

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Для начала разложим число 16875 на простые множители.

$$\begin{array}{r} \overline{16875} \mid 25 \\ 150 \\ \hline 187 \\ -175 \\ \hline 125 \\ -125 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overline{675} \mid 25 \\ 50 \\ \hline 175 \\ -175 \\ \hline 0 \end{array}$$

Итого $16875 = 25 \cdot 25 \cdot 27$
 $16875 = 5^4 \cdot 3^3$

Если представить 16875 как произведение цифр от 1 до 9 (0 не может быть среди цифр нашего 8-значного числа т.к. при умножении на него получается 0), разложим 2 набора чисел.
 I. 33355551 II. 11355559. Как-либо ещё перемножить простые множители числа 16875 мы не можем, т.к. произведения будут получаться больше 9.

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 = 9 - \text{возможит} \\ 3 \cdot 5 = 15 - \text{невозможит} \\ 5 \cdot 5 = 25 - \text{невозможит} \end{cases}$$

Для того, чтобы посчитать сколько чисел можно составить из набора цифр 33355551 используя формулу размещения с повторениями.

$$P(n_1, n_2, n_3) = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)!}{n_1! n_2! n_3!}$$

$$P(3, 4, 1) = \frac{8!}{3! \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 35 = 280$$

для набора 11355559 2 - '1' 4 - '5' 1 - '9' 1 - '3'

$$P(2, 1, 4, 1) = \frac{8!}{2! \cdot 1! \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 8 \cdot 35 \cdot 3 = 280 \cdot 3 = 840$$

$\Rightarrow$ всего возможных чисел $280 + 840 = 1120$

Ответ: 1120

$$2. \cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \end{cases}$$

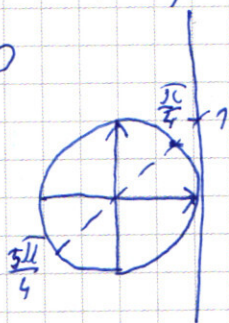
$$I. \cos 5x - \sin 5x = 0$$

$$\sin 5x = \cos 5x$$

$$\operatorname{tg} 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$



$$II. 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \left(\cos 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$// \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos 2x = 2 (\cos 5x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin 5x \cdot \sin \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x = \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 2x - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin \frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{-3x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\begin{cases} \sin \frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \sin \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{2x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\frac{\pi}{4} - 3x}{2} = \pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} - 3x = \pi h, h \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 7x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \\ 3x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi k \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{т.к. } k \in \mathbb{Z} \text{ мы можем заметить } -2\pi k, \text{ или } +2\pi k)$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, \left[\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{7} \right], \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \right], k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\begin{cases} 3. \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

О.Д. 3

$$-xy > 0$$

$$y > 0 \Rightarrow -x > 0 \\ x < 0$$

$$\text{I} \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

Правиморизируем обе части уравнения по свойствам

10.

$$\lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = \lg (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg y \cdot \lg \left(\frac{x^4}{y^2} \right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$\lg y (\lg x^4 - \lg y^2) = (\lg(-x) + \lg(y)) \lg(-x)$$

$$\lg x^4 = \lg(-x)^4 = 4 \lg(-x)$$

$$\lg y^2 = 2 \lg y$$

$$\lg y (4 \lg(-x) - 2 \lg y) = \lg^2(-x) + \lg y \cdot \lg(-x)$$

$$\lg^2(-x) + \lg(-x) \cdot \lg y - 4 \lg(-x) \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg^2(-x) - 3 \lg(-x) \cdot \lg y + 2 \lg^2 y = 0$$

$$\lg(-x)(\lg(-x) - \lg y) - 2\lg y(\lg(-x) - \lg y) = 0$$

$$(\lg(-x) - \lg y)(\lg(-x) - 2\lg y) = 0$$

~~$\lg(-x) - \lg y$~~

$$\left[\lg\left(-\frac{x}{y}\right) = 0 \right.$$

$$\left. \lg\left(-\frac{x}{y^2}\right) = 0 \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{x}{y} = 1 \\ -\frac{x}{y^2} = 1 \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} -x = y \\ -x = y^2 \end{array} \right.$$

Подставим полученные соотношения во второе уравнение: $1/y = -x$

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 8x = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ (н.к. т.к. } x < 0 \text{ по ОДЗ)}$$

$$x = -2 \quad y = 2$$

$$2) -x = y^2$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y(y-2)(y^2+y-4) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \text{ (н.к. т.к. } y > 0 \text{ по ОДЗ)} \\ y = 2 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y^2 + y - 4 = 0 \quad // \quad D = 1 + 16 = 17 \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ (н.к. т.к. } y > 0 \text{ по ОДЗ)} \end{array} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

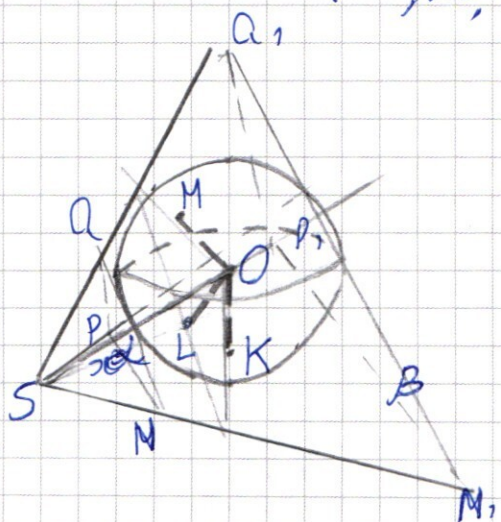
$$y = 2, \quad x = -4$$

$$y = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \quad x = -\left(\frac{18+2\sqrt{17}}{4}\right)$$

$$y = \frac{1+\sqrt{17}}{2}, \quad x = -\frac{9+\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $(-2, 2), (-4, 2), \left(-\frac{9+\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

4.



Дано:

сфера с центром в O впис.
в тетраэдр $ABCD$
 M, L, K - точки касания плоскостей
касания сферы и $\perp OS$
пл-ть BC касание сферы и $\perp OS$
 $SL = 4 \quad SB = 9$

Найти $\angle KSO, S_{\text{сферы}}$

1) пл-ть $L \perp$ прямой SO и пл-ть $B \perp$ прямой SO

~~пл-ть L касание сферы~~ пл-ть L пересекет
сторону угла в (N, P, Q) а, пл-ть B пересекет сторону
угла в точках N_1, P_1, Q_1

по св-ву $\perp$ линии прямой и плоскости: $NQ \perp SO, N_1Q_1 \perp SO$
т.к. NQ и N_1Q_1 в одной плоскости $NQ \perp N_1Q_1$
аналогично $NP \perp SO$ и $N_1P_1 \perp SO$ т.к. NP и N_1P_1 в одной плоскости $NP \perp N_1P_1$

$NP \parallel N_1P_1, NQ \parallel N_1Q_1 \Rightarrow L \parallel B$ по св-ву $\parallel$ линий плоскостей

$\Rightarrow NPA, N_1P_1Q_1$ - усеченная пирамида с длиной основания $m.k$ $SO \perp \alpha$ и $SO \perp \beta$ высота пирамиды равна $2R$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 2R (S_{\alpha} + S_{\beta} + \sqrt{S_{\alpha} S_{\beta}}) \quad (2R - \text{радиус окружности})$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2R (4 + 9 + \sqrt{4 \cdot 9}) = \frac{1}{3} \cdot 2R \cdot 19 = \frac{38}{3} R$$

$\Rightarrow x$ - расстояние от точки S до н.н. α , тогда $x + 2R$ - расстояние от $(\cdot) S$ до н.н. β

$$V_{\text{пир. } \alpha, \beta} = V_{\text{пир. } \alpha} - V_{\text{пир. } \beta}$$

$$V = -\frac{1}{3} \cdot S_{\alpha} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot S_{\beta} \cdot (2R + x)$$

$$\frac{38}{3} R = -\frac{2}{3} x + \frac{9}{3} (2R + x)$$

$$\frac{38}{3} R = -\frac{2}{3} x + 6R + 3x$$

$$\frac{7}{3} x = \frac{20}{3} R$$

$$x = \frac{20}{7} R$$

$$2) \triangle SOH \quad SO = x + R = \frac{27}{7} R$$

$$OH = R$$

$$\Rightarrow \sin \angle OSK = \frac{R}{\frac{27}{7} R} = \frac{7}{27}$$

$$\angle OSK = \arcsin \frac{7}{27}$$

$$3) OM \perp (SQP) \Rightarrow SP \perp OM$$

$$OK \perp (SPN) \Rightarrow SP \perp OK$$

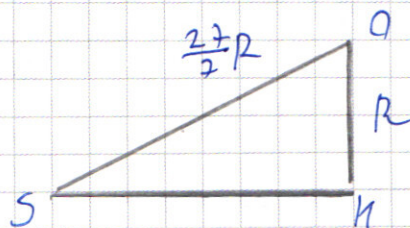
$$\begin{array}{l} SP \perp OM \\ SP \perp OK \end{array} \Rightarrow SP \perp (OMK) \text{ по св-ву } \perp \text{ к двум пересекающимся} \Rightarrow SP \perp MK$$

аналогично

$$SQ \perp (MOK) \Rightarrow SQ \perp MK$$

аналогично

$$SN \perp (OLK) \Rightarrow SN \perp LK$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow$ стороны сечения КМ соответственно перпендикулярны
сторонам треугольника ABC .

$\Rightarrow$ для построения сечения необходимо провести прямые
 $\perp SP, SK, SQ$ вкл-ные $(SQN), (SQP), (SNP)$ соответ-
ственно $\Rightarrow$ полученные фигуры - правильный треугольник
 $= S_{\triangle SQD}$

$$\frac{S}{S_{\triangle}} = \frac{x+R}{x+R} = 1 + \frac{R}{x}$$

$$S = S_{\triangle} \left(\frac{27}{20} \right) = 4 \cdot \frac{27}{20} = \frac{27}{5}$$

Ответ: $\angle ASH = \arcsin \frac{7}{27}$

$$S_{\triangle H} = 5,4$$

5. $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

$$\begin{cases} (|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = 6 \end{cases}$$

I $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

$$\begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y \geq 6 \\ 2x = 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y \geq 6 \\ x+y < 6 \\ -2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y < 6 \\ x+y \geq 6 \\ 2y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y < 6 \\ x+y < 6 \\ -2x + 12 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y \geq 6-x \\ x = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq x-6 \\ y < 6-x \\ y = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq x-6 \\ y \geq 6-x \\ y = 6 \end{cases}$$

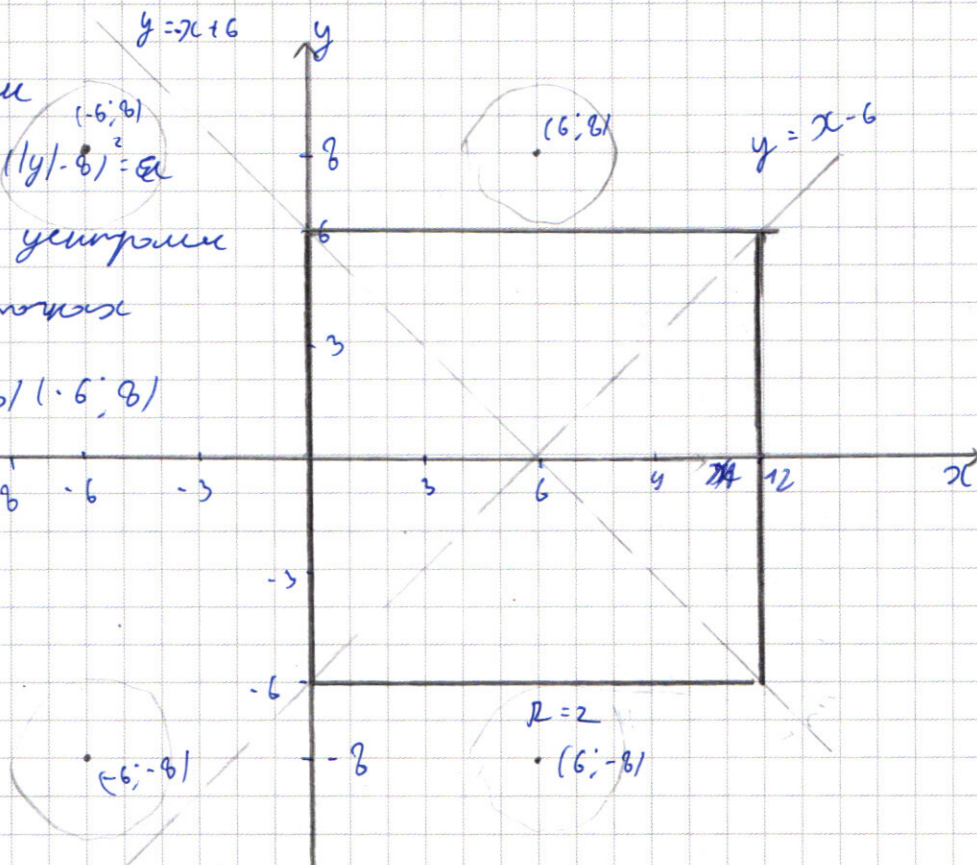
$$\begin{cases} y > x-6 \\ y < 6-x \\ x = 0 \end{cases}$$

Изобразим м.-в точки, удовлетворяющие условию.

Теперь рассмотрим
уравнение $(|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a$
это окружности с центрами
в 4-х различных точках

$(6; 6)$ $(-6; -6)$ $(6; -6)$ $(-6; 6)$

и радиусами, равными $\sqrt{a}$.



Для того, чтобы система miała 2 решения (окружности
должны иметь 2 общие точки с квадратом, полученным
из первого уравнения.

Такое возможно если две "правые" окружности касаются
квадрата и имеют радиус 2, т.е. $\sqrt{a} = 2$ $a = 4$
либо когда две "левые" окружности касаются
вершины $(-12; 6)$ т.п. так как в этом случае
уравнение точек пересечения окружностей с квадратом
не будет $R^2 = |12 - (-6)|^2 + |6 - (-6)|^2 = 18^2 + 12^2 = 324 + 144$
 $a = R^2 = 468$

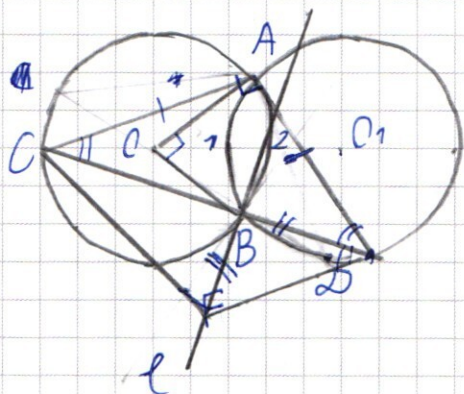
Во всех остальных случаях каждый из кругов будет
пересекать квадрат максимум 2 раза (т.е. всего будет
более 4х решений) либо не будет пересекать квадрат

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вариант

Ответ: 4; 520

6.



Дано:
две окружности ω, ω_1

$$R = 13$$

$$C \in \omega, D \in \omega_1$$

$$B \in CD$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BH \perp CD$$

$$F \in BH$$

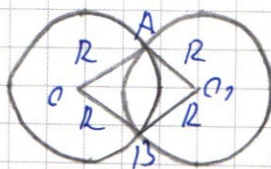
$$BF = BD$$

а) $CF = ?$

$$б) BC = 10 \quad S_{\triangle ACF} = ?$$

1) при пересечении двух окружностей одинакового радиуса

дуги, образующие их пересечением равны, т.е.



$\angle AB_1 = \angle AB_2$ (если O и O_1 центры окружностей, то OA, O_1A радиусы $\Rightarrow \angle O = \angle O_1 \Rightarrow \angle AOB_1 = \angle AOB_2$)

т.е. все стороны равны R

$\Rightarrow$ вписанные углы, опирающиеся на равные дуги

$\angle AB_1$ и $\angle AB_2$ также равны (из равенства окружностей)

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \angle C = \angle D = \frac{180^\circ - \angle CAD}{2} = 45^\circ$$

$\Rightarrow \triangle ACD$ - р/б произвольный треугольник

$$\angle C = 45^\circ \quad \angle C - \text{вписанный} \Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \text{ (т.к. } \angle AOB - \text{центральный)}$$

м.г. $\triangle ADB$ $\perp AD$ и прямоугольный треугольник, проведенная
из точки A ~~высота~~ будет являться высотой и вы-
сотой одновременно:

$\triangle CAB$ и $\triangle BAD$

$$\angle C = \angle D = 45^\circ$$

$AC = AD$ (м.г. $\triangle ADC$ - $\perp AD$)

AB - общая

$$\angle CB = x, BD = y$$

по т. кос $\triangle ABC$

$$AB^2 = x^2 + AC^2 - 2x \cdot AC \cos 45^\circ$$

$\triangle ABD$

$$AB^2 = y^2 + AD^2 - 2y \cdot AD \cos 45^\circ$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $AC = AD$, а окружности симметричны
 $\angle ACP = \angle ADP \Rightarrow \angle CAP = \angle DAP$

$\triangle FAD$ - $\triangle$ $\Rightarrow FAD$ - прямоугольный $\Rightarrow \angle D = 90^\circ$
 $\Rightarrow \angle FAD = 90^\circ \Rightarrow \angle ACP = \angle FDC \Rightarrow CH \parallel FP$
 $\Rightarrow CHPF$ - прямоугольное трапеция

$$\angle APC = \angle CDF = 45^\circ$$

$\Rightarrow$ по углу APD симметричны по углу AD

$\Rightarrow \angle DPF$ - угол между FD и PD

$DP \Rightarrow$ это угол между касательными

касательными $\Rightarrow FD$ - радиус к окружности $AD \in AD \Rightarrow AD = 2R = 26$

$\Rightarrow AD$ - диаметр $\triangle ACD$ т.к. AD - диаметр $\Rightarrow CD = BD = \frac{26\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$

$$CF = \sqrt{CD^2 + FD^2} = 13\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 26$$

$$S_{ACF} = \frac{CD \cdot AF}{2} = \frac{10}{2} \cdot (AD + BF) = 5(13\sqrt{2} + 13\sqrt{2}) = 130\sqrt{2}$$

Ответ: $CF = 26$ $S_{ACF} = 130\sqrt{2}$

$$7. \begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{0.1} \\ y < 85 + (3^{0.1} - 1)2x \end{cases}$$

Угловой функцией $y = 3^x + 4 \cdot 3^{0.1}$ будет экспонен-
 циальная, пересекающая ось y в $4 \cdot 3^{0.1} + 1$, а угловой
 $y = 85 + (3^{0.1} - 1)2x$ будет прямой с большим ка-
 жором.

уменьшилось $3^{81}-1$ и пересечём ось Ox в $(0; 85)$

судьбу и не график

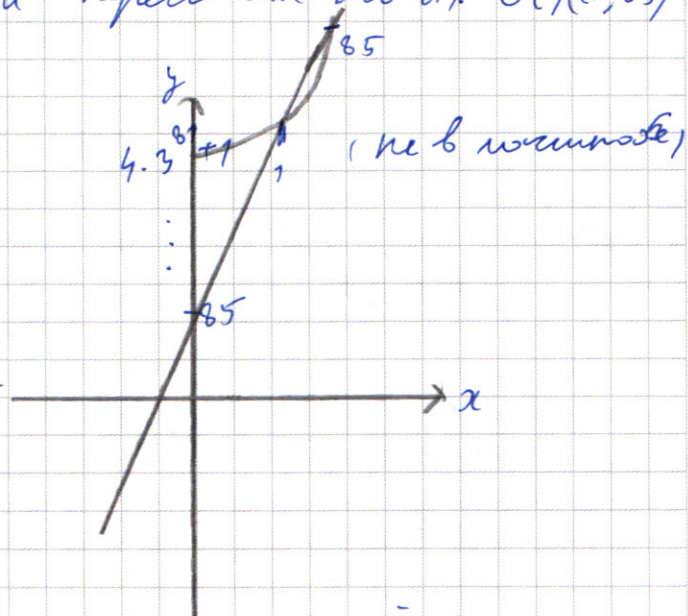
при этом $f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

решим быстрее так.

$y = 85 + (3^{81} - 1)x$ при данных

x (т.е. производная первой

- $\ln 3 \cdot 3^x$, а второй - $3^{81} - 1$)



$\Rightarrow$ первый график будет иметь с прямой 0,1 или 2 точки пересечения, но не больше

нигде их не выберем

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$$

$$3^x + 4 \cdot 3^{81} - 85 - 3^{81}x + x = 0$$

$$3^x + 3^{81}(4 - x) + x - 85 = 0$$

при $x = 4$ $81 + 4 - 85 = 0$

при $x = 85$ $3^{85} + 3^{81} \cdot 81 + 85 - 85 = 0$

$$3^{85} + 3^{81} = 0$$

$\Rightarrow$ при $x \in (1; 85)$ прямая $y = 85 + (3^{81} - 1)x$ будет лежать выше $y = 3^x + 4 \cdot 3^{81} \Rightarrow$ система будет иметь решение, а всего у нас чисел от $(1; 85) - 84$

$$84 = 80 + 4$$

Ответ: $80 + 4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\frac{16875}{150} = 25 \cdot \frac{675}{50} = 25 \cdot 25 \cdot 27 = 5^4 \cdot 3^3$

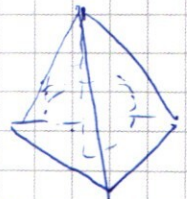
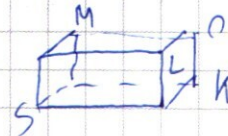
9.3
 $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$

15.555.333

9.5555311

$P(3,3) = \frac{8!}{4! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \cdot 8 = 280$

2. $\cos 2x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 5x = \sin 7x + \sin 3x$



$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x = 2 \sin 5x \cos 2x$

$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = \sin 5x \cos 2x = 0$

$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$

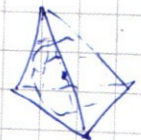
$\begin{cases} \cos 5x - \sin 5x = 0 \\ 2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 5x + \sin^2 5x) \end{cases}$

$\sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) =$

$\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$



$= 2 \sin(\frac{\pi}{4} + 5x)$
 $= 2 \cos(5x - \frac{\pi}{4})$

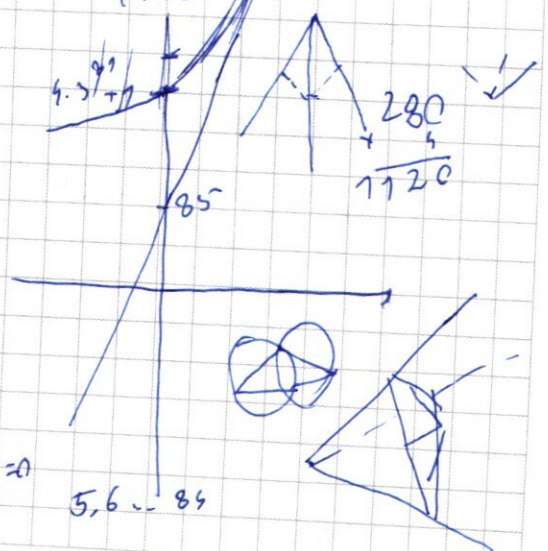


7. $81 + 4 \cdot 3^{21}$
 $81 + 4 \cdot 3^{21}$
 $3 \cdot 81 + 4 \cdot 3^{21}$
 $80 + 5 \cdot 3^{21}$

$3^{21} + 4 \cdot 3^{21}$
 $4 \cdot 3^{21} + 3^{21}$

$3^x + 4 \cdot 3^{21} = 85 + x \cdot 3^{21} - x$
 $3^x + 3^{21} (4 - x) + x - 85 = 0$

$x = 4$
 $x = 85$
 $3^{85} + 3^{21} \cdot 81 = 0$



$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$-xy > 0$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 6y = 0$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^{\lg} > 0$$

$$\log \log y \cdot \log\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \log(-xy) / \log(-x)$$

$$2 \log y (\log x^2 - \log y) = (\log(-x) + \log(y)) / \log(-x) \quad \begin{matrix} a = \log(-x) \\ b = \log(y) \end{matrix}$$

$$2b(2a - b) = (a + b) / a$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 - 3ab + 2b^2 = 0$$

$$a(a - b) - 2b(a - b) = 0$$

$$(a - 2b)(a - b) = 0$$

$$\log(-x) = 2 \log y$$

$$\log(-x) = \log(y)$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$\log\left(\frac{-x}{y}\right) = 0$$

$$x = y$$

$$-x = y$$

$$2y(y - 4) - x(x + 4) = 11y$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}xy$$

$$x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = 2 \cdot \frac{1}{4}y^2 - 4x - 6y$$

$$2y^2 - y^2 - y^2 - 4y^2 - 6y = 0$$

$$2x^2 + x^2 - x^2 - 4x + 6x = 0$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -2$$

$$y = 0 \quad y = 2$$

$$y^4 + y^2 + 2y^2 + 6y = 0$$

$$y(y^2 + y^2 + 2y + 6) = 0$$

$$y(y^2 + y^2 + 2y + 4) = 0$$

$$y(y + 2)(y - y + 4) = 0$$

$$y = 0$$

$$y = -2$$

$$x = 4$$