

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{108 - \pi} \cos\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x - \frac{\pi}{4} = \pi n \\ 2x = \pm \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n \\ -3x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \Rightarrow 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} n \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{— Ответ.}$$

N3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad (1) & -xy > 0; y > 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow x < 0. \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

① Прологарифмируем по осн. 10
(обе части > 0 , т.к. $\frac{x^4}{y^2} > 0$, $-x > 0$)

$$\lg y \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-xy) \lg(-x)$$

$$\lg y (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = \lg(-x) (\lg(-x) + \lg y)$$

($|x| = -x$, т.к. $x < 0$, $|y| = y$, т.к. $y > 0$)

$$4 \lg y \lg(-x) - 2 \lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(x) \lg y$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg y \lg(-x) + 2 \lg^2 y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$16875 = 5^4 \cdot 3^3 \cdot 1 \Rightarrow$ Исходные числа
состоят из 4-х «5», 3-х «3» и 1-й «1».

Кол-во способов составить 7-ми значное
число из 3-х «3» и 4-х «5» равно

$$\frac{(3+4)!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35.$$

Кол-во способов приписать единицу
для получения восьмизначного числа
равно 3 $\Rightarrow$ Всего подходящих чисел
 $35 \cdot 3 = 105$ - Ответ.

N 2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 7x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x = \cos 10x$$

$$\cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \cos(3x + \frac{\pi}{4}) = \cos 10x$$

$$2 \cos(\frac{1}{2}(10x + \frac{\pi}{2})) \cos 2x = \cos 10x.$$

$$2 \sin(\frac{1}{2}(10x - \frac{\pi}{2})) \cos 2x = \sin(10x - \frac{\pi}{2})$$

$$2 \sin(\frac{1}{2}(10x - \frac{\pi}{2})) \cos 2x = 2 \sin(\frac{1}{2}(10x - \frac{\pi}{2})) \cdot \cos(\frac{1}{2}(10x - \frac{\pi}{2}))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{x = -2 \\ y = 2\} \\ \{y = 2 \\ x = -4\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -x = y^2 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = -\frac{1 \pm 3}{2} \end{array} \right. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{x = -2 \\ y = 2\} \\ \{y = 2 \\ x = -4\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -x = y^2 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} -x = y^2 \\ y = -2 < 0 \Rightarrow \text{не вогн.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ Ответ: $(-2; 2); (-4; 2); (-1; 1)$.

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

① ~~При $x-6 \geq y \geq 0$: $x = 12$~~
~~При $x-6 \leq y \leq 0$: $x = 0$~~

При $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x-6-y + x-6+y = 12 \\ x = 12 \end{array}$

При $\begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x-6-y - x+6-y = 12 \\ y = -6 \end{array}$

При $\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -x+6+y + x-6+y = 12 \\ y = 6 \end{array}$

При $\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} x-6-y + x-6+y = -12 \\ x = 0 \end{array}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\lg(-x) = \frac{3\lg y \pm \sqrt{9\lg^2 y - 8\lg^2 y}}{2} = \frac{3\lg y \pm \lg y}{2}$$

$$\begin{cases} \lg(-x) = \lg y \\ \lg(-x) = 2\lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = y \\ -x = y^2 \end{cases}$$

Подставим в (2)

$$\begin{cases} -x = y \\ 2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = y^2 \\ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x = y \\ 2x(x+2) = 0 \end{cases} \quad x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} -x = y^2 \\ y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0 \end{cases}$$

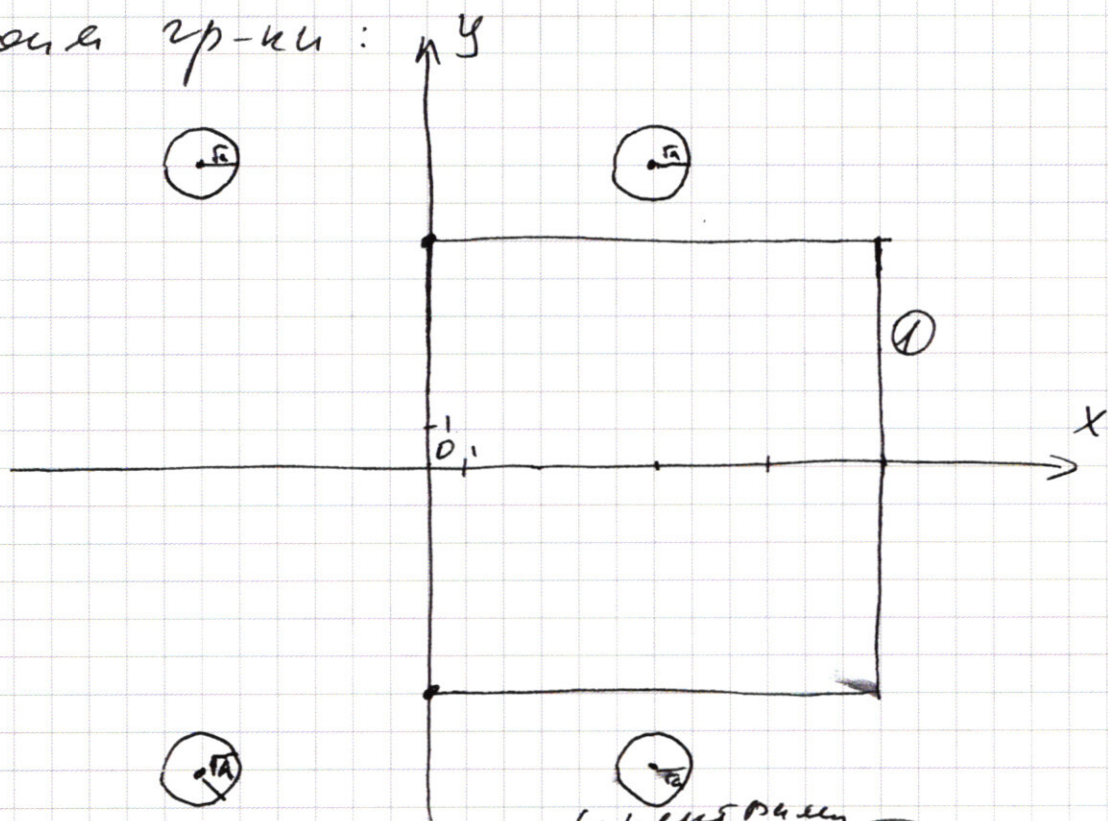
$$\Rightarrow \begin{cases} -x = y \\ x = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} -x = y^2 \\ (y-2)(y^2 + y - 4) = 0 \end{cases}$$

$y = 2$ — корень $\Rightarrow$ разделим

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \mid y-2 \\ \underline{y^3 - 2y^2} \\ y^2 - 6y + 8 \\ \underline{y^2 - 2y} \\ -4y + 8 \\ \underline{-4y + 8} \\ 0 \end{array}$$

② - 4 окр-ли, $R = \sqrt{a}$, центры в точках $(6; 8)$, $(-6; 8)$; $(6; -8)$; $(-6; -8)$

Построим гр-ки:



2 решения, если окр-ли с центрами в I и IV квтв. касаются квадрата, т.е. $\sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$.

Или если окр-ли с центрами в I и IV четвертях не пересекают квадрат, а окружности с центрами во II и III четвертях пересекают квадрат в ^{двух} точках,

$$\text{т.е. } \sqrt{a} = \sqrt{(-6-12)^2 + (8-(-6))^2} = \sqrt{18^2 + 14^2}$$

$$a = 324 + 196 = 520$$

Ответ: 520; 4.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

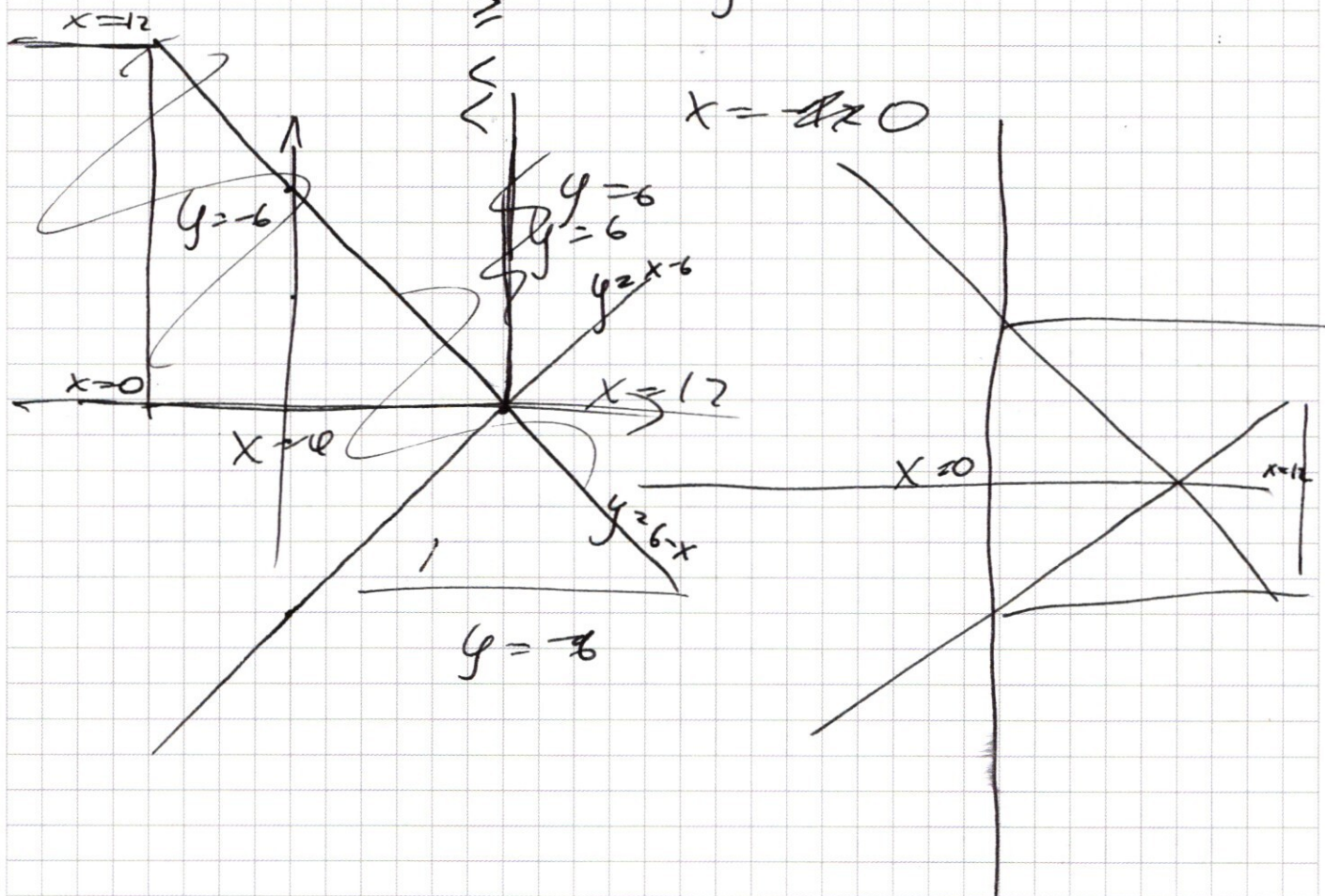
$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$\begin{aligned} x - 6 - y &\geq 0 \\ x - 6 + y &\geq 0 \end{aligned} \Rightarrow x \geq 12$$

$$y = -6$$

$y = 26$

$$x = -20$$



$$\frac{SH_1}{SH_2} = \frac{PH_1}{PH_2} = \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$$

$$SH_2 = SH_1 + 2R_0$$

R_0 - радиус сферы

$$\Rightarrow \frac{SH_1}{SH_1 + 2R_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow SH_1 = 4R_0$$

$$\sin \angle SOK = \sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R_0}{4R_0 + R_0} = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5} \text{ - Ответ.}$$

$$R_1 = R_2 = R = 13$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$B \in CD$$

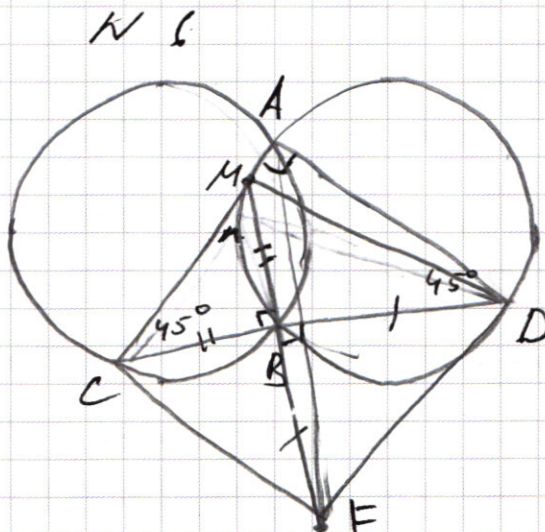
$$BF = BD$$

$$BF \perp CD$$

$$CF = ?$$

$$\angle ACF = ?$$

$$BC = 10$$



$$1. AB = 2R \cdot \sin \angle ACD$$

(как хорда 1-й окружности)

$$AB = 2R \sin \angle ADC$$

(как хорда 2-й окружности)

$$\Rightarrow \sin \angle ACD = \sin \angle ADC \Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$2. BF \text{ пересекает 2 окруж-ти в т. } M$$

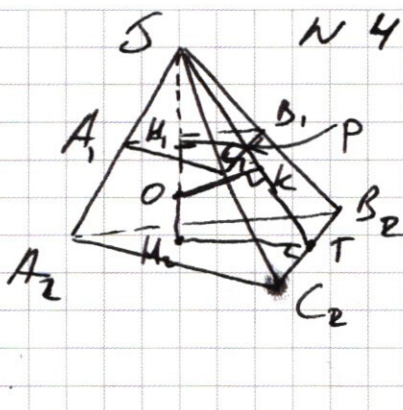
$$\angle MBD = 90^\circ \Rightarrow MD - \text{диам.}, MD = 26$$

$$\text{и } CA \text{ перес. 2 окруж-ти в т. } M, \text{ т.к. } \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\text{из одной т-ки можно провести только 1 диам.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} S_1 = 4 \\ S_2 = 9 \\ \hline \angle KSO - ? \\ S_3 = ? \end{array}$$



1. $SH_1 \perp (A_1 B_1 C_1)$
 $SH_2 \perp (A_2 B_2 C_2)$,
 H_1, H_2 - центры
 впис. окр-т

$$\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle A_2 B_2 C_2$$

r_1 и R - радиусы этих сфер- Π , $O \in SH_1$
(Для $\triangle ABC_1$ и $\triangle ABC_2$ касаются SH_1, SH_2, SH_3
каждый отрезков, принадлежащих ^{лучам} SH_1, SH_2, SH_3
и ограниченных точками S пересечения
этих лучей со сторонами $\triangle ABC$ и т.д.
равны ($\angle KSO = \angle MSO = \angle LSO$, ~~т.е.~~ св-ва
вписанной сферы, SH_1 и SH_2 - общ. для соотв.
отрезков) и перпендикулярны сторонам).

$\Delta A_1 B_1 C_1$ получается с помощью гомотетии с центром S из $\Delta A, B, C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta A_1 B_1 C_1 \sim \Delta A_2 B_2 C_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{r_1}{R_2} = \frac{2}{3}$$

$$2. SK \cap CB_1 = P \quad \Delta SH_1P \sim \Delta SKO \quad (\angle SH_1P = \angle SKO_2 \\ \angle OSK = \angle OSH_1) \Rightarrow \frac{SH_1}{SK} = \frac{SP}{SO} = \frac{PH_1}{OK}$$

$$SK \cap \delta B_2 C_1 \geq T \quad \triangle \quad SH_1 P \sim \triangle STH_2 \quad (\angle SH_1 P = \angle STH_2 = 90^\circ, \angle OSK = \angle OSK - \text{осн. вкл.}) \Rightarrow$$

NZ

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &85 + (3^{81} - 1)x > \\ &> 3^x + 4 \cdot 3^{81} \end{aligned}$$

$f(x) = 85 + (3^{81} - 1)x$ - возр. линейн. функция

$g(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$ - возр. функция

$f(x) > g(x)$ при $x_1 < x < x_2$, где x_1 и x_2 таковы, что $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$

$$85 + (3^{81} - 1)x = 3^x + 4 \cdot 3^{81} \text{ при } x_1 = 4$$

$$(85 + 4 \cdot 3^{81} - 4 = 81 + 4 \cdot 3^{81} = 3^4 + 4 \cdot 3^{81}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ нер-во выполняется при $x_1 < x < x_2$.

при этом $\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$ т. е.

$$y < 3^x + 4 \cdot 3^{81} > y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y \in \emptyset \Rightarrow$ решений нет

Ответ: 0.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3. \angle MCB = 45^\circ \Rightarrow \angle CMB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow \triangle MCB - \text{р/б}, \\ MB = BC \Rightarrow \triangle MDB = \triangle BCF \text{ (по 2-м катетам)} \\ \Rightarrow CF = MD = 26$$

$$4. S_{ACF} = S_{ACD} + S_{CFD} - S_{AFD}$$

$$S_{ACD} = \frac{AC \cdot AD}{2}$$

$$S_{CFD} = \frac{BF \cdot CD}{2}$$

$$BC = 10 = MB \Rightarrow BF = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 = BD.$$

$$CD = AC\sqrt{2} = AD\sqrt{2} = 34 \Rightarrow \frac{AC \cdot AD}{2} = \frac{34^2}{2 \cdot 2} = 17^2$$

$$\frac{BF \cdot CD}{2} = \frac{24 \cdot 34}{2} = 17 \cdot 12$$

$$S_{ACF} = 17 \cdot 29 - S_{AFD}$$

$$BD = BF, \angle DBF = 90^\circ \Rightarrow \angle BDF = 45^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle ADF = 90^\circ \Rightarrow S_{AFD} = \frac{AD \cdot DF}{2}$$

$$DF = BD\sqrt{2} = 24\sqrt{2}$$

$$S_{AFD} = \frac{34 \cdot 24\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = 17 \cdot 24$$

$$S_{ACF} = 17 \cdot 29 - 17 \cdot 24 = 17 \cdot 5 = 85$$

$$\text{Ответ: } CF = 26; S_{ACF} = 85.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{array}{r|l} 16875 & 5 \\ 3375 & 5 \\ 675 & 5 \\ 135 & 5 \\ 27 & 3 \\ & 3 \\ & 3 \end{array}$$

$$3 \times 3 \quad 4 \times 5 \quad 1 \times 1$$

$$1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4^4 \cdot 8?$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x =$$

$$2 \sin 7x + \sin 3x$$

$$\cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta -$$

$$\cos(7x + 3x) + \cos$$

$$\begin{aligned} a+b &= 7 & a &= 8 \\ a-b &= 3 & b &= 2 \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) =$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x \right) = \cos 10x$$

$$2 \cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = \cos 10x$$

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(1-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

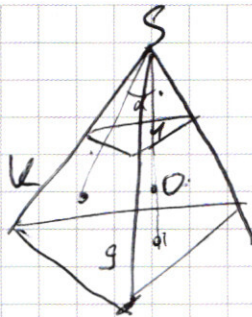
$$\begin{aligned} y &\neq 0 \\ xy &< 0 & x < 0 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

$$\lg y \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(1-xy) \lg(1-x)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = (\lg(1-x) + \lg y) \lg(1-x)$$



КСО-?



$$|a-b| \quad |a+b|$$

$$a > b > 0$$

$$y = x - 6$$

$$+ y \geq x + 6$$

$$x - 6 > y > -y$$

$$x = 12$$

$$x - 6 < y \leq y$$

$$x = -12$$

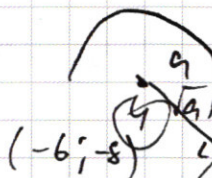
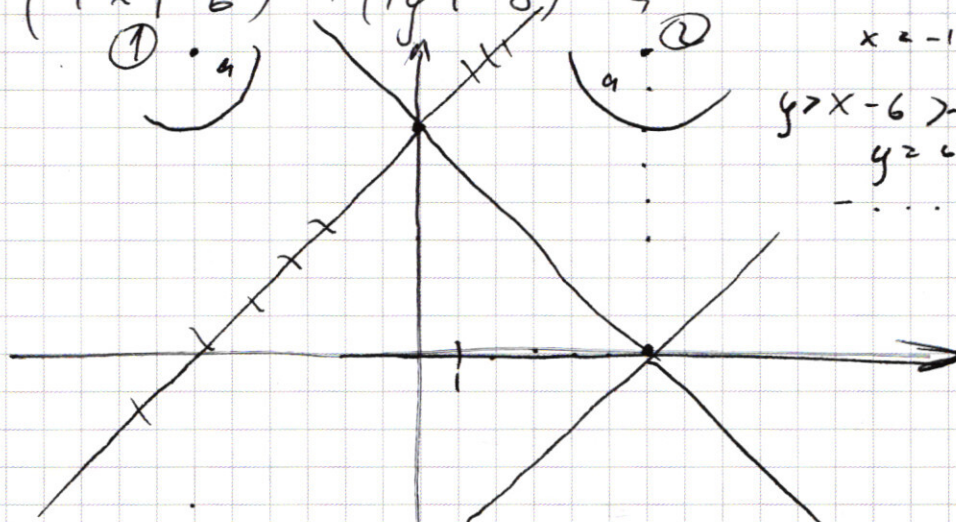
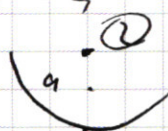
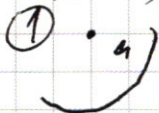
$$y > x - 6 > -y$$

$$y = 6$$

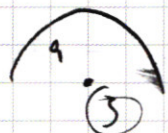
$$y = -6$$

$$|x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12$$

$$(|x| - 6)^2 + (|y| - 6)^2 = 9$$



$$y = x - 6$$



$$y = -x - 6$$

$$-8 = 6 - 6 \quad b = -14$$

$$\begin{cases} y = -x + 14 \\ y = x - 6 \end{cases}$$

$$2y = 8 \quad y = 4$$

$$x = 10$$

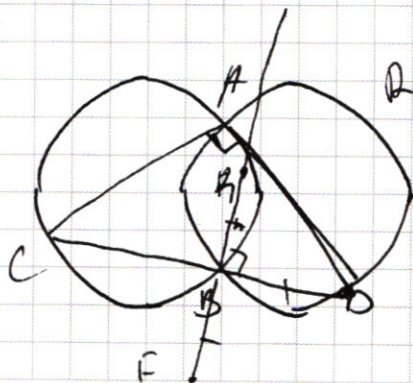
$$y = -10$$

$$x = 4$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{10 - 2}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{(-6 + 4)^2 + (-8 + 10)^2} = \sqrt{4 + 4}$$

$$a = 8$$



$$R = 13 \sim 6$$

$$CF = ?$$

$$|a - b| + |a + b| = c$$

$$a > b > -b \quad a = \frac{c}{2}$$

$$a < b < -a \quad a = -\frac{c}{2}$$

...

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \lg(-x) \geq 2\lg y \\ \lg(-x) = \lg y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \geq y^2 \\ -x = y \end{cases} \quad \begin{matrix} 85 + (3^{81} - 1)x > \\ > 3^8 + 4 \cdot 3^{81} \end{matrix}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y \leq 0$$

$$\begin{cases} x = -y^2 \\ 2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y \geq 0 \end{cases}$$

$$y \neq 0 \Rightarrow 2y + y^2 - y^3 + 4y - 8 = 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} y^3 - y^2 - 6y + 8 & y - 2 \\ \hline y^3 - 2y^2 & y^2 + y - 4 = 0 \end{array}$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$y = 1 \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{cases} -x = y \end{cases}$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

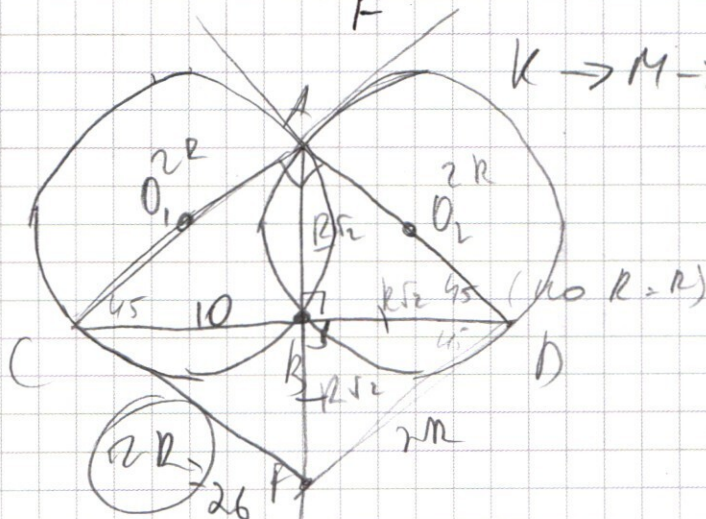
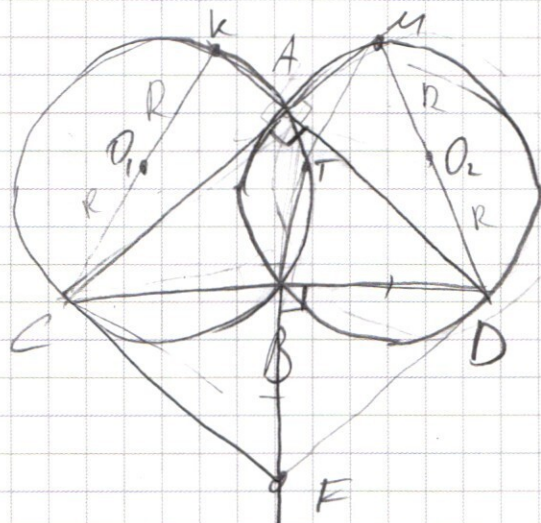
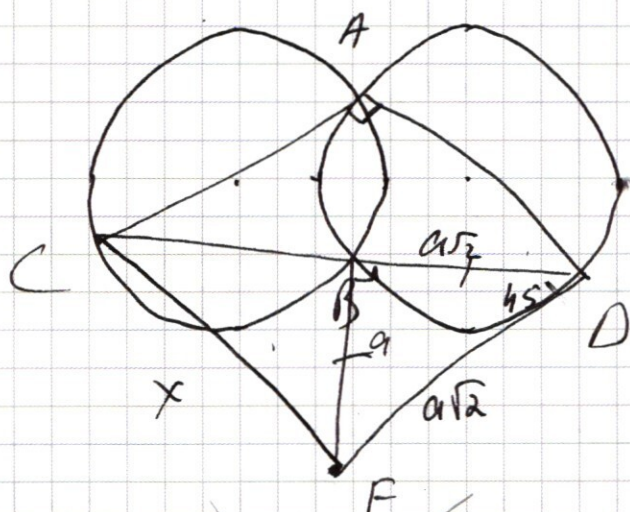
$$\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\left(10x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\cos 10x = \sin\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$\begin{aligned} 2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos 2x &= \sin\left(10x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right) &= 0 \quad \vee \quad \cos 2x = \cos\left(\frac{1}{2}\left(10x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$K \rightarrow M \rightarrow T \rightarrow A$ (по д.)

???

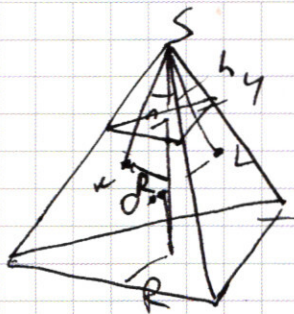
$$x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} > 0 \Rightarrow \log_3 y \geq \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

$$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} > 0 \Rightarrow \frac{3^x + 4}{y - 3^x} > 0 \Rightarrow \log_3(y - 3^x) \geq 81(1 + \log_3 4)$$

$$\log_3(y - 3^x - 4) \geq x$$

$$y < 85 + (3^{81} - 1)x$$



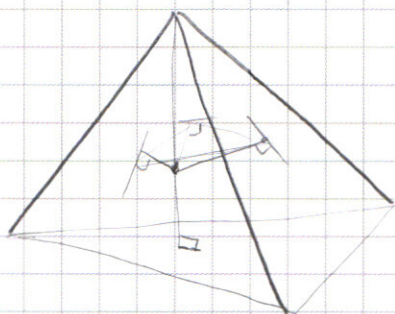
$$\frac{h}{h+2R_0} = \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$3h = 2h + 4R_0$$

$$h = 4R_0$$

$$\tan \angle KSO = \frac{R_0}{h+R_0} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{r}{h} = \tan \angle KSO = \frac{1}{5\sqrt{1-\frac{1}{25}}} = \frac{5}{5\sqrt{24}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$



$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2} \cos 10x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 10x$$

$$2 \cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos(2x) = \cos 10x$$

$$y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + y^2 - 8y + 16 - 16 - 2x^2 + xy = 0$$

$$(y-x)^2 + (y-4)^2$$

$$2xy(y-4) = x(-$$

$$\lg y \quad \lg \frac{x^4}{y^2} = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$\lg y (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = \lg^2(-x) + \lg y \lg(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg y \lg(-x) + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg(-x) = \frac{3 \lg y \pm \sqrt{9 \lg^2 y - 8 \lg^2 y}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \lg y = \begin{cases} 2 \lg y \\ \lg y \end{cases}$$