МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}\cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 4 и 9.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12, \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)\, x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

Заметим, что ~~18~~ $16875 = 5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3$.

Значит восьмизначные числа должны состоять из четырёх пятёрок, трёх ~~тро~~ троек и одной единицы. Тогда произведение цифр этих восьмизначных чисел будет равняться 16875.

Набор: 5 5 5 5 3 3 3 1

Места: _ _ _ _ _ _ _ _

Т.к. единица одна, то в числе её можно поставить на одно из восьми мест. Дальше останется 7 пустых позиций, на которые нужно поставить четыре „5" и три „3". Т.е нужно из 7 выбрать 3 позиции и на них поставить по „3", а на оставшиеся четыре однозначно ставятся оставшиеся четыре „5".

Значит всего чисел $N = 8\cdot C_7^3 = 8\cdot\frac{7!}{4!\cdot3!} =$

$= 8\cdot\frac{5\cdot6\cdot7}{2\cdot3} = 4\cdot5\cdot2\cdot7 = 20\cdot14 = 280$.

Причём нет никаких ограничений на позицию цифры в числе, любая цифра может стоять где угодно.

Ответ: 280

Задача №2.

Разложим сумму косинусов слева и сумму синусов справа в произведение:

1) $\underbrace{\cos 7x}_{5x+2x}+\underbrace{\cos 3x}_{5x-2x}=\cos 5x\cos 2x-\sin 5x\sin 2x+\cos 5x\cos 2x+$

$+\sin 5x\sin 2x=\underline{2\cos 5x\cos 2x}$

2) $\underbrace{\sin 7x}_{5x+2x}+\underbrace{\sin 3x}_{5x-2x}=\sin 5x\cos 2x+\sin 2x\cos 5x+\sin 5x\cos 2x-$

$-\sin 2x\cos 5x=\underline{2\sin 5x\cos 2x}$

Исходное уравнение записывается в виде:

$2\cos 5x\cos 2x-\sqrt{2}\cdot\cos 10x=2\sin 5x\cos 2x$

Сократим на $\sqrt{2}$ обе части и преобразуем:

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x-\sin 5x)=\cos 10x;$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x-\sin 5x)=\cos^2 5x-\sin^2 5x.$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x-\sin 5x)=(\cos 5x+\sin 5x)(\cos 5x-\sin 5x);(*)$

Отсюда два случая:

1) $\cos 5x-\sin 5x=0.$

$\cos 5x=\sin 5x$

$\cos 5x\neq 0$, иначе не выполняется основное тригоном тождество, т.к $\sin 5x=\cos 5x=0\Rightarrow$ можем поделить на $\cos 5x$:

$1=tg 5x;\quad 5x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z};$

$$\boxed{x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5}, k\in\mathbb{Z}.}$$

2) Если $(\cos 5x-\sin 5x)\neq 0$, то можем сократить обе части уравнения $(*)$ на ненулевой множитель:

$\sqrt{2}\cos 2x=\cos 5x+\sin 5x.$

Введем вспомогательный аргумент и преобразуем правую часть:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}\left(\cos 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Значит:

$\sqrt{2}\cos 2x = \sqrt{2}\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 2x = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow$

$\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$

Отсюда:

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} 7x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$,

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$; объединяя полученные множества в 1) и 2) получим ответ

Ответ:

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{28} + \frac{2}{7}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Задача №3

$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}; & (I) \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0; & (II) \end{cases}$

Из I: $y \neq 0$; $y > 0$, $x < 0$, т.к $\lg y$ и $\lg(-xy)$ определены при $y > 0 \Rightarrow -x > 0$; $x < 0$

Рассмотрим уравнение II:

$2y^2-xy-x^2-4x-8y=0$

$(y-x)(2y+x)-4(x+2y)=0$

$(2y+x)(y-x-4)=0$

Отсюда $x=-2y$ (1) или $y=x+4$ (2).

Таким образом рассмотрим два случая:

1) $x=-2y$, тогда уравнение I примет вид:

$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2y^2}$; $(16y^2)^{\lg y}=(2y)^{\lg 2+2\lg y}$.

Прологарифмируем обе части по осн-ю 10:

$\lg(16y^2)^{\lg y}=\lg(2y)^{\lg 2+2\lg y}$; ф-я $\lg t\nearrow$ на ОДЗ $\Rightarrow$

$\lg y(\lg 16+2\lg y)=(\lg 2+2\lg y)(\lg 2+\lg y)$

$4\lg y\lg 2+\cancel{2\lg^2 y}=\lg^2 2+\cancel{2\lg y\lg 2}+\cancel{\lg y\lg 2}+\cancel{2\lg^2 y}$

$\lg y\lg 2=\lg^2 2$; $\lg 2\neq 0\Rightarrow$

$\lg y=\lg 2$. ф-я $\lg t\nearrow$ на всей ОДЗ $\Rightarrow$

$y=2$

Значит $x=-2y=-4$. $\Rightarrow$ получим часть ответа

Ответ: $(-4;2)$, удовлетворяет $\begin{cases}y>0\\x<0\end{cases}$

2) Если $y=x+4$ то уравнение I примет вид:

$\left(\frac{x^4}{(x+2)^2}\right)^{\lg(x+4)}=(-x)^{\lg(-x(x+4))}$;

Аналогично прологарифмируем по осн-ю 10:

$\lg\left(\frac{x^4}{(x+2)^2}\right)^{\lg(x+4)}=\lg(-x)^{\lg(-x(x+4))}$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\lg(x+4)(4\lg(-x)-2\lg(x+4))=(\lg(-x)+\lg(x+4))\cdot\lg(-x)$

$4\lg(-x)\lg(x+4)-2\lg^2(x+4)=\lg^2(-x)+\lg(x+4)\lg(-x)$

$3\lg(-x)\lg(x+4)-2\lg^2(x+4)=\lg^2(-x)$

$\lg^2(-x)-3\lg(x+4)\lg(-x)+2\lg^2(x+4)=0.$

Рассмотрев как квадратное ур-е отн-но $\lg(-x)$ получим:

$(\lg(-x)-2\lg(x+4))(\lg(-x)-\lg(x+4))=0$

Отсюда два случая:

1) $\lg(-x)=\lg(x+4)$

$\lg t\uparrow$ на ОДЗ $\Rightarrow$ $-x=x+4$

$\boxed{x=-2 \Rightarrow y=2}$

2) $\lg(-x)=2\lg(x+4)$

$-x=(x+4)^2=x^2+8x+16$

$x^2+9x+16=0$

$D=81-64=17$

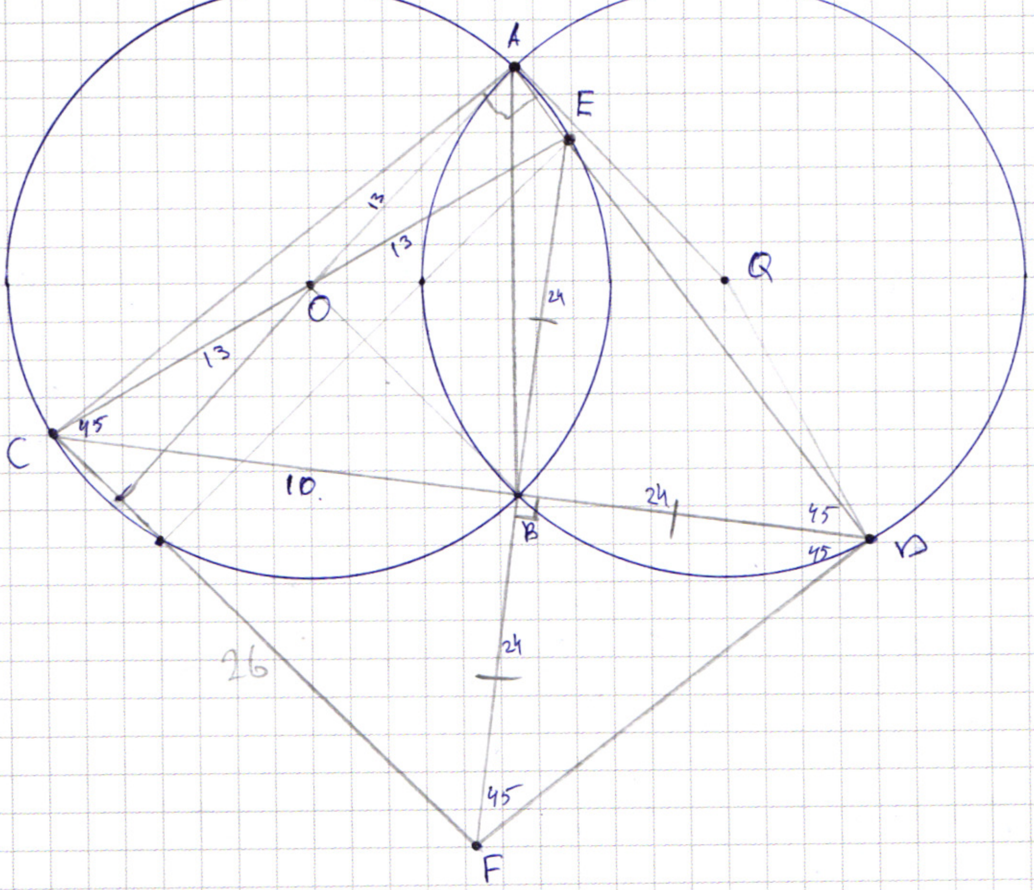
$x_1=\frac{-9+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_1=\frac{-9+\sqrt{17}}{2}+\frac{8}{2}=\frac{\sqrt{17}-1}{2}>0$ подходит

$x_2=\frac{-9-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y_2=\frac{-9-\sqrt{17}}{2}+\frac{8}{2}=-\left(\frac{\sqrt{17}+1}{2}\right)<0$ не подходит,

т.к $y>0$. Таким образом, 3 решения

Ответ: $(-4;2)$; $(-2;2)$; $\left(\frac{\sqrt{17}-9}{2};\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)$

Задача №6.



а) Пусть O и Q - центры окружностей. Для определённости будем считать, что $CB > BD$. Тогда будет такой чертёж, как изображён. Если $CB < BD$, то можно провести те же рассуждения, только с другой окружностью.

1) Соединим AB. Пусть $\angle CBA = \alpha$, тогда $\angle COA = 2\alpha$, $\angle ABD = \pi - \alpha \Rightarrow \angle AQD = 2\pi - 2\alpha$ (больший) $\Rightarrow \angle AQD = 2\alpha$ (меньший). Значит $\triangle COA = \triangle AQD$ по углу и двум сторонам, т.к. $CO = OA = AQ = QD \Rightarrow AC = AD \Rightarrow \triangle CAD$ равнобедренный, прямоугольный.

2) $\triangle FBD$ - равноб, прямоуг, $\Rightarrow \angle BFD = \angle BDF = \angle ACD = \angle CDA =$ $= 45^\circ$. Отразим точку F отн-но прямой CD симметрично

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

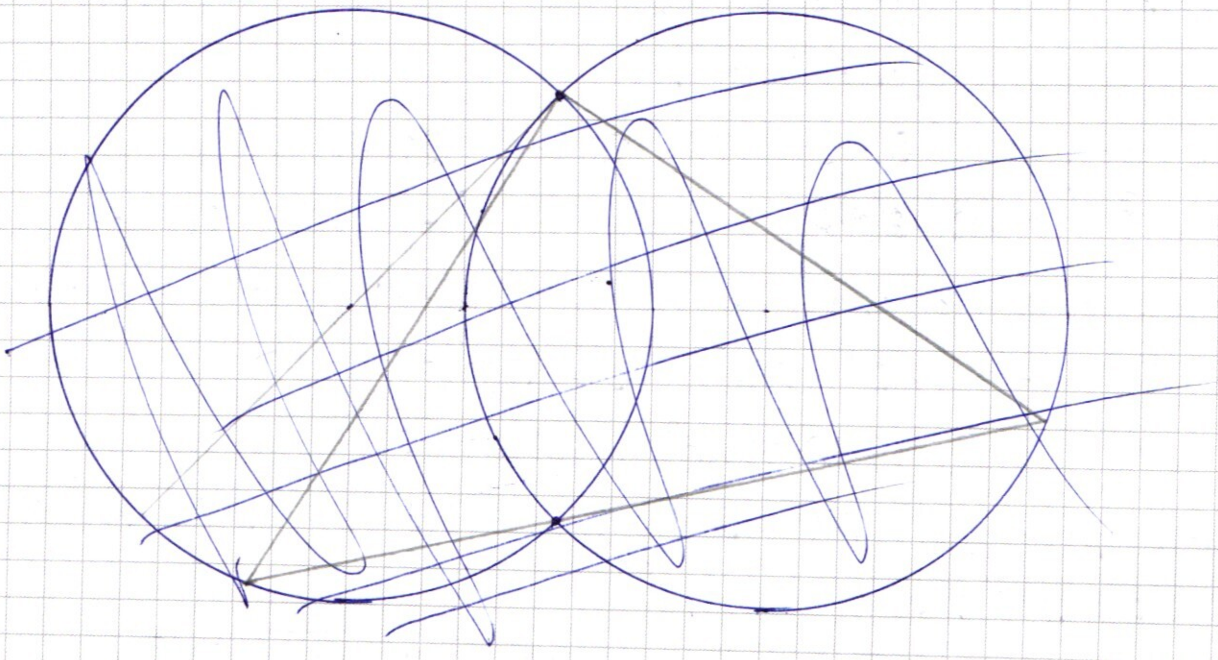
~~Тк~~ Пусть E – точка пересечения BF и AD. Тогда в $\triangle FBD$ и $\triangle EBD$: $\angle EDB = \angle BDF$, BD – общая, $\angle EBD = \angle FBD \Rightarrow \triangle FBD = \triangle EBD \Rightarrow EB = FB \Rightarrow E$ – симметричная F относительно CD.

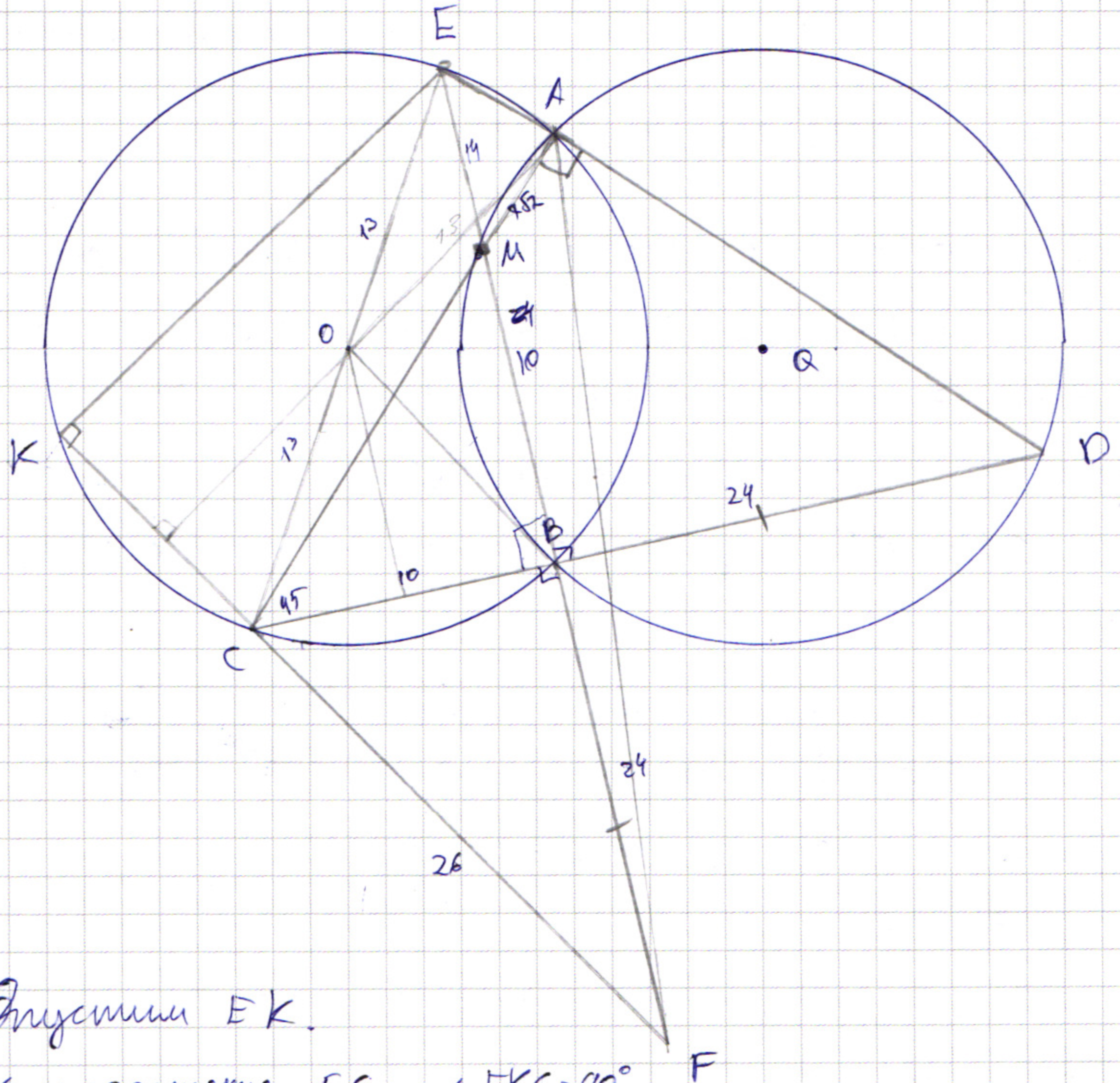
Значит $CF = CE$ (из-за аналогичного равенства $\triangle CEB$ и $\triangle CFB$)

3) Тк ~~...~~ $\angle CAD = 90°$, $\Rightarrow \angle CAE = 90° \Rightarrow$ тк C, A, E лежат на одной окр-ти $\angle CAE = 90° \Rightarrow$ CE – диаметр $CE = 2 \cdot 13 = 26 = CF$.

Ответ: $\underline{CF = 26}$

б) Если $BC = 10$, то: в $\triangle CEB$: $\angle CBE = 90° \Rightarrow$
$EB = \sqrt{CE^2 - CB^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 = BF$.





Опустим EK.

K – продолжение FC $\angle EKC = 90^\circ$

$CF \cdot KF = BF \cdot FE$; $26 \cdot (26 + x) = 24 \cdot 48$.

$13 \cdot 26 + 13x = 24^2$

$13x = 576 - 260 - 78 = 316 - 78 = 246 - 8 = 238 = 13x$

$KC = x = \frac{238}{13} =$ ~~...~~ Точка M п-я CA и EB лежит на окружности с центром Q. $MB = CB = 10 \Rightarrow EM = 14$

$\Rightarrow MA = 7\sqrt{2} \Rightarrow AB^2 + MA^2 = MB^2 + BD^2 = 26^2 \Rightarrow$

$AD^2 = 676 - 49 \cdot 2 = 578 = AC^2$; $AC = \sqrt{578}$

в $\triangle AMF$: $AF^2 = AM^2 + MF^2 - 2 \cdot AM \cdot MF \cdot \cos AMB = 98 + 36^2 + 2 \cdot 7\sqrt{2} \cdot 36 \cdot \cos 45$

$= 98 + 36^2 + 2 \cdot 7 \cdot 36$

в $\triangle ACF$ знаем $AC = \sqrt{578}$, $CF = 26$, $AF = \sqrt{1394 + 36 \cdot 14} \Rightarrow S_{ACF}$ по формуле Герона.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5.

$$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12; & \text{I} \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a; & \text{II} \end{cases}$$

Графически изобразим множество I:

$\begin{cases} x \geq y+6 \\ x \geq 6-y \end{cases} \Rightarrow x=12$

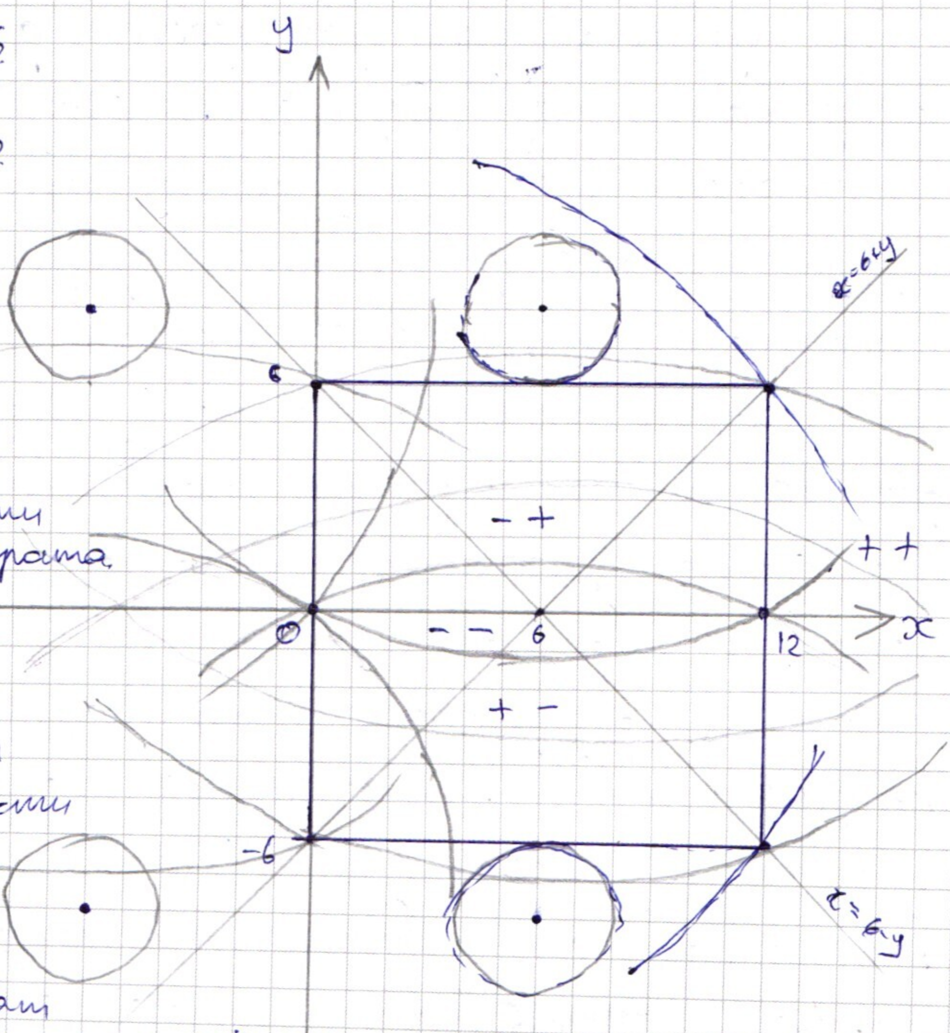
$\begin{cases} x \leq y+6 \\ x \geq 6-y \end{cases} \Rightarrow 6+y-x+x-6+y=12$
$y=6.$

$\begin{cases} x \geq y+6 \\ x \leq 6-y \end{cases} \Rightarrow y=-6$

$\begin{cases} x \leq y+6 \\ x \leq 6-y \end{cases} \Rightarrow x=0.$

II – 4 окружности радиуса $\sqrt{a}$ и центрами $(6;8)$; $(-6;8)$ $(-6;-8)$ и $(6;-8)$

I – квадрат



1) Два решения будут когда две правые окружности касаются квадрата.
т.е $\sqrt{a}=2$
$a=4$

2) Дальше при увеличении радиуса две правых окружности будут давать каждая по 2 решения ⇒ такие не подходят
При совпадении на прямой OX этих четырёх решений две ~~правые~~ левые окружности также

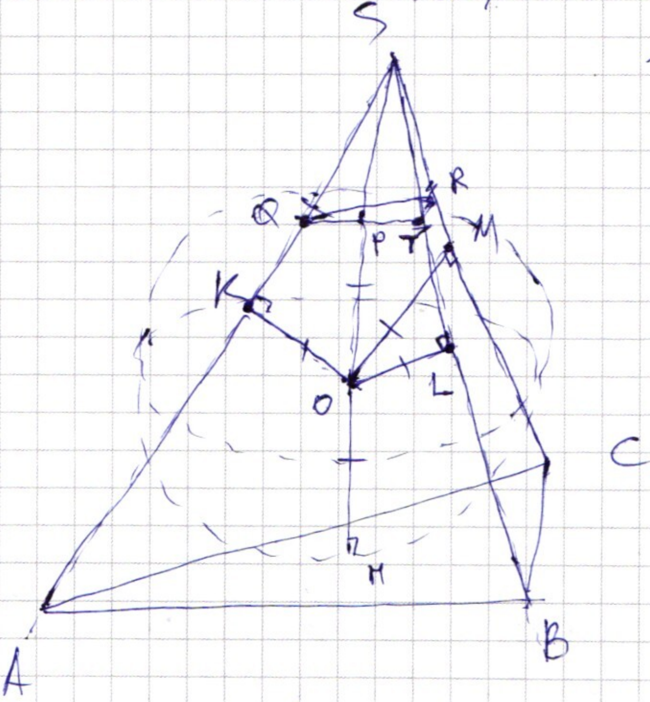
пересекутся в $(0;0)$, но ещё каждая пересечёт квадрат на прямых ~~...~~ $y=6$ и $y=-6$.
Те такие тоже не подходят
3) При дальнейшем увеличении радиуса две правые окружности будут также давать по 2 решения и так вплоть до момента когда окр-ть с центром $(6;8)$ пройдёт через $(0;-6)$ и $(12;-6)$, а окр-ть с центром $(6;-8)$ пройдёт через $(0;6)$ и $(12;6)$. Тут также будет 4 решения, те такой случай не подходит.
4) При дальнейшем увеличении две правых окружности не будут пересекаться с квадратом $\Rightarrow$ пересекаться с ним до определённого момента будут только две левые окружности.
5) Каждая из них пересекает квадрат в двух точках, причем в один момент ~~эти~~ ~~две~~ две точки могут совпасть, что даст 3 решения. Заметим, что окр-ти не могут пересечь квадрат только в двух точках, тк если окружности проходят через 2 общие точки то отрезок через эти две точки пересекает линию центров окружностей, а тут квадрат не пересекается с линией центров. Значит при дальнейшем увеличении окружности будут давать больше 2-х решений до момента, пока окр-ть с центром $(-6;-8)$ не пересечёт дальнюю к ней вершину квадрата $(12;6)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

А окружность с центром $(-6;8)$ пересечёт вершину $(12;-6)$. Тогда будет также 2 решения, т.е ~~$a = (8+12)^2+4$~~ $a=(6+12)^2+(2+12)^2 = 18^2+14^2 =$
$= 324+196 = 520$. При дальнейшем увеличении окружностей корней не будет

Ответ: $a=4$; $a=520$.

N4



1) Пусть H - нижняя точка касания.

$SK=SL=SM$ как касательные к сфере из одной точки.

P - точка касания сферы с QRT.

По условию $S_{QRT}=4$

$S_{ABC}=9$

Тк $(ABC)\perp SO$, $(QRT)\perp SO$, то если P - проекция O на ~~SO~~ (QRT), то P лежит на SO, аналогично с точкой H. Те точки S, P, O, H лежат на одной прямой.

2) $QT \parallel AB$, $TR\parallel BC$, $QR\parallel AC$ (тк они все $\perp$-ны SO)
$\Rightarrow$ ~~S_{ABC}~~ $\triangle ASB \sim \triangle QST$. $\frac{S_{ABC}}{S_{QTR}} = \frac{9}{4} = \frac{SA\cdot SB}{SQ\cdot ST} = k^2$, где k - коэф подобия $\triangle ABC$ и $\triangle QRT$

$\triangle SQT \sim \triangle ASB$

$k = \frac{3}{2}$ Значит $\frac{AQ}{SQ} = \frac{PH}{SP} = \frac{1}{2}$

$PH = 2r \Rightarrow SP = 4r$ Значит $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{KO}{SO}\right)$

r-радиус сферы

$KO = r;\ SO = SP + PO = 4r + r = 5r.$ $\boxed{\angle KSO = \arcsin\frac{1}{5}}$

$\Rightarrow \cos(KSO) = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \underline{SK = SO \cdot \cos(KSO) = 2\sqrt{6}\,r = SL = SM}$

Задача №7.

$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x. \end{cases}$ $\Rightarrow$ как минимум $3^{81} \cdot x - x + 3^4 + 4 > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$

$3^4 - 3^x > 3^{81}(4-x) - (4-x)$

$3^4 - 3^x > \underbrace{(3^{81}-1)}_{>0}(4-x).$ левая часть $< 3^4$

Значит $(3^{81}-1)(4-x) < 3^4$

Если $4-x \leq 0$, то верно, т.е $x \geq 4$ пока подходят

Если $4-x > 0$, т.е $x < 4$, то левая часть много больше 3^4. Рассмотрим, что при $x \geq 4$, если x очень большое, то левая часть станет меньше правой, что быть не должно.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{(x+4)^2}\right)^{\lg(x+4)} = (-x)^{\lg(-x(x+4))}$$

$$\lg(x+4)\cdot(4\lg(-x) - 2\lg(x+4)) = (\lg(-x) + \lg(x+4))\cdot \lg(-x)$$

$$\cancel{4}3\lg(-x)\lg(x+4) - 2\lg^2(x+4) = \lg(-x)\lg(-x) + \cancel{\lg(x+4)\lg(-x)}$$

$$3\lg(-x)\lg(x+4) - 2\lg^2(x+4) = \lg^2(-x)$$

$$\lg^2(-x) - 3\lg(x+4)\lg(-x) + 2\lg^2(x+4) = 0$$

$\cancel{\lg}$ $$(\lg(-x) - 2\lg(x+4))(\lg(-x) - \lg(x+4)) = 0$$

$$\lg(-x) = \lg(x+4)$$

$$-x = x+4$$

$$x = -2 \qquad y = 2$$

$$\lg(-x) = \lg(x+4)^2$$

$$\cancel{-x = x^2 + 8x + 16}$$

$$x^2 + 9x + 16 = 0$$

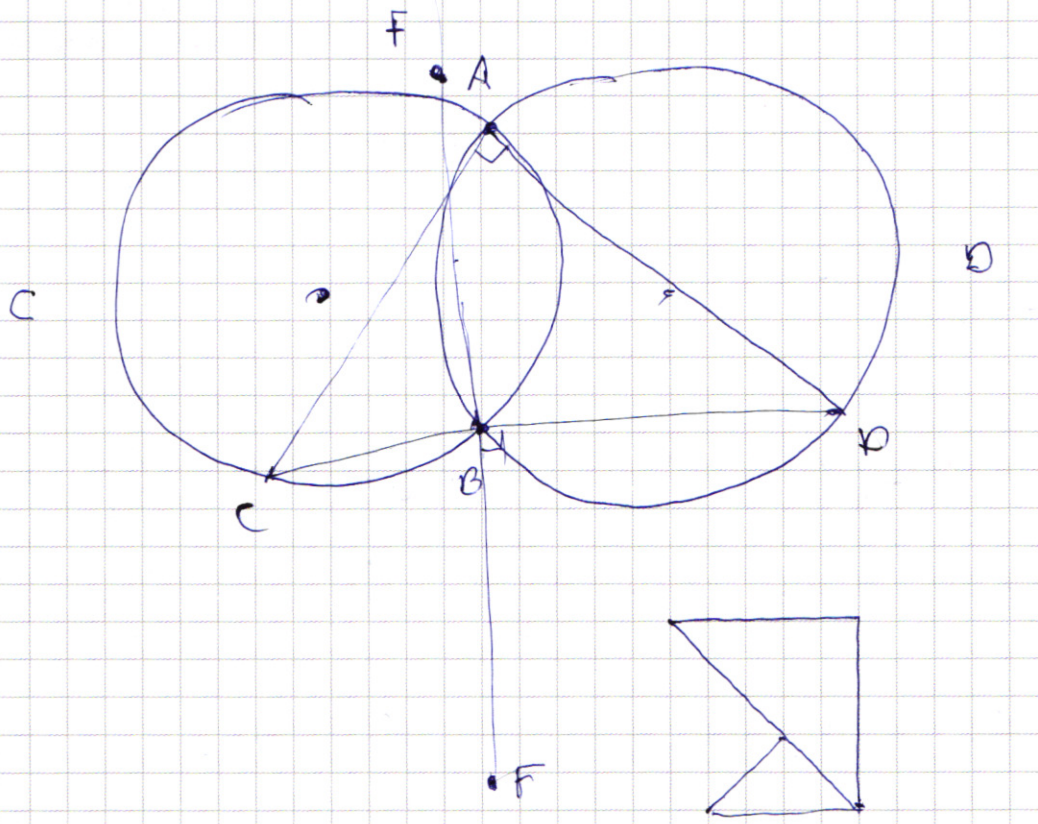
$$D = 81 - 64 = 17$$

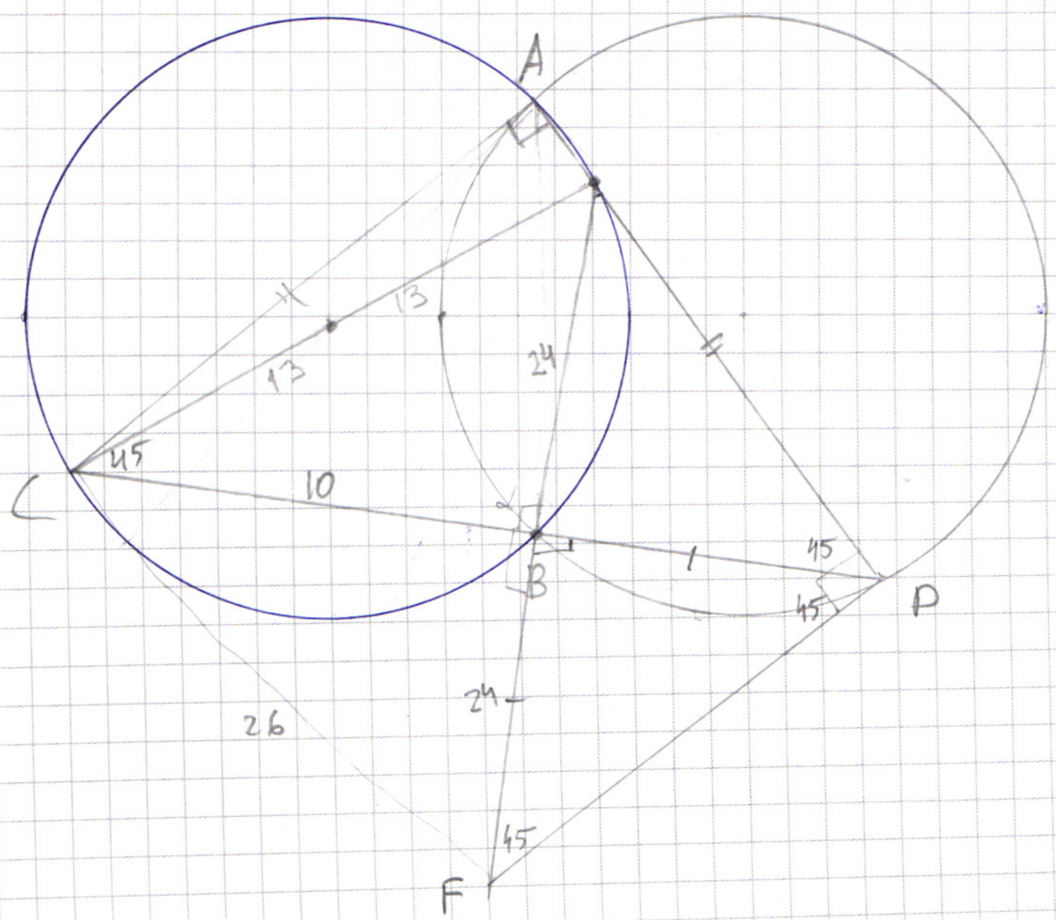
$y > 0$

$y = x + 4$

$$x = \frac{-9+\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-9-\sqrt{17}}{2}$$


F
A
C
D
C
B
D
F


A
13
13
24
45
10
C
1
45
45
B
D
24
26
45
F

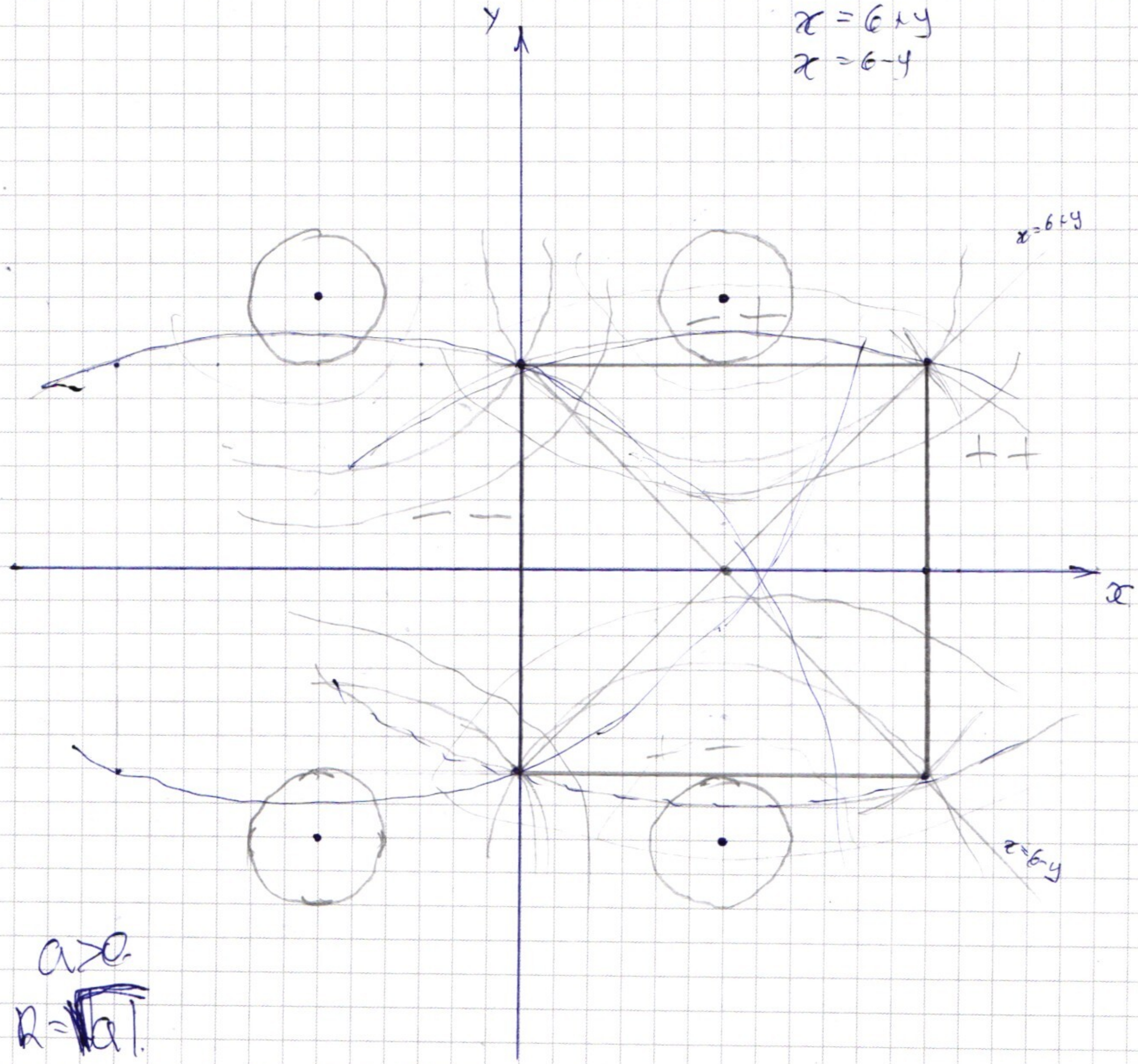
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 6+y$

$x = 6-y$



$a \geq 0$

$R = \sqrt{|a|}$

$x - 6 - y - x + 6 - y = 12$

$-x + 6 + y - x + 6 - y = 12$

$-x = 0$

$x = 0$

$|-12-y| + |-12+y| = 12$

$|y+12| + |y-12| = 12$

$1296 + 98 = 1394$

$|1-y| + |1+y| = 12$

$0{,}5 \quad 7$

$|7-y| + |7+y| = 12$

$|7+y| + |y-$

$|y+7| + |y-7| = 12$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$x < 0$

$y > 0$

$2y^2 - xy - x^2 = 0$

$D = x^2 + 8x^2 = (3x)^2$

$y = \frac{x+3x}{4} = x$

$y = -\frac{x}{2}$

$2(y-x)\left(y+\frac{x}{2}\right) = 0$

$(y-x)(2y+x) = 0$

$(y-x)(2y+x) - 4(x+2y) = 0$

$(2y+x)(y-x-4) = 0$

$x = -2y$ $\qquad$ $x = y-4$

$(y = x+4)$

$-x(x+4)$

$$\left(\frac{16y^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (2y)^{\lg(2y^2)}$$

$(16y^2)^{\lg y} = (2y)^{\lg 2 + 2\lg y}$

$\cancel{16^{\lg y} \cdot (y^2)^{\lg y} = 2^{\lg 2 + 2\lg y}}$

$\cancel{\lg y \cdot \log_2 16y^2 = (\lg 2 + 2\lg y) \cdot \log_2 2y}$

$\cancel{\lg y (4 + 2\log_2 y) =}$

$=$

$(\lg 16 + 2\lg y)\lg y =$

$= (\lg 2 + 2\lg y)(\lg 2 + \lg y)$

$4\lg 2 \cdot \lg y + \cancel{2\lg^2 y} =$

$= \lg^2 2 + 2\lg y \lg 2 +$

$+ \lg y \cdot \lg 2 + \cancel{2\lg^2 y}$

$\cancel{\lg 2 \cdot \lg y} =$

$= \lg^2 2$

$y = 2$

$x = -4$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16875 : 5 = 3375$

$3375 : 5 = 675$

$675 : 5 = 135$

$135 : 5 = 27$

5 5 5 5 3 3 3

$625 \times 27 = 16875$

$5^4 \cdot 3^3 \cdot 1$

$8 \cdot C_3^7$

$\cos 7x + \cos 3x = \cos 5x \cos 2x - \sin 5x \sin 2x + \cos 5x \cos 2x + \sin 5x \sin 2x$ ($5x+2x$, $5x-2x$)

$= 2\cos 5x \cos 2x.$

$\sin 7x + \sin 3x = \sin 5x \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sin 5x \cos 2x - \sin 2x \cos 5x$

$= 2\sin 5x \cos 2x.$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 10x = 2\sin 5x\cos 2x$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2\sin 5x\cos 2x$

$2\cos 5x\cos 2x - \sqrt{2}\cos^2 5x = 2\sin 5x\cos 2x - \sqrt{2}\sin^2 5x$

$\cancel{\sqrt{2}\cos 5x(\sqrt{2}\cos 2x - \cos 5x) = \sqrt{2}\sin 5}$

$2\,\cancel{\cos 7x = \sqrt{2}\cos 10x}$

$\sqrt{2}\cos 7x = \cos 10x$

$\sqrt{2}\cos 2x(\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2}(\cos 5x + \sin 5x)(\cos 5x - \sin 5x)$

$\cos 5x = \sin 5x$ или $\sqrt{2}\cos 2x = \cos 5x + \sin 5x =$

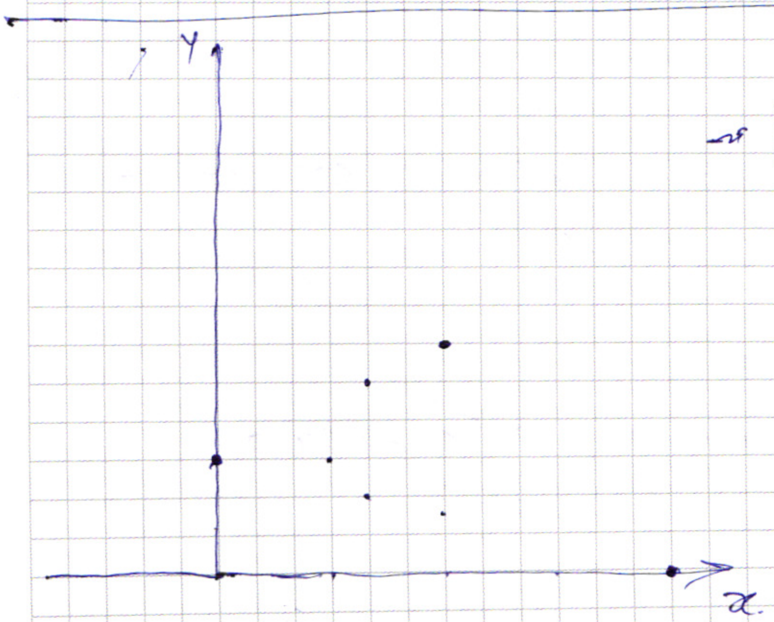
$= \sqrt{2}\sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos 2x = \sin\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right)$

$2x = \frac{\pi}{4} - 5x + 2\pi k$

$2x = 5x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$



v

$|4-6-2| + |4-6+2| =$

и $|4-6-5| + |4-6+5|$

$x > 6+y$

$7+3$

$x > 6-y$

симметрично отн-но

Oy

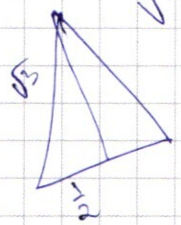
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4\cdot 3^{81} \\ y < 85 + x\cdot 3^{81} - x \end{cases}$$

$$\sqrt{3-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

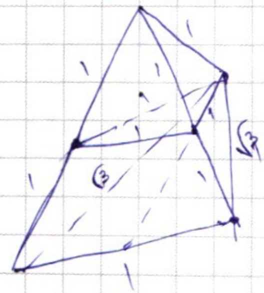


$$x\cdot 3^{81} - x + 85 \geq 3^x + 4\cdot 3^{81}$$

$$3^4 + 4$$

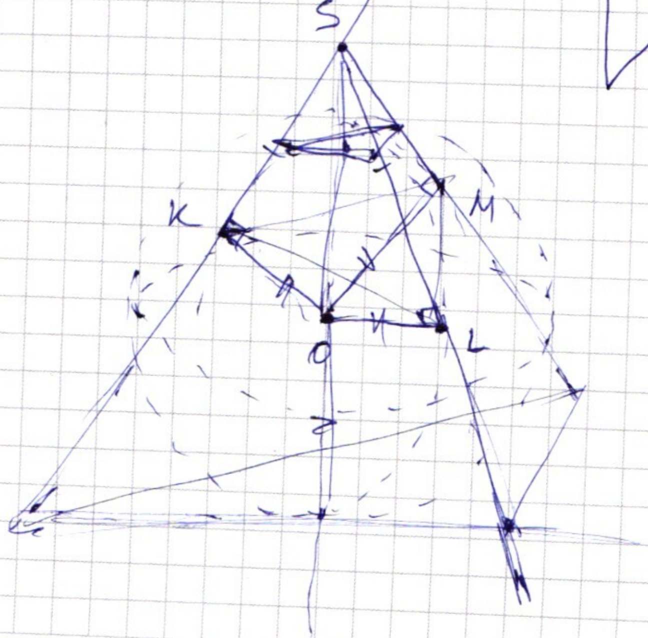
$$-x + 3^4 + 4 \geq 3^x + 3^{81}(4-x)$$

$$3^4 - 3^x \geq (\underbrace{3^{81}-1}_{>0})(4-x)$$



$x=4$ $\quad 0 \geq 0$ верно

$x<4$: $\quad 3^4 - 3^x > 0 \quad 4-x>0$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$24 \cdot 48 = 26 \cdot \cancel{(26} \; (26 - x)$

$12 \cdot 48 = 13 \cdot 26 - 13x$

$-12 \cdot 48 + 13 \cdot 26 = 13$

$24 \cdot 48 = 26$

$\cancel{338+2}$

$24^2 = (20+4)(20+4)$

$400 + 160 + 16$

$13 \cdot 26 =$

$= 26 \cdot 10 + 78 =$

$= 260 + 78$

$576 - 260 =$

$= 3$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)