

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $16875 = 5^4 \cdot 3^3$

$$16875 : 5 = 3375$$

$$3375 : 5 = 675$$

$$675 : 5 = 135$$

$$135 : 5 = 27$$

Т.к. цифр, кратных пяти, было 15), ~~а значит~~ а цифр, не кратных трем, делителей кроме 3, - 2 (3 и 9), то все числа, подходящие под условие, могут состоять только из цифр 1, 3, 5 и 9.

1) числа не содержат 9 (4 цифры 5, 3 цифры 3 и остальные 1)

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 54 \text{ числа}$$

2) числа содержат 9 (1 цифра 9, 4 цифры 5, 1 цифра 3, остальные единицы)

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 48 \text{ чисел}$$

~~Всех~~ Других вариантов цифр в числах, произведение цифр которых равно 16875, не может быть.

~~Итого~~ Итого, всего чисел, удовлетворяющих этому условию, $48 + 54 = 102$.

Ответ: 102.



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{(x+u)^2} \right)^{\lg(x+u)} = (-x)^{\lg(-x(x+u))} = (-x)^{\lg(-x) + \lg(x+u)} = x^{\lg(x) + \lg(x+u)}$$

$$x \cdot \frac{4 \lg(x+u)}{(x+u)^2} = (-1) \cdot \frac{\lg(-x) + \lg(x+u)}{x}$$

$$\frac{\log(-x) + \log(x+4)}{(-1)^x} \cdot 100$$

$$(-x)^{\lg(x+1)} \cdot 10^{-2} = (-x)^{\lg(-x) + \lg(x+1)};$$

$$100 = (-x)^{\frac{3\lg(x+y)}{\cancel{100}} - \lg(-x)} = (-x)^{\frac{3\lg(x+y)}{100}} \cdot 10^{\frac{1}{100} \cdot \sqrt{2}(\cos x \cos 94^\circ - \sin x \sin 94^\circ + \sin 94^\circ \cos x + \sin x \cos 94^\circ)}$$

~~$$2 \log_{-x} 10 = 3 \log(x+4) - \log(-x);$$~~

~~$$2 \log_{10} 10 = \log_{10} (1-x) = 3 \log (1+x),$$~~

$$2 \cos 2x = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 2x = \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2} - (5x + \frac{\pi}{4}))$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} = (-x)^{\lg(-x)} \cdot (-x)^{\lg y} = 10 = 2x = \frac{\pi}{4} - 5x^0, \frac{\log(x+y)}{\log(-x)^{10}} = 1$$

$$x^4 \lg y : y^2 \lg y = 10^{-2} \cdot (x) \lg y$$

$$(-x)^{\lg y} = (-x)^{\lg y} \cdot 1000 \cdot 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$(-x)^{3\log 4} = 1000;$$

$$(-x)^{\log y} = 10.$$

$$\lambda = \frac{\pi}{72} + \frac{2\pi k}{3}$$

~~$$\log_{10}(x+14) + \log_{10}(-x) = 1$$~~

$$\log(-\frac{x}{2}) = 10; \quad \log_{10}(-\frac{x}{2}) - \log_{10} x = 0;$$

$$\log_{-x} 10 = \log_{\frac{1}{10}} \left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{\log_{\frac{1}{10}} \left(-\frac{x}{2}\right) \log_{\frac{1}{10}} (-x) - 1 \cdot 0}{\log_{\frac{1}{10}} (-x) - 1 \cdot 0}$$

$$1 = (\log_{10} x) \cdot \log_{10} 2 \cdot \log_{10} x$$

$$\sqrt{5} \cdot |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \quad (1)$$

$(|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a^2$ - 4 окружности или их части.

(1) $y \geq -x+6$
1) $y < x-6$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x-12=12;$$

$$x=12.$$

2) $y \geq -x+6$
 $y \geq x-6$

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$2y=12, y=6.$$

3) $y < -x+6$
 $y < x-6$

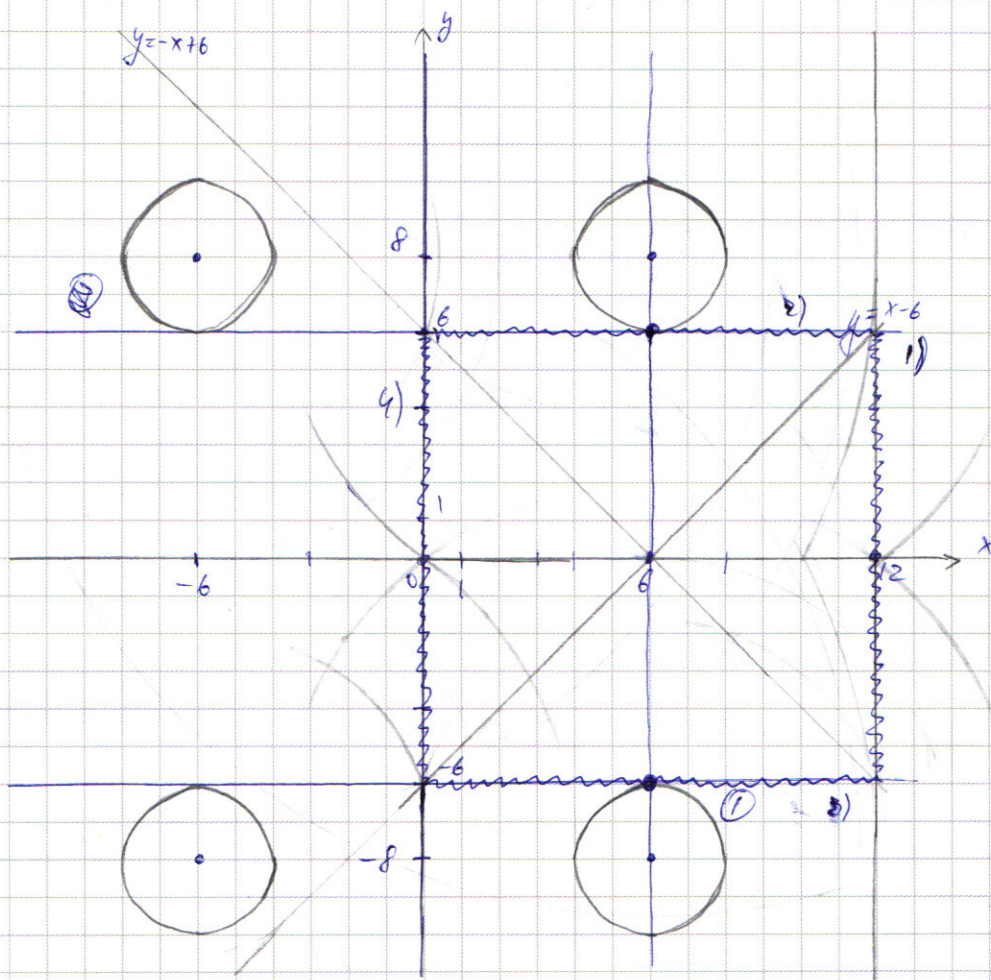
$$x-y+6 + x+6-y = 12$$

$$y=-6$$

4) $y < -x+6$
 $y \geq x-6$

$$-x+6+y - x+6-y = 12$$

$$x=0.$$



① ~~$a = R^2$, окружности~~ ① 2 окр-сти в I и II четвертях касаются
прямых $y=6$ и $y=-6$, $R=6-8=2$, $a = R^2 = 4$.



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. окружности ~~решения~~ решения второго уравнения будут представлять собой окружности до тех пор, пока их радиусы не превысят расстояние от центров до оси координат (т.е. $a \leq 6$), ~~и~~ решения системы будут находиться в I, II четвертях и будут симметричны относительно ОХ (их будет ~~4~~, ~~всего~~, т.к. окружности будут пересекать обе прямые $x=0$ и $x=12$ либо $y=6$ и $y=-6$ в двух точках, т.к. их центры расположены ~~на~~ на прямой, являющейся осью симметрии квадрата (который является ~~реш~~ ~~решением~~ (1)).

Если $a > 6$, то ~~решения~~ ~~решения~~ решения второго уравнения системы будут представлять собой части окружностей, не пересекающие с осью координат. Тогда, если окружности с центрами $(6; -8)$ и $(6; 8)$ пересекутся на оси ОХ, то окружности с центрами $(-6; 8)$ и $(-6; -8)$ также пересекутся в $(0; 0)$ (т.к. они расположены симметрично первым двум окружностям относительно ОХ). Т.к. их координаты «обрезают» части окружностей, не входящие в ту же четверть, что и их центры, то точек пересечения будет всего 2 $\Rightarrow$ решений системы 2.

$$a = R^2 = 8^2 + 6^2 = 100.$$

Ответ: ~~2 решения будут при $a \leq 6$~~

~~А~~ при $a > 100$ части окружностей, удовлетворяющие уравнению (2), не будут иметь точек пересечения с прямой,

представляющим три решения гр-а (1). Значит, во всех случаях система имеет ровно 2 решения, различных.

Ответ: $a \in \{4, 100\}$.

$$\sqrt{2} \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x;$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - (\sqrt{2} \cos 5x (2 \sin 5x)) / (\cos 5x - \sin 5x) = 0;$$

$$(2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$1) \cos 5x = 1,$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x = 0$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(5x + \varphi), \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$\cos 2x = \sin(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{4} + 5x))$$

$$\text{с) } 2x + 2\pi q = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi b, q, b \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{д) } 2x + 2\pi q = -\frac{\pi}{4} + 5x + 2\pi c, q, c \in \mathbb{Z}$$

$$3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x \in \left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{3}; \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \right\}, n, m, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

реш. $\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$

ОДЗ: $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

(1) $2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$
 $(2y+x)(x-y) - 4(2y+x) = 0$
 $(2y+x)(x-y-4) = 0$

$\begin{cases} xy = -\frac{x}{2} \\ y = x+4 \end{cases}$

2) (2) $\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$; $\frac{(-x)^{\lg y}}{(-x)^{3\lg y}} : \left(y^{2\lg y}\right)^{=100} = \left((-x)^{\lg(-x)}\right)^{=10} \cdot (-x)^{\lg y}$

$(-x)^{3\lg y} = 1000$;

$(-x)^{\lg y} = 10$.

1) $y = -\frac{x}{2}$

$\frac{(-x)^{\lg(-x)}}{(-x)^{3\lg y}} \cdot (-x)^{\lg y^2} = 10$

$(-x)^{\lg^2} = 1$

$\frac{(-x)}{(-x)} = 1$, $x = -1$, $y = \frac{1}{2}$.

Ответ: $(-1; 0.5)$

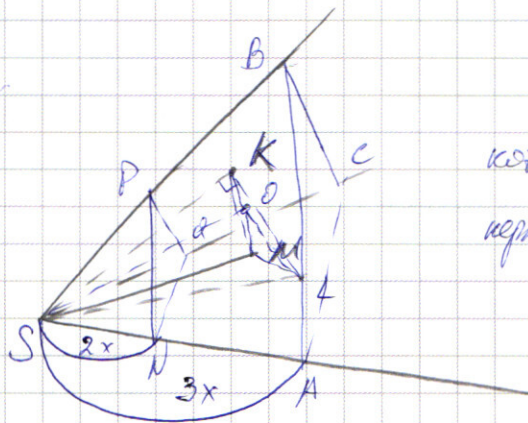
2) $y = x-4$

$(-x)^{\lg(x-4)} = 10$;

$-x = x-4$;

$4 = 2x$; $x = 2$ - не подх. по ОДЗ.

№ 4.



1. Пусть f_1 - меньший из треугольников, который является сечением плоскости, перпендикулярной SO и касающейся сферы, f_2 - больший.

$f_1 \sim f_2$ (так как они лежат в параллельных плоскостях, т.к. обе перпендикулярны линии SO), $\frac{f_1}{f_2} = k^2 = \frac{4}{9}$.

Поэтому этот треугольник

$k = \frac{2}{3}$ - коэффициент подобия этих треугольников

2. $f_1 = PQN$, $f_2 = AMC$.

$PN \parallel AM$, $PQ \parallel MC$, $QN \parallel CA$. $\Rightarrow SN:SA = PN:AB = 2:3$.

3. Рассмотрим (KSO) : $\triangle KSO$: $OK = R$, $\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO}$.

$p(PQN; ABC) = 2R \Rightarrow \cancel{R} \Rightarrow SK = \frac{2}{3} + 2x = \frac{5}{3} + SR$.

$SH \perp (ABC)$, $SH \perp (PQN) = F$, $SF:SH = \frac{2}{3}$, $SH = SF = 2R \Rightarrow$

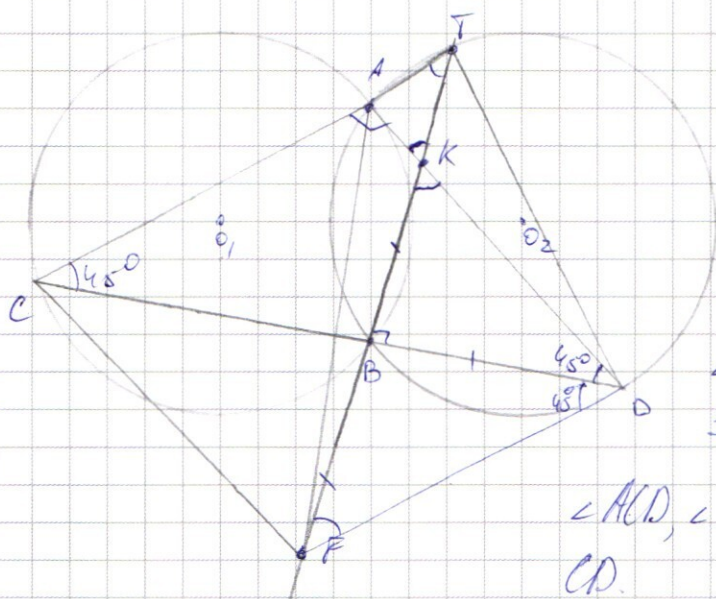
$OK \perp SH \Rightarrow SO = SR = SH - R$.

$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{1}{5}$. Ответ: $\frac{1}{5}$.

8.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



$$1. \triangle AOB_1 = \triangle AOB_2 \text{ (по II пр.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOB_1 = \angle AOB_2 \Rightarrow \angle AOB - \text{равнобе.}$$

$$\angle AOB = \angle AOB_1 = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow$$

$$2. \angle FDB = 45^\circ, \text{ т.к. } \triangle PDF - \text{прям.} \\ \angle P = 90^\circ.$$

$$3. \angle ACD = \angle CDF \Rightarrow AC \parallel DF, \text{ т.к.}$$

$\angle ACD, \angle CDF$ - накрест лежащие при сек.
CD.

$$4. BF \cap \text{Окр.}(O_2; R) = 1. \text{ т.}$$

$$\angle ATB = \angle BPA - \text{опр. на } \angle AOB \Rightarrow \triangle AKT \sim \triangle BKD \text{ (по II пр.)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \angle TAK = 90^\circ \Rightarrow C, A, T \in AC.$$

$$5. \triangle BTC - \text{пр.}, TB = TC \Rightarrow \triangle CBF = \triangle TBP \text{ (по 2 катетам)} \Rightarrow \\ \Rightarrow CF = TP.$$

$$6. \text{т.к. } \angle TPD = 90^\circ \text{ и } \angle TBP - \text{остр.}, \text{ то } TD = \text{диаметр}, \underline{TD = 2R = 26 = CF}.$$

$$7. BC = BT = 10.$$

$$8. \triangle AOB: \angle AOB = 90^\circ = 2\angle AOB_1 \text{ (центральный)}, AB = \sqrt{AO_1^2 + BO_1^2} = 13\sqrt{2} \text{ по т. Пифагора}$$

$$9. TC = BC : \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}, AC = \sqrt{AB^2 + CB^2 - 2 \cdot \cos \angle ACB \cdot AB \cdot CB} = \sqrt{178} \text{ (по т. косинусов)}$$

$$BT = BC, BD = \sqrt{TD^2 - BT^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24 = BF.$$

$$TF = TB + BF = 34.$$

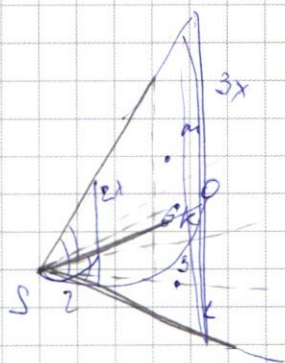
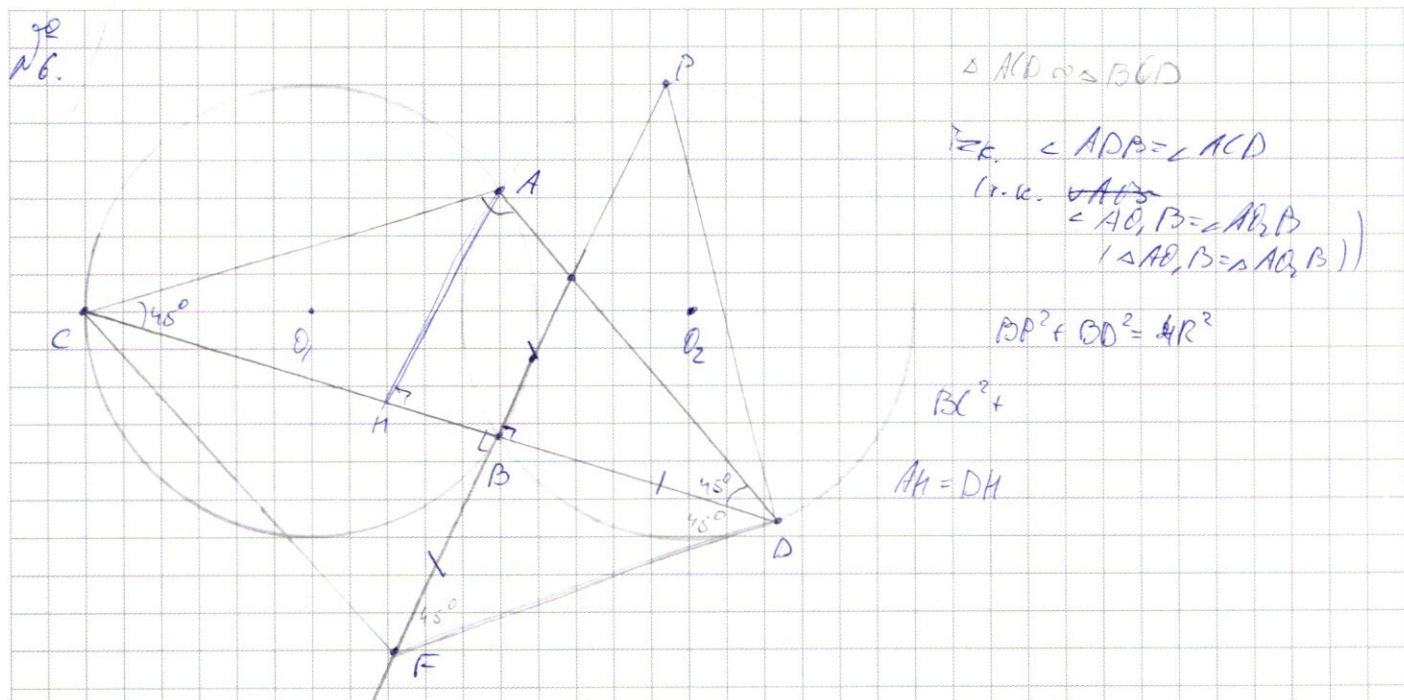
$$10. S_{CAF}: S_{CTF} = \frac{AC \cdot CF}{CF \cdot CT} = \frac{AC}{CT \sqrt{89}} \text{ (т.к. } \angle TCF - \text{общий)}$$

$$S_{CAF} = \frac{1}{2} BC \cdot TF, S_{CAF} = \frac{\sqrt{89}}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 34 = \underline{17\sqrt{89}}.$$

Order: $CF=26$, $Se_{AF}=17\sqrt{89}$.

$\sqrt{2}$. ~~$y \geq 3x + 4 \cdot 3^{81}$~~
 ~~$y \leq 85 + (3^{81} - 1)x$~~
 ~~$y \geq 4 \cdot 3^{81} + 1$~~
 ~~$y \leq 85$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\Delta F_1 \approx \Delta F_2, k^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$Sk - \text{Базис} < 1, \text{ величина аспекта } (\delta(SkO)) - \text{аспект.}$$

Ok L SR

$$Ok = R, \quad Sk = 3y.$$

$$\frac{1}{g(-y+4)} = g(y)$$

$$\frac{1}{\lg(-x)} = \lg(x+4)$$

$$\log^2 y + \log y \cdot \log z - 1 = 0$$

$$D = \log^2 z - 1 \neq 0 \quad \log$$

$$\frac{1}{g_{xy}} = g_{yx}$$

$$\frac{\lg y (\lg z + \lg y) - 1}{\lg z y} = 0$$

$$\frac{\lg(-x) - 2 \lg(-x) \cdot \lg 2 - 1}{\lg(-x)} = 0$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^4 \lg y = (-x) \lg(-xy) = (-x) \lg(-x) \cdot (-x) \lg y$$

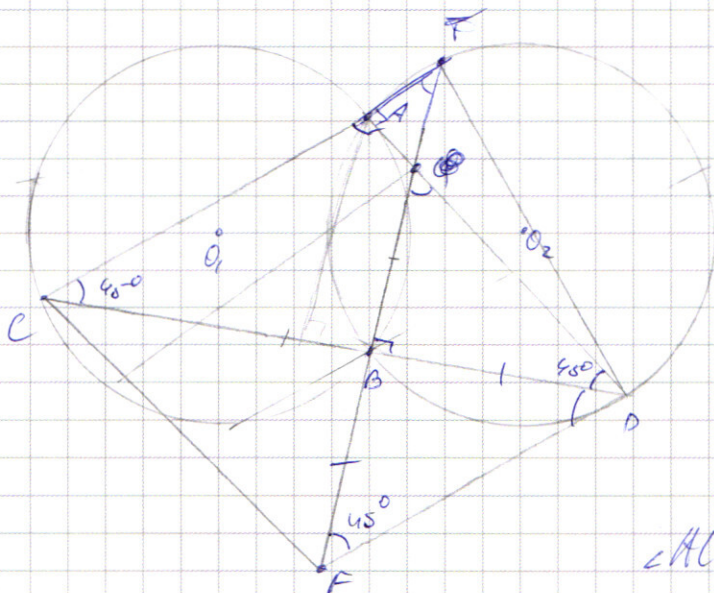
$$(-x) \lg y \cdot y^{-2} \lg y = 10^{-2} = 10 \cdot (-x) \lg y \quad \begin{cases} -2y = \\ y-4 = \end{cases}$$

$$(-x)^{3\lg 4} = 1000$$

$$(-x)^{\log} = 1000$$

$$\log z = \log(-x)$$

$$\begin{aligned} -x &= 100 \quad \log_{-x} = \log\left(-\frac{x}{2}\right) & -x &= x+4 & x &= -2 \\ & & & -x &= x-4 & y &= 2. \\ x &= -100, \quad \frac{1}{\log^2} = \log\left(-\frac{x}{2}\right) = \log(-x) - \log 2 \\ x) &= 10 & -2x &= -4, & x &= 2 \end{aligned}$$



$$1. \triangle AOB = \triangle AOB' \text{ (по III м.п.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle AOB' \Rightarrow \angle AOB = \angle AOB' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOB = \angle AOB' = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ = \angle AOB' = \angle AOB'$$

$$2. BF \cap AD = \dots, \text{ в } \triangle BFD:$$

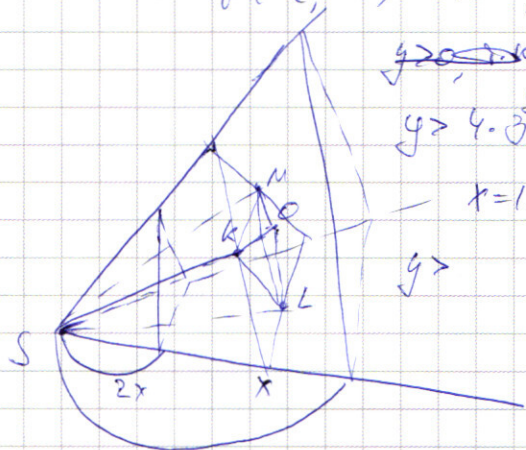
$$\angle BFD = 45^\circ$$

$$\angle FDB = 45^\circ, \text{ т.к. } \triangle BFD - \text{ равнобедренный}$$

$$\angle ACD = \angle CDF \Rightarrow AC \parallel DF, \text{ т.к. } \angle$$

накрест лежащие углы при сек. CD

$$3. BF \cap \text{Осн}(\text{О}_2, R) = \dots, \angle TPD = 90^\circ \Rightarrow TP - \text{диаметр}$$



$$y > 4 \cdot 3^{\frac{81}{1}}, \text{ т.к. } y \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}.$$

$$y > 4 \cdot 3^{\frac{81}{1}}, k = \frac{2}{3}$$

$$x = 1.$$

$$y >$$

$$\angle KSO = \angle OSK = \angle OSL$$

$$SK = SL = SO = R, R = R.$$

SKL - пирамида, O - центр описанной окружности. $SE = ST = SX =$

$$y \geq 3 + 4 \cdot 3^{\frac{81}{1}}, y > 3 + 4 \cdot 3^{\frac{81}{1}}$$

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{2}{3}, 2R = x.$$

$$\text{tg } x = \frac{R}{SK}, SK = 2x + \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x = 5R.$$

$$\text{tg } x = \frac{1}{5}.$$

$$BC = h \triangle TCB.$$

$$AB = \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{100 + 169 \cdot 2 - 2 \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \cos 10^\circ} =$$

$$= \sqrt{169 \cdot 2 + 100 - 200} = \sqrt{338 - 100} = \sqrt{238} = AD$$

$$2x + 4 \cdot 3^{\frac{81}{1}} = 292$$

$$85 + 3 \cdot 3^{\frac{81}{1}} - 3 = 82 + 3 \cdot 3^{\frac{81}{1}}$$