

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

### 11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 10$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~2.

$$\cos 7x + \cos 3x = 2 \cos\left(\frac{7x+3x}{2}\right) \cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right) = 2 \cos 5x \cos 2x,$$

$$\sin 7x + \sin 3x = 2 \sin 5x \cos 2x, \quad \cos 10x = \cos^2 5x - \sin^2 5x = (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x)$$

⇓

у-е из условия можно преобразовать к виду:

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)(\cos 5x + \sin 5x) - 2 \sin 5x \cos 2x = 0$$

разделим у-е на  $\sqrt{2}$  и учтём, что  $2 \cos 5x \cos 2x - 2 \sin 5x \cos 2x = 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x)$ ;

получим:

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sqrt{2} \cos 2x - (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x\right) = \cos 5x + \sin 5x$$

⇓

$$(\cos 5x - \sin 5x) \cdot \sqrt{2} \left(\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)\right) = 0$$

$$\cos 5x - \sin 5x = 0 \quad \text{или} \quad \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 0$$

$$\sin 5x = \cos 5x$$

если  $\cos 5x = 0$ , то  $\sin 5x \neq 0 \Rightarrow \cos 5x \neq 0$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi a, \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi a}{5}, \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{\cos 2x} - 2 \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{3x}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cancel{\cos 2x} - \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi b, \quad b \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi b}{3}, \quad b \in \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{7x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi c, \quad c \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi c}{7}, \quad c \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Отв.: } \frac{\pi}{20} + \frac{\pi a}{5}; \quad \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi b}{3}; \quad \frac{\pi}{28} + \frac{2\pi c}{7} \quad (a, b, c \in \mathbb{Z}).$$

~3.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

разделим второе у-е системы из условия на  $-1$ :

~~левая часть~~  ~~$x^2 + x(4+y) + 8y - 2y^2 = 0$~~

~~эта часть~~ раскладывается на множители  $(x+4-y)$  и  $(x+2y)$ , т.к.

$$(x+4-y)(x+2y) = x^2 + 4x - xy + 2xy + 8y - 2y^2 = x^2 + x(4+y) + 8y - 2y^2$$

$\Downarrow$

~~или~~  $x+4-y=0$

или

~~или~~  $x+2y=0$

$x = -2y$

подставляем в первое у-е системы  $x$ :

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

т.к.  $y > 0$ , то:

$$(16y^2)^{\lg y} = \cancel{(16y^2)^{\lg y}} (2y)^{\lg 2 + 2\lg y}$$

$$\cancel{4^{\lg y}} \cdot (4y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2} \cdot \cancel{(4y^2)^{\lg y}}$$

$$4^{\lg y} = (2y)^{\lg 2}$$

$$\cancel{2^{\lg y}} \cdot 2^{\lg y} = 2^{\lg 2} \cdot 10^{\lg 2 \lg y}$$

$$10^{\lg 4 \lg y} = 10^{\lg^2 2 + \lg 2 \lg y}$$

$$2\lg 2 \lg y = \lg^2 2 + \lg 2 \lg y$$

$$\lg y = \lg 2$$

$$y = 2$$

Ответ:  $(-4; 2)$ ;

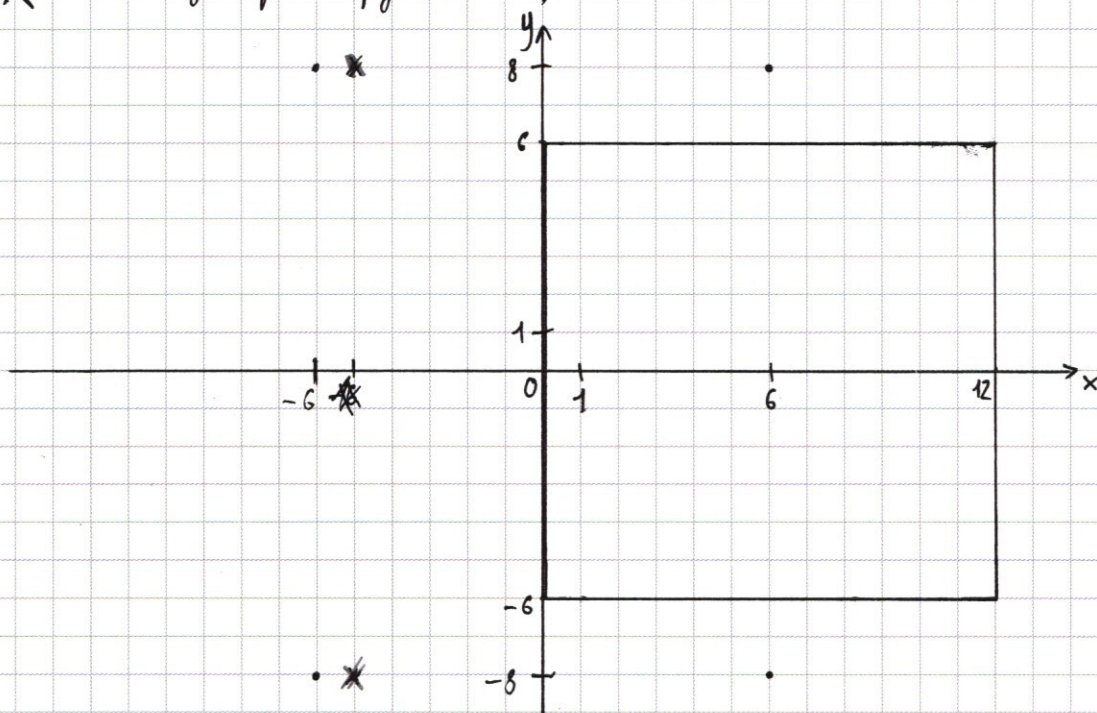
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

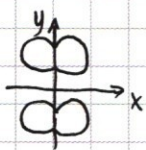
Первое у-е системы задаёт на коорд. плоскости четырёхугольник, ограниченный прямыми  $x-6-y+x-6+y=12$ ,  $x-6-y-x+6-y=12$ ,  $-x+6+y+x-6+y=12$ ,  $-x+6+y-x+6-y=12$ , т.е. прямыми  $x=12$ ,  $y=-6$ ,  $y=6$ ,  $x=0$ .

Второе у-е системы задаёт четыре окружности с центрами  $(6;8)$ ,  $(-6;8)$ ,  $(6;-8)$ ,  $(-6;-8)$  и радиусом  $\sqrt{a}$  или ~~другую~~ ~~конструкцию~~ конструкцию.

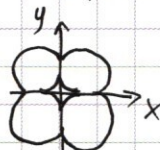
Точки — центры окружностей.



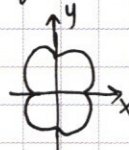
Если второе у-е задаёт первую фигуру, то, очевидно, радиус окр. должен быть равен 2, т.е.  $\sqrt{a}=2$ , т.е.  $a=4$ . Если нет, то оно может задавать или такую фигуру:

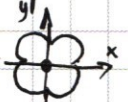


; или такую:



; или такую:



Все симметрично относительно оси  $Ox \Rightarrow$  первый случай не подходит. Из второго случая подходит только такая фигура:  (т.е.  $\sqrt{a} = \sqrt{36+64}$ , т.е.  $a=100$ ).

Фигура третьего случая вообще не ~~пересекает~~ имеет с квадратом общих точек.

Отв.: 4; 100.

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1.

$16875 = 3^3 \cdot 5^4 \Rightarrow$  (по ~~основной~~ основной теореме арифметики) среди

~~цифр восьмизначного числа должны встречаться ровно 4 пятёрки, а~~

цифр восьмизначного числа должны встречаться ровно 4 пятёрки, а ~~среди~~ среди четырёх цифр, не являющихся пятёрками, должны встречаться

а) 1, 1, 9, 3 или б) 1, 3, 3, 3. В случае а) (если соединить четыре цифры,

(т.к.  $9 = 3^2$ )

не явл. 5, вместе) могут получиться числа: 9311, 9131, 9113, 1931,

1913, 1193, 3911, 3191, 3119, 1391, 1319, 1139. Аналогично, в

случае б) могут получиться числа: 1333, 3133, 3313, 3331. Итого всего

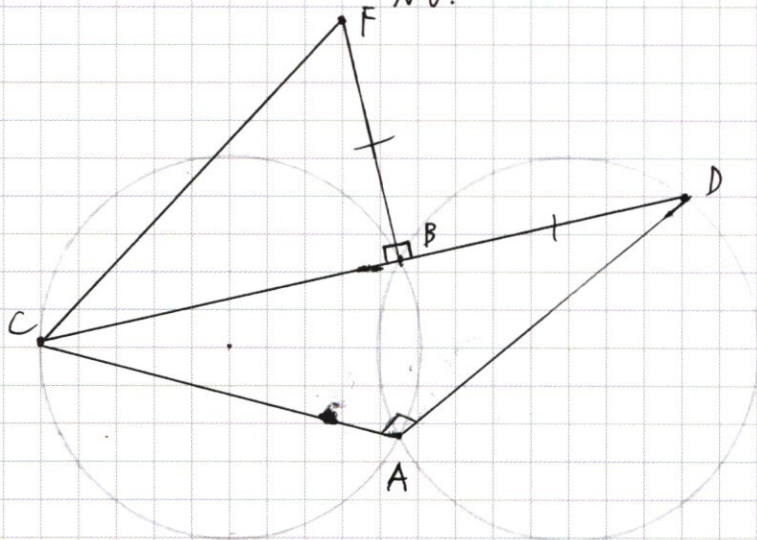
$12 + 4 = 16$  возможных таких <sup>четырёхцифр.</sup> чисел, что произв. их цифр равно  $3^4$ . Теперь

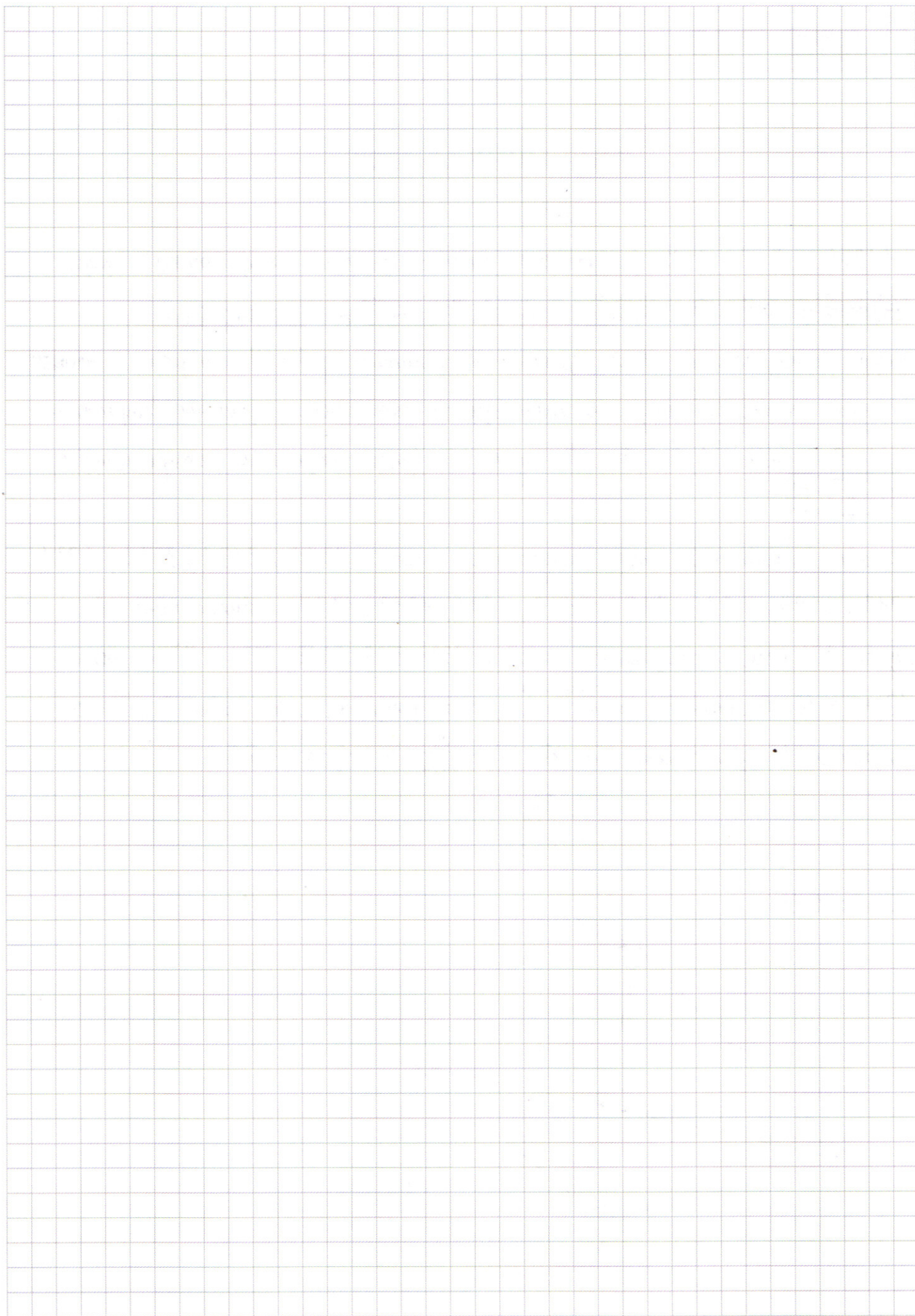
остается 16 умножить на ~~на~~  $C_8^4 = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 4} = 70$ .

$$\begin{array}{r} \times 16 \\ 70 \\ \hline 1120 \end{array}$$

Отв.: 1120.

~6.





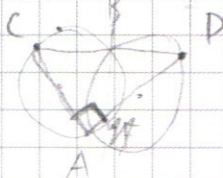
☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

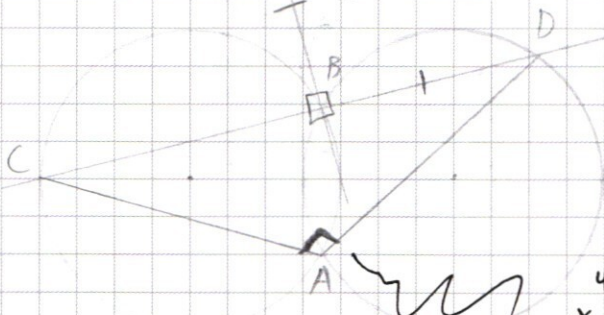
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sin 2L = \cos^2 L - \sin^2 L$



$\lg y = 2 \cdot 10 \lg^2 \lg y$



$$\sin 2 + \cos 2 = \sqrt{2} \sin(2 + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - 2)$$

$$\sin(2 + 45) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2 + \cos 2)$$

$$(16y^2)^{\lg y} =$$

$$(2y)^{\lg^2 + 2\lg y}$$

$$(2y)^{\lg^2} \cdot (4y^2)^{\lg y}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^{2\lg y}} =$$

$$\begin{aligned} -xy &> 0 \\ xy &< 0 \\ x &< 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 5x + \sin^2 5x - \sqrt{2} \sin 5x \cos 2x = 0$$

$$\cos 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x) - \sin 5x (2 \cos 2x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (\sqrt{2} \cos 2x - \cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$x^2 + 4x + xy + 8y - 2y^2 = 0$$

$$x^2 + x(4+y) + 8y - 2y^2 = 0$$

$$16 + 8y + y^2 - 32y = 9y^2 - 24y + 16 = (3y - 4)^2$$

$$x = y - 4 \text{ или } x = -2y$$

$$-x = 2y$$

$$\frac{2y - 8}{2} = y - 4$$

$$16875 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$\begin{array}{r} 16875 \overline{) 5} \\ 3375 \overline{) 3} \\ 1125 \overline{) 3} \\ 375 \overline{) 5} \\ 75 \overline{) 5} \\ 15 \overline{) 5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 5} \\ 5 \overline{) 3} \\ 1 \end{array}$$

abcdefgh

$$abcdefgh = 3^3 \cdot 5^4$$

~~3,3,3,5,5,5,5~~

.....

.....

$$4 \cdot 19^2$$

~~1900~~

900

$$\begin{array}{r} 1800 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \\ \times 27 \\ \hline 4375 \\ 1250 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x \geq 6+y \\ x \geq 6-y \end{array}$$

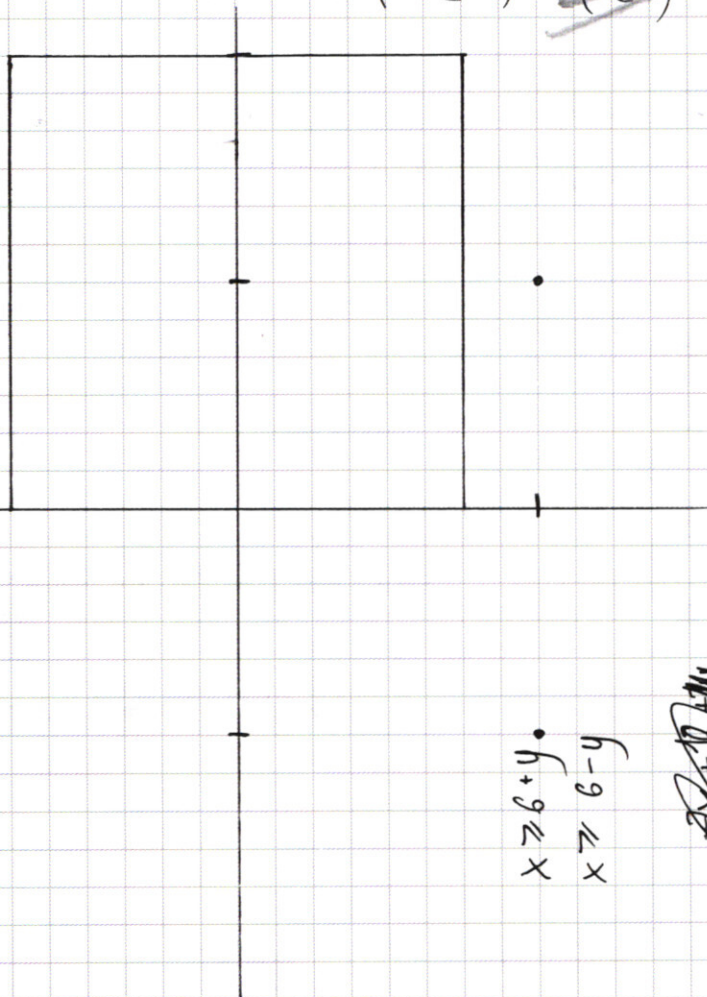
$$x+y \geq 6$$

$$-x+6+y-x+6-y=12$$

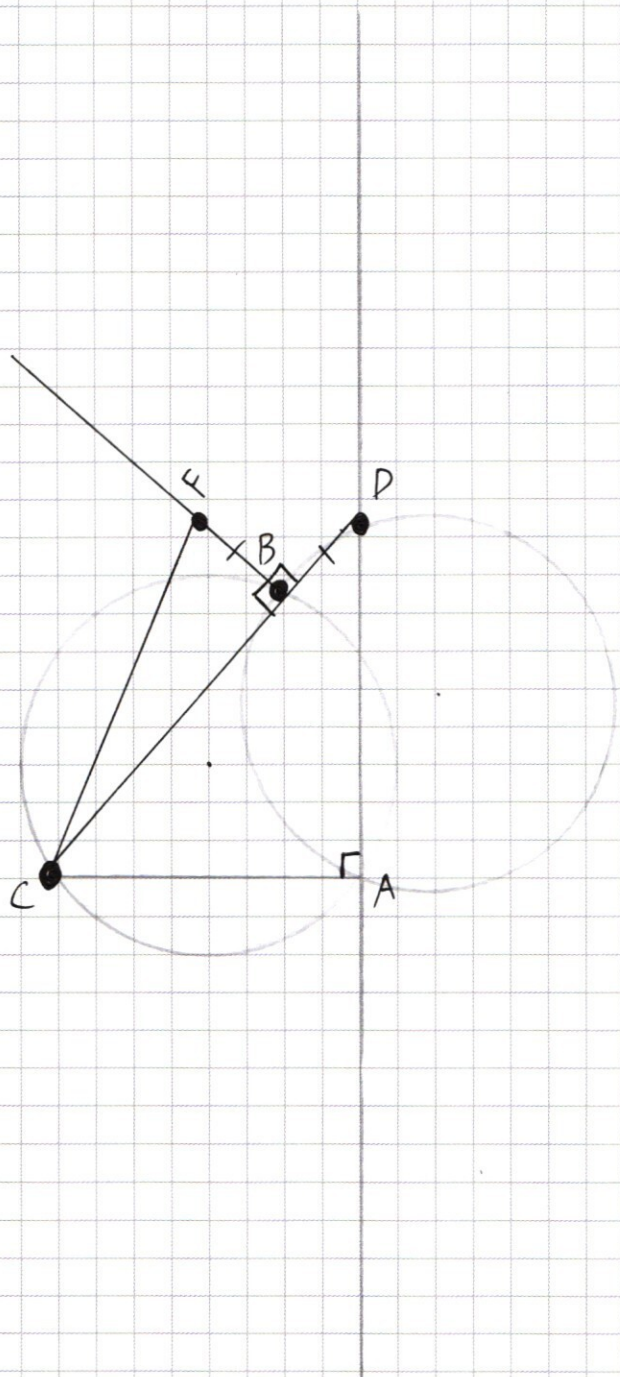
$$2^{199} = 2^{192}$$

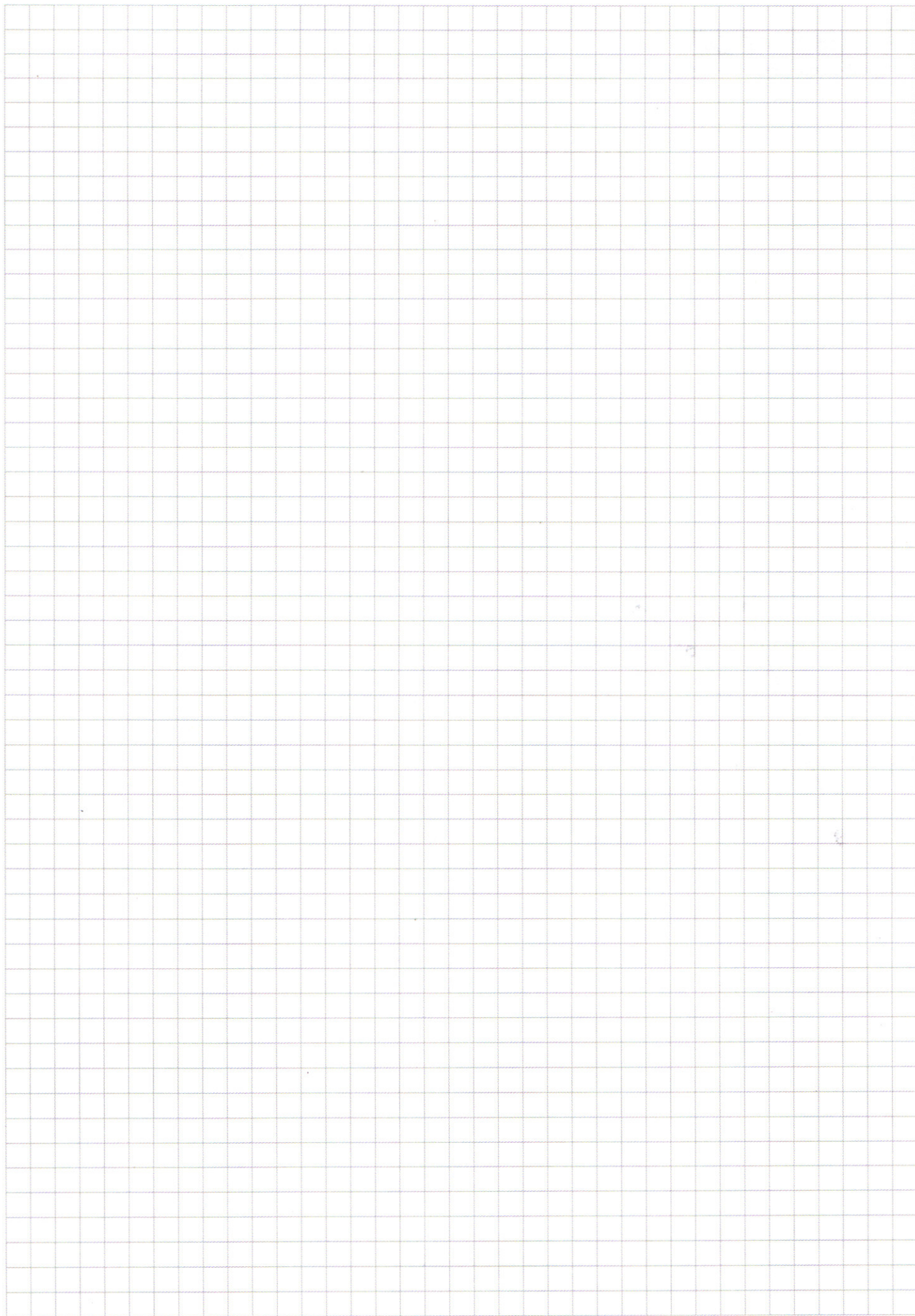
4

$$\cos(90-1) + \cos(90-8) = 2 \cos\left(\frac{180-1-8}{2}\right) \cos\left(\frac{1-8}{2}\right)$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик    ☐ чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)