

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

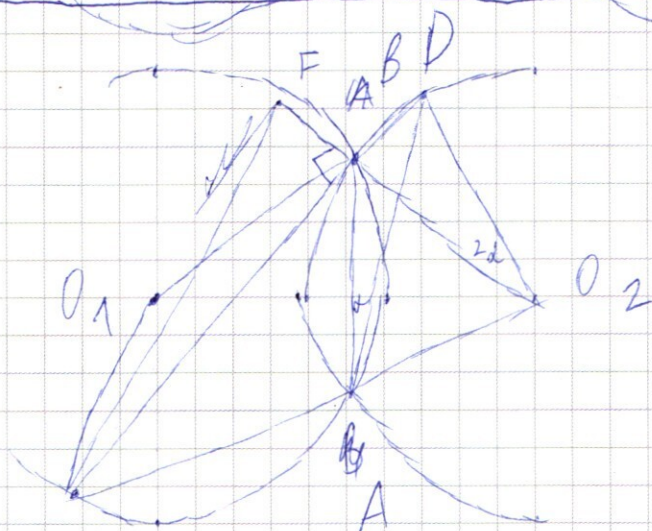
$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 6) CD &= BC \cdot BD = 10 + 24 = 34 \Rightarrow AC = 17 \\
 &= 34 \sin 45^\circ = 17\sqrt{2} \\
 \sin \angle FCA &= \sin(2+45) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 S_{ACF} &= \frac{AC \cdot AF \cdot \sin \angle ACF}{2} = \frac{17 \cdot 17 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 17^2 = 289
 \end{aligned}$$

Problem: d) $CF = \frac{26}{26}$; e) $S = 289$



4) по т. синусов $\triangle BOA$

$$13 = R = \frac{AB}{2 \sin \angle BPA}; \text{ analogously } 13 = \frac{AB}{2 \sin \angle BCA} = 26 \Rightarrow CF = 26$$

$$\sin \angle BDA = \sin \angle BCA \Rightarrow \angle BDA = \angle BCA \text{ (m.k. we know } 180 - \angle CAD = 90^\circ) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \angle PCA = \angle CDA = 45^\circ; (5) \quad BC = 26 \cos 2 = 10 \Rightarrow \cos 2 = \frac{5}{13} \Rightarrow \sin 2 = \frac{12}{13}$$

$$\sin \angle FCB = \frac{BF}{CF} = \frac{26 \sin 4}{26} = \sin 4 \Rightarrow \angle FCB = 4 \text{ (m.k. yaani merke } 90^\circ)$$

1) Пусть $\angle BAD = 2^\circ$
 $\Rightarrow \angle BO_2 D = 2^\circ$ (как
 впис. и центр. углы)
 $\Rightarrow \angle BAO_2 = 90^\circ - 2^\circ$
 $\Rightarrow \angle BO_1 C = 180^\circ - 2^\circ$
 (околоокр.)

$$\begin{aligned} 2) \text{ nom. ungesch. } \Delta BO_2D: \\ (\Delta BO_2D - \text{normal, } (BO_2 = DO_2 = 13^\circ) \\ \Rightarrow \angle BDO_2 = \angle DBO_2 = 90^\circ - \alpha) \\ \frac{13}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{BD}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow BD = 26 \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Opposite CB} &= 26 \sin(90^\circ + \alpha) = \\ &= 26 \sin(90^\circ - \alpha) = 26 \cos \alpha \end{aligned}$$

3) nam. Thiropapir b

$$\Delta CBF \quad CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} =$$
$$= \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{26^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} =$$

$$\Delta CBF \text{ CF} = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{26^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} =$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 5 \\ 15 \overline{) 16875} \\ 36 \end{array}$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 5 \\ 3375 \div 5 \\ 675 \div 5 \\ 135 \div 5 \\ 27 \div 3^3 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \\ 15 \times 15 = 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16875 \div 625 \\ 1250 \div 27 \\ 4375 \\ 4375 \\ 0 \end{array}$$

Необходимо, в числе могут быть только цифры 1, 3, 5, 9 (т.к. произв. нем. и некр. 7); цифра 5 - ровно 4, (1) & три цифры три и цифра 1, (2) цифра 9, цифра 3 и две цифры 1

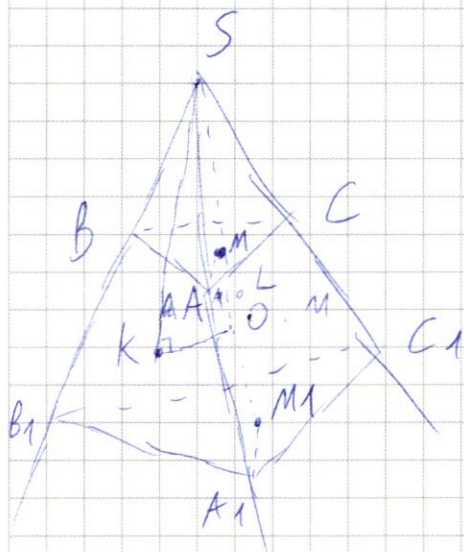
Число типа (1) $8 \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 280$ (отдельные места (запятая) для "1" три, "3" "5")

Число типа (2) $8 \cdot 7 \cdot \frac{8 \cdot 5}{2} = 840$ (однако.)
 для "3" и "9" в две "1"

Всего: $280 + 840 = 1120$ (оба типа не пересекаются)

Ответ: 1120.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Н/Ч

1) $\triangle ASM \sim \triangle A_1SM_1$ (м.к.

$SO \perp$ площ. ABC и $SO \perp$ площ. $A_1B_1C_1$
и $\angle ASM$ - общий $\Rightarrow \frac{SA}{SA_1} = \frac{SM}{SM_1}$

(Заметим, что MM_1 - диаметр
сферы $\Rightarrow SM_1 = SM + 2R$)

$$\text{аналог. } \frac{SA}{SA_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SM}{SM+2R} = \frac{SC}{SC_1} =$$

$$= \frac{SM}{SM+2R} \Rightarrow \triangle SBA \sim \triangle SB_1A_1 \text{ (м.к.)}$$

$$\frac{SC}{SC_1} = \frac{SB}{SB_1} = \frac{SA}{SA_1} \Rightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{SM}{SM+2R} =$$

$$= \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{ABC}{A_1B_1C_1} \text{ (аналог.)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \text{ (по 3-м стор.)} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} =$$

$$= \left(\frac{SM}{SM+2R} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{SM}{SM+2R} \right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{SM}{SM+2R} = \frac{2}{3} \Rightarrow SM = 4R$$

2) OK - радиус K - точки кас. сферы площ. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OK \perp \text{плос. } SAB \Rightarrow OK \perp SK \Rightarrow \sin \angle KSO =$$

$$= \frac{KO}{SO} = \frac{R}{SM+R} = \frac{R}{5R} = \frac{1}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

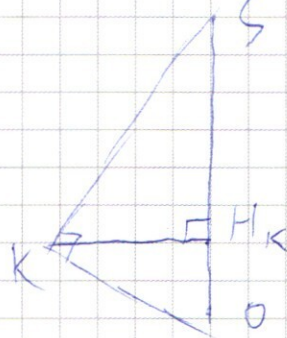
3) в треугольнике SKO построим высоту

$$SH_K \Rightarrow \triangle SH_KK \sim \triangle SKO \text{ (по 2-м углам)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{SH_K}{SK} = \frac{SK}{SO} \Rightarrow SH_K = \frac{SK^2}{SO} = \frac{25R^2 - R^2}{5R} = 4,8R$$

$$\text{м.к. по т. Пифагора в } \triangle SKO \quad SK^2 = SO^2 - KO^2 =$$

$$= (4+1)R^2 - R^2 \text{ (продолж. на обороте)}$$



№4 (продолж.)

аналог. $SH_M = SH_L = SH_K = 4,8R \Rightarrow$ точки H_M, H_L и H_K - совпадают $\Rightarrow$ (т.к. $MH_M \perp SO$, $LH_L \perp SO$ и $KH_K \perp SO$) прямые MH_M, LH_L и KH_K - лежат в 1 плоскости (MH_M и LH_L - в 1 плоск. $\perp SO \Rightarrow KH_K$ в этой же плоск. т.к. $SO \perp KH_K$ и KH_K проходит через пересеч. SO и этой плоск.) $\Rightarrow$ плоск. $MLK \perp SO \Rightarrow$

аналог. 1) $\frac{S_{MLK}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SH_K}{SM} \right)^2 = \left(\frac{4,8R}{4R} \right)^2 = (1,2)^2 = 1,44 \Rightarrow S_{MLK} = 5,76$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$; $S_{MLK} = 5,76$.

№3

$$\left[\left(\frac{x^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(1-xy)} \right]$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \quad (1)$$

$$(1) \quad x^2 + x(y+4) + 8y - 2y^2$$

$$D = y^2 + 16y + 16 - 32y + 8y^2 = (3y-4)^2$$

$$x = \frac{-y-4 \pm \sqrt{3y-4}}{2}$$

$$\left[x = y-4 \quad (1) \quad \left(\frac{(y-4)^4}{y^2} \right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y)y)} \right]$$

$$\left[x = -2y \quad (2) \quad y = 2 \left(\left(\frac{2^4}{2^2} \right)^{\lg y} = 2^{2 \lg y}, (4-2)^{\lg((4-2)2)} = 2^{\lg 2^2 = 2 \lg 2} \right) \Rightarrow x = -2 \right]$$

$$(2) \quad (16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2y^2} \Rightarrow 16^{\lg y} \cdot y^{\lg y^2} = 2^{\lg 2y^2} \cdot y^{\lg 2y^2}$$

$$\Rightarrow y^{\lg 2} = 2^{\lg \frac{y^2}{2}} \Rightarrow y^{\lg \frac{y^2}{2}} = 2^{\lg \frac{y^2}{2}} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -4$$

Ответ: $(-4; 2), (-2; 2)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = d \end{cases}$$

$$(1): x-6-y \geq 0$$

$$x-6+y \geq 0$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$x = 12$$

$$6-y \geq 0$$

$$6+y \geq 0 \Rightarrow y \in [-6, 6]$$

$$x-6-y \leq 0$$

$$x-6+y \leq 0$$

$$x-6+y + x-6-y = -12$$

$$x = 0$$

$$-6-y \leq 0 \Rightarrow y \geq -6$$

$$-6+y \leq 0 \Rightarrow y \leq 6$$

$$x-6-y \geq 0$$

$$x-6+y \leq 0$$

$$x-6-y - y - x+6 = 12$$

$$y = -6 \Rightarrow x \in [0, 12]$$

аналог.

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

$$y = 6 \quad x \in [0, 12]$$

Значит, из (1) следует

$$x = 12$$

$$x = 0$$

$$y \in (-6, 6)$$

$$y = 6$$

$$y = -6$$

$$x \in (0, 12)$$

(м.к. едениц. для поиска. если $y \neq 0$, то имеет 4 реш. и отсюда.)

(a) - возможно при

$$(y-8)^2 = d-36$$

$$y \in (-6, 6) \Rightarrow |y-8| \in [8, 14]$$

$$d-36 \in [4, 64] \Rightarrow d \in [40, 100]$$

$$y = 0$$

$$6^2 + 8^2 = d \Rightarrow d = 100$$

проверка: $d = 100 \Rightarrow$ при $x = 12$ или $x = 0$

$y = 0$ или $y = 16$ - не годятся по условиям;

при $y = \pm 6$ $(|x|-6)^2 \neq 36$ (м.к. $x \in (0, 12)$) и, по $(|y|-8)^2 = 4 \Rightarrow (|x|-6)^2 \geq 100-4$ - не год. $\Rightarrow d = 100$ - подходит (проверка по другим листам №8)

$$\cos 60 + \cos 120 = 2 \cos 90 \cos 30 \quad \text{N2}$$

$$\cos 60 + \cos 60 = 2 \cos 50 \cos 50$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x)$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \quad (1)$$

$$\cos 5x = \sin 5x \quad (2)$$

$$(1) \cos 2x = \cos 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x$$

$$\cos 2x = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n \quad k, n - \text{целые}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} \quad \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k n}{7} \right)$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k n}{7} \quad \left(\frac{7\pi}{4} + 14\pi k = \frac{3\pi}{4} + 6\pi n \Rightarrow 14k + 1 = 6n - \text{невозм. (14k, 6n - четн, 1 - нечет)} \Rightarrow \text{серий не пересекаются} \right)$$

$$(2) \cos 5x = \cos(\frac{\pi}{2} - 5x)$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 5x + 2\pi m$$

$$5x = 5x - \frac{\pi}{2} + 2\pi t \quad m, t - \text{целые}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{5} \quad \left(\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{5} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + 10\pi k = \frac{7\pi}{4} + 7\pi m \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = 2\pi t \quad \text{невозм.} \quad \left(\frac{1}{2} = 2t, t - \text{целое} \right) \Rightarrow \text{пересек. серий нет.}$$

Ответ:

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi k n}{7}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{5}$$

$$\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi m}{5} \Rightarrow \frac{5\pi}{4} + 10\pi k = \frac{7\pi}{4} + 7\pi m$$

$$= \frac{3\pi}{4} + 3\pi m \Rightarrow 0,5 + 10k = 3m - \text{невозм. (аналогично)} \Rightarrow$$

$$\text{пересек. серий нет.}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases} \quad \text{(Заметим, что если } 85 + (3^{81} - 1)x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \text{ то решений нет)}$$

При $x < 0$ $y < 0$, но $y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} > 0$ - левая,
(т.к. $x < 0 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow y \leq 86 - 3^{81} < 0$)

При $x \in \mathbb{N} \leq 4$ $85 + (3^{81} - 1)x < 4 \cdot 3^{81} + 3^x$ (т.к.
 $85 + (3^{81} - 1)x \leq 85 + (3^{81} - 1)3 < 4 \cdot 3^{81} + 3^x$) решений нет

При $x = 4$ $3^4 + 4 \cdot 3^{81} = 85 + (3^{81} - 1)x$ решений нет

При $x \in [5, 84]$ $85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
(т.к. $85 + (3^{81} - 1)x \geq 80 + 5 \cdot 3^{81}$, $3^x + 4 \cdot 3^{81} \leq 3^{81} \left(4 + \frac{1}{3}\right) < 80 + 5 \cdot 3^{81}$)

При $x = 85$ $85 + (3^{81} - 1)85 = 3^{81} \cdot 81 + 4 \cdot 3^{81}$ решений нет

При $x > 85$ $85 + (3^{81} - 1)x < 3^x + 4 \cdot 3^{81}$
(т.к. $85 + (3^{81} - 1)x < x \cdot 3^{81}$; $4 \cdot 3^{81} + 3^x = 3^{81} \left(4 + 3^{x-81}\right)$ и, при $x > 85$ $4 + 3^{x-81} > x - 4$)

(т.к. при $x = 86$ верно, а далее при x увелич на 1 левая часть увелич в 3 раза, а правая увелич. на 1) решений нет

Если $x_0 \in [5, 84]$, то подставляем y всего
 $85 + (3^{81} - 1)x_0 - 4 \cdot 3^{81} - 3^{x_0} = 3^{81}(x_0 - 4) + 85 - x_0 - 3^{x_0}$

Получаем что всего решений: 3^{81} (сумма чисел от 1 до 81 + 80) + (сумма чётных чисел от 80 до 1) - (сумма чётных степеней 3 от 3^5 до 3^{84}) (привожу на другом листе)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(b) - возможно, если №5 (продолж.)

$$[(|x|-6)^2 = d-4]$$

$$x \in (0; 12) \Rightarrow (|x|-6)^2 \in [0; 36]$$

$$d-4 \in [0; 40]$$

$$d \in [4; 40]$$

проверка кол (d): при $d \in [4; 40]$

$$|x|=12$$

$$x=0$$

$$y \in (-6; 6)$$

Заметим, что $y \in (-6; 6) \Rightarrow |y| \in [0; 6) \Rightarrow |y|-8 \in$

$$\in [-8; -2] \Rightarrow (|y|-8)^2 \geq 4 \Rightarrow 64 + (|y|-8)^2 \geq 40 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ решений нет $\Rightarrow$ при $d \in [4; 40]$ - 2 реш.

(т.к. x - отриц. ($x = \sqrt{d-4} + 6$ (т.к. $x \geq 0$)) и

$$y = \pm 6)$$

Ответ: $d \in [4; 40] \cup \{100\}$.

№7 (продолж.)

Сумма членов ряда от 1 до 80: $\frac{40 \cdot (80+1)}{2} = 40 \cdot 81 = 3240$

Сумма степеней тройки от 3 до 3⁸⁴: $\frac{3^{85}-1}{2} \Rightarrow$ Сумма степеней тройки от 3⁵ до 3⁸⁴: $\frac{3^{85}-1}{2} - 1-3-9-27-81 = \frac{3^{85}-1}{2} - 121$

Всего: $3^{81} \cdot 3240 + 3240 + 121 = \frac{3^{85}-1}{2} = 3^{81} \cdot 3199,5 + 3240,5$

Ответ: $3^{81} \cdot 3199,5 + 3240,5$.

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$x = y - 4$$

$$y(2y - x)$$

$$(x^2 + x(y+4) - 2y^2 + 8y = 0$$

$$y^2 + 8y + 16 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = \frac{y - 4 \pm \sqrt{(3y - 4)^2}}{2} \quad x: 5, 6, \dots, 84$$

$$3y - 4 \geq 0$$

$$x = \frac{2y - 8}{2} = y - 4$$

$$x = \frac{-4y}{2} = -2y$$

$$\left(\frac{(y-4)^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (4-y)^{\lg((4-y) \cdot y)} \quad (16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$$(4-y)^{\lg((4-y) \cdot y)} = (4-y)^{\lg y} \cdot (4-y)^{\lg(4-y)}$$

$$\left(\frac{4-y}{y-4}\right)^{4 \lg y} = (4-y)^{\lg((4-y) \cdot y)} \cdot y^{2 \lg y} \cdot y^{\lg 2y^2}$$

$$(4-y)^{4 \lg y \lg\left(\frac{y-4}{4-y}\right)} = y^{2 \lg y}$$

$$x = 12, \quad -6 - y \leq 0$$

$$-6 + y \geq 0$$

$$x = 0$$

$$-6 - y \geq 0$$

$$x - 6 - y \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$x - 6 + y \leq 0 \quad x \leq 12$$

$$y = -6$$

$$x - 6 - y \leq 0$$

$$x - 6 + y \geq 0 \quad x \geq 0$$

$$y = 6$$

$$(|y| - 8)^2 = d - 36$$

$$\text{Емк } d - 36 = 64 \quad (d = 100) - \text{трет.$$

$$y = 0; \text{ Емк } d - 36 \in [4, 64] - \text{втор.$$

$$(|x| - 6)^2 = d - 4$$

$$\text{трет. Емк } d - 4 \in [80, 36]$$