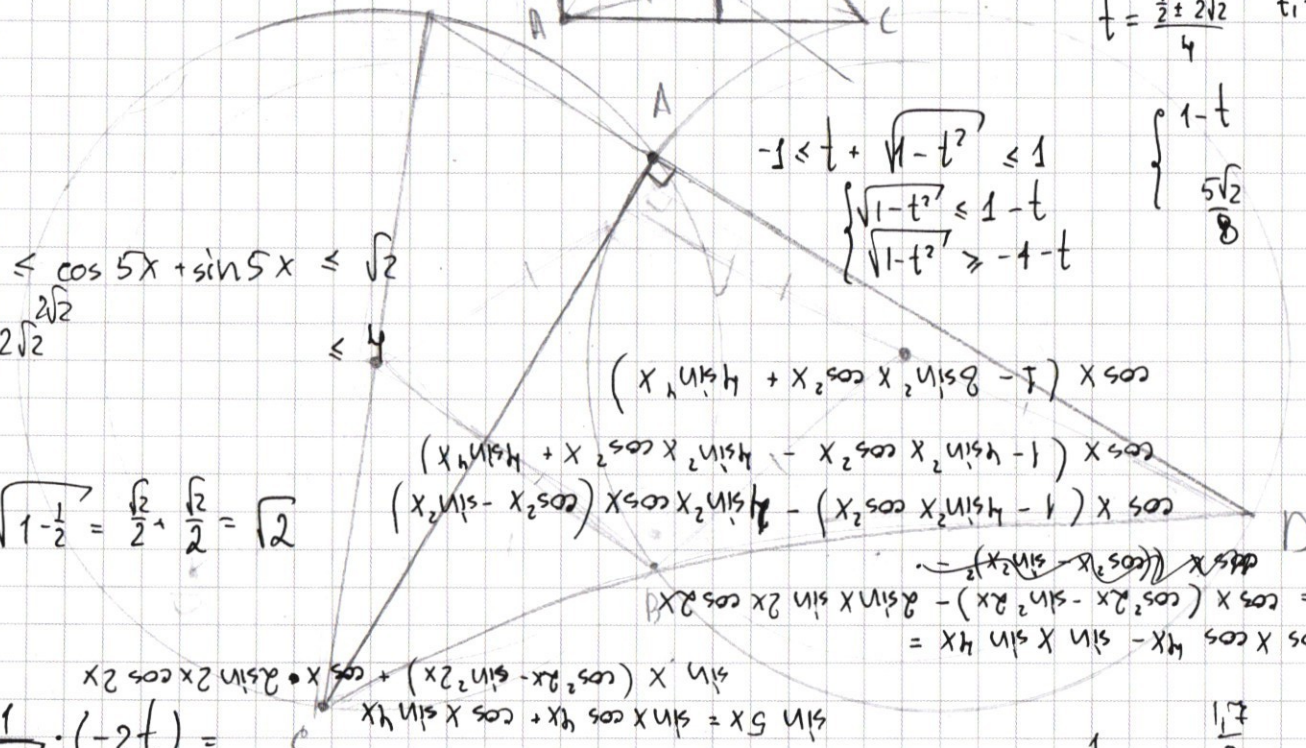
$-1 \le 2\sqrt2\, a \le 1$

$-\frac{\sqrt2}{4} \le a \le \frac{1}{2\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{4}$

$-1 \le t + \sqrt{1-t^2} \le 1$

$\begin{cases} \sqrt{1-t^2} \le 1-t \\ \sqrt{1-t^2} \ge -1-t \end{cases}$

$\begin{cases} 1-t \\ \frac{5\sqrt2}{8} \end{cases}$



$-1 \le \cos 5x + \sin 5x \le \sqrt2$

$-2\sqrt2 \quad 2\sqrt2 \quad \le 4$

$\cos x\,(1 - 8\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^4 x)$

$\cos x\,(1 - 4\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + 4\sin^4 x)$

$\cos x\,(1 - 4\sin^2 x\cos^2 x) - 4\sin^2 x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$

$\cancel{\cos x\,((\cos^2 x - \sin^2 x)^2 -}$

$= \cos x\,(\cos^2 2x - \sin^2 2x) - 2\sin x \sin 2x \cos 2x$

$\cos x \cos 4x - \sin x \sin 4x =$

$\sin 5x = \sin x \cos 4x + \cos x \sin 4x$

$\sin x\,(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + \cos x \cdot 2\sin 2x \cos 2x$

$f_{min} = -1 \; ? \; 1$

$f_{max} = \frac{\sqrt2}{2} + \sqrt{1-\frac12} = \frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2} = \sqrt2$

$t + \sqrt{1-t^2}$

$f'(t) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot (-2t) =$

$= 1 - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{1-t^2} - t}{\sqrt{1-t^2}}$

$2\sqrt2\,(\sin 5x + \cos 5x) = \cos 2x$

$-1 \quad + \quad \frac{\sqrt2}{2} \quad - \quad 1$

min max min

$1-t^2 = t^2$

$1-t^2 = t^2$

$2t^2 = 1$

$1 \quad \frac{1,7}{2}$

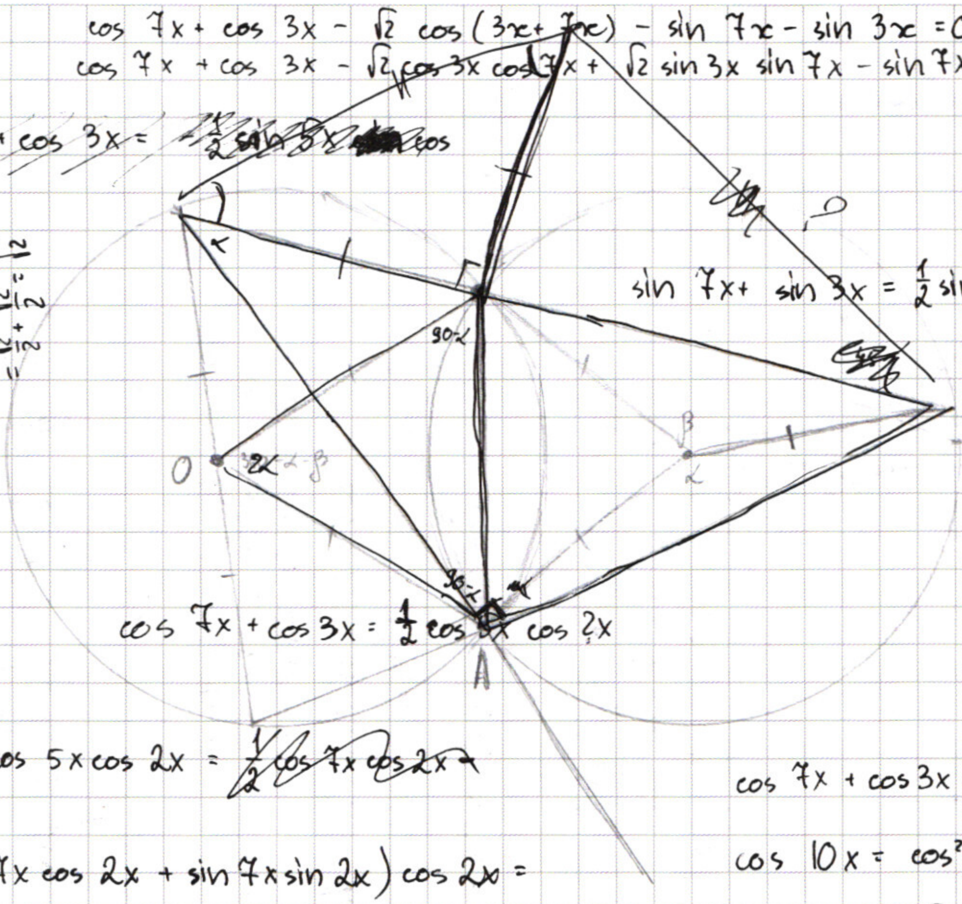
$\sqrt{1-\frac34} - \frac{\sqrt3}{2} = \frac12 - \frac{\sqrt3}{2}$

$t^2 = \sqrt{\frac12} = \frac{\sqrt2}{2}$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos(3x + 7x) - \sin 7x - \sin 3x = 0$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 3x \cos 7x + \sqrt{2}\sin 3x \sin 7x - \sin 7x - \sin 3x = 0$

$\cos 7x + \cos 3x = \cancel{-\frac{1}{2}\sin 5x \cos}$



$\sin 7x + \sin 3x = \frac{1}{2}\sin 5x \cos 2x$

$\frac{1}{2}\sin 5x$

$\cos 7x + \cos 3x = \frac{1}{2}\cos 5x \cos 2x$

$\frac{1}{2}\cos 5x \cos 2x = \cancel{\frac{1}{2}\cos 7x \cos 2x}$

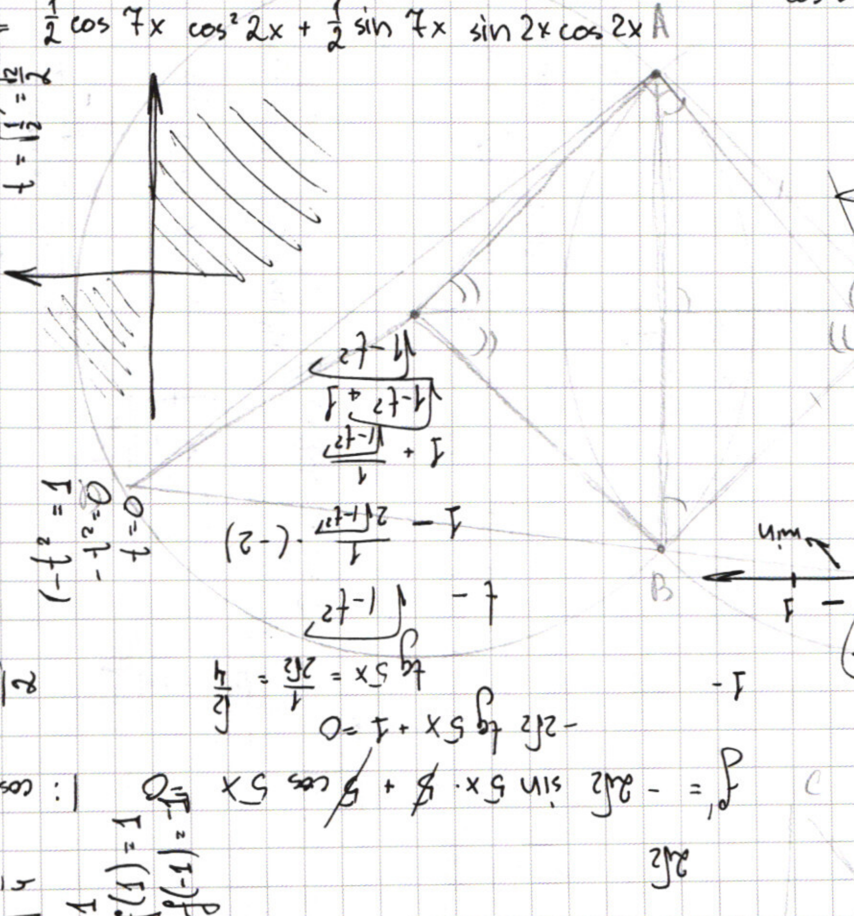
$\cos 7x + \cos 3x = -\frac{1}{2}\sin\frac{7+3}{2}$

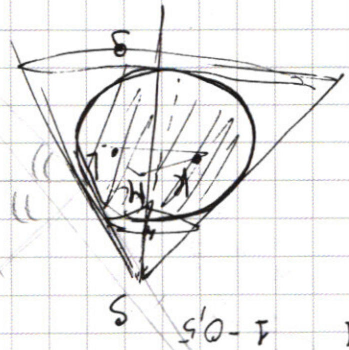
$= \frac{1}{2}(\cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x)\cos 2x =$

$\cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x$

$= \frac{1}{2}\cos 7x \cos^2 2x + \frac{1}{2}\sin 7x \sin 2x \cos 2x$

$\cos 5x(\cos 2x - 2\sqrt{2}\cos 5x)$





черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$

$16875 : 5 = 3375$, $3375 : 5 = 675$, $675 : 5 = 135$, $135 : 5 = 27$

или 4 пятерки, 3 тройки, 1 ед.

или 4 пятерки, 1 девятка, 1 тройка, 2 ед

~~Для пяте~~

Нужно выбрать 4 места из восьми $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_4^8 = \frac{8!}{4!\,4!} = \frac{5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 70$

$16875 : 625 = 27$

$C_2^3 = \frac{3!}{1!\,2!} = 3$

$+$ для троек $C_3^4 = \frac{4!}{1!\cdot3!} = 4$

$280 +$

$C_4^8 = 70 \cdot \underset{\text{для 8}}{4} \cdot \underset{\text{для 3}}{3} = 12\cdot70 = 840$

$\boxed{1120}$

$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt2\cos7x\cos3x + \sqrt2\sin7x\sin3x - \sin7x - \sin3x = 0$

~~$\cos 7x\,(1 - \frac{\sqrt2}{2}\cos 3x) + \cos$~~

~~$\cos 7x \cos 7x$~~

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

1 $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \\ x-6+y \geq 0 \Rightarrow y \geq -x+6 \\ 2x-12 = 12 \Rightarrow x = 12 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x-6-y < 0 \Rightarrow y > x-6 \\ x-6+y < 0 \quad y < -x+6 \\ -2x+12 = 12 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

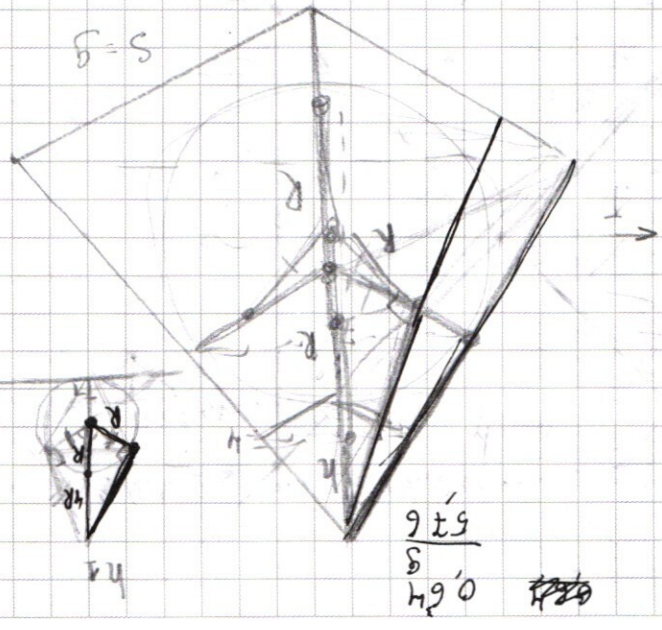
3 $\begin{cases} x-6-y < 0 \Rightarrow y > x-6 \\ x-6+y \geq 0 \quad y \geq -x+6 \\ -x+6+y+x-6+y = 12 \Rightarrow 2y = 12 \end{cases}$

4 $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \Rightarrow y \leq x-6 \\ x-6+y < 0 \quad y < -x+6 \\ x-6-y-x+6-y = 12 \Rightarrow -2y = 12 \end{cases}$

$\frac{h+2R}{h} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2h+4R = 3h$, $h = 4R$

$\frac{h+2R}{h+R} = \frac{4R+2R}{4R+R} = \frac{6R}{5R} = \frac{6}{5}$

$S = 6$



$5{,}76 : 6 = 0{,}96$

$85 + 3^{81}x - x > 3^x + 4\cdot 3^{81}$

$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y}$

$85 - x$

$(x^4)^{\lg y}$

$y^{\lg y^2}$

$a^{\log_b c} = c^{\log_a b}$

$y < 85 + (3^{81} - 1)x$

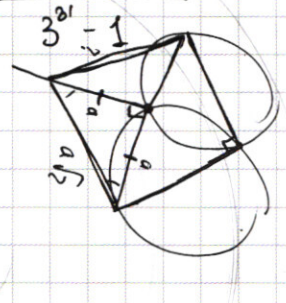
$x > \frac{y}{85 + (3^{81} - 1)}$

$y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} > 3^{\frac{y}{85+(3^{81}-1)}} + 4\cdot 3^{81}$

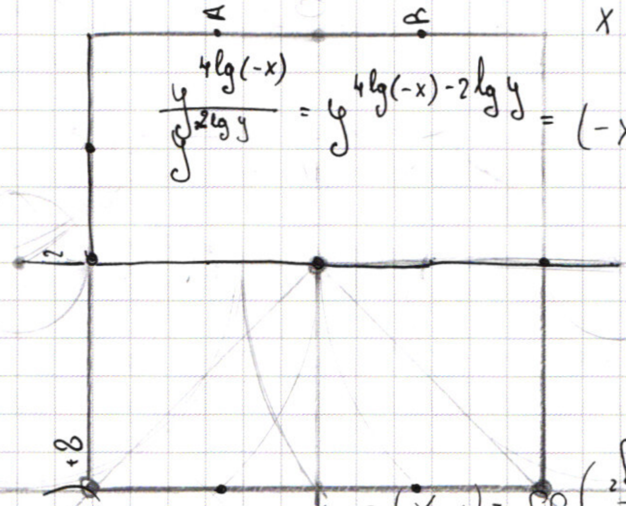
$y - 85 < (3^{81} - 1)x$

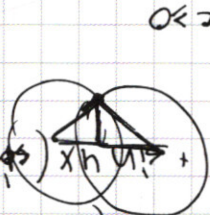
$x > \frac{y - 85}{3^{81} - 1}$

$x > \frac{3^x + 4\cdot 3^{81} - 85}{3^{81} - 1}$



$\frac{y^{4\lg(-x)}}{y^{2\lg y}} = y^{4\lg(-x) - 2\lg y} = (-x)$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)