

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 01.

$16875 = 5^4 \cdot 3^3$; — произв. 8-и цифр (т.е. чисел от 1 до 9, имея среди них бога не можно, иначе произв. всех цифр было бы числом).

Существует единств. цифра: 5 $\rightarrow$ это 5. Т.к. произв. 8-и цифр полностью делится на 5^4 , то в данной 8-и знач. числе ровно 4 цифры равны 5.

Произведение оставшихся 4-х цифр равно 3^3 . Следовательно, набором оставшихся цифр можем быть

1. $\{3, 3, 3, 1\}$; Так как в противном случае (третьего набора) наша бы цифра ≥ 9 .
2. $\{3, 9, 1, 1\}$.

Количество 8-и знач. чисел с набором цифр $\{5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1\}$ равно $\frac{8!}{4! \cdot 3!}$ (то есть все разн. перестановки цифр, при этом количество одинаков. эл-тов 5-к $\rightarrow 4$, 3-к $\rightarrow 3$. Представим две 5-ки местами 8-и значное число остается прежним, следовательно, $8!$ делится на все перестановки 5-к $\rightarrow 4!$ и на все перест. 3-ек).

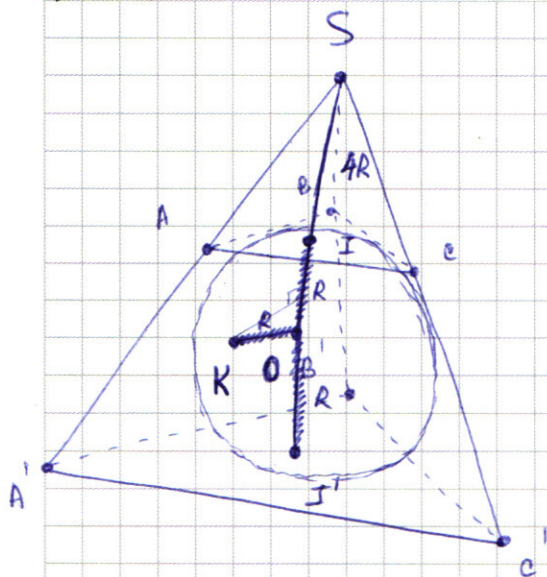
Количество 8-и знач. чисел с цифрами $\{5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1\}$ $\frac{8!}{4! \cdot 2!}$ ($4!$ — перестановки 5-к, $2!$ — перестановки 1-к).

Суммируя, получим общее кол-во чисел:

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8!}{4! \cdot 2} \cdot \frac{4}{3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4 = 1120.$$

Ответ: 1120.

№04



Пусть $(ABC) \perp SO$ — сечение трехгр. угла S , и площадь $[ABC] = 4$.

Соответственно $(A'B'C') \perp SO$ — второй из сечений угла S , где $[A'B'C'] = 9$.

1. Пусть $SO \cap (ABC) = I$, $SO \cap (A'B'C') = I'$.

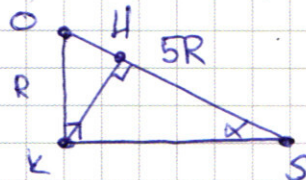
2. Т.к. $(ABC) \parallel (A'B'C')$ (т.к. обе $\perp SO$) и соотв. прямые $AB \parallel A'B'$ (и т.д.), точки $\{A, B, C, I\}$ переходят в точки $\{A', B', C', I'\}$ при гомотетии с центром в S и коэффициентом $\sqrt{[A'B'C']/[ABC]} = \sqrt{9/4} = 3/2$.

Получим, что

$$\frac{SI'}{SI} = \frac{3}{2}, \text{ а } II' = 2R = (R - \text{радиус впис. сферы}) = IB = BI'.$$

$$\frac{SI + 2R}{SI} = \frac{3}{2}; \Rightarrow SI = 4R.$$

3. $KO = R$, $K \in (A'C'S)$ как радиус сферы. При этом сфера касается $(A'C'S)$ в точке $K \Rightarrow \angle SKO = 90^\circ$.



В $\triangle KOS$ $KO = R$; $SO = SI + IO = 5R$, откуда

$$\angle KSO = \alpha = \arcsin\left(\frac{R}{5R}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{5}\right).$$

Ответ: $\arcsin(1/5)$.

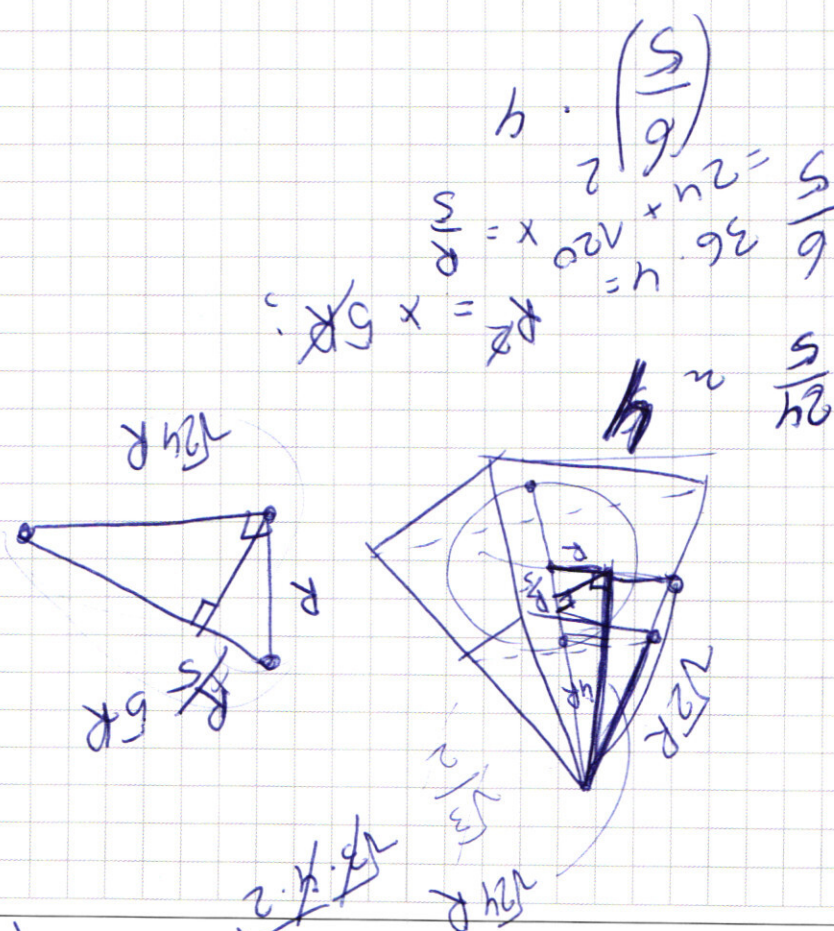
4. Ограничим перпендикуляр $KH \perp OS$. $OH \cdot OS = OK^2 \Rightarrow OH \cdot 5R = R^2$ и $OH = R/5 \Rightarrow SH = 4\frac{4}{5}R$.

Заметим, что $H \in (KLM)$, и сечение трехгр. угла плоскостью $(KLM) \parallel (ABC)$. Из соображений гомотетии получим, что

$$[\text{сечение}] = [ABC] \left(\frac{SH}{SI}\right)^2 = [ABC] \cdot \left(\frac{2\frac{4}{5}R}{4R}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot 4 = 144/25.$$

$$\sin 5x \cos 2x$$

$$\cos 5x \cos 2x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|t-y| + |t+y| = 12$$

$$(t+6) - 6$$

$$|y+6| + |y-6| = 12$$

$$(|y|-8)^2 = a$$

$$y = 4 \quad a = 4$$

$$2|y| = 12$$

$$|y| = 6 \quad -6$$

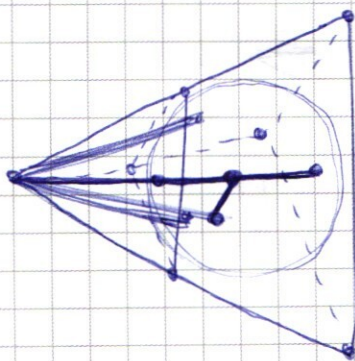
$$x = 0$$

+

0

0

6



$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos (2x) = \cos 10x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \cos 10x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$



черновик



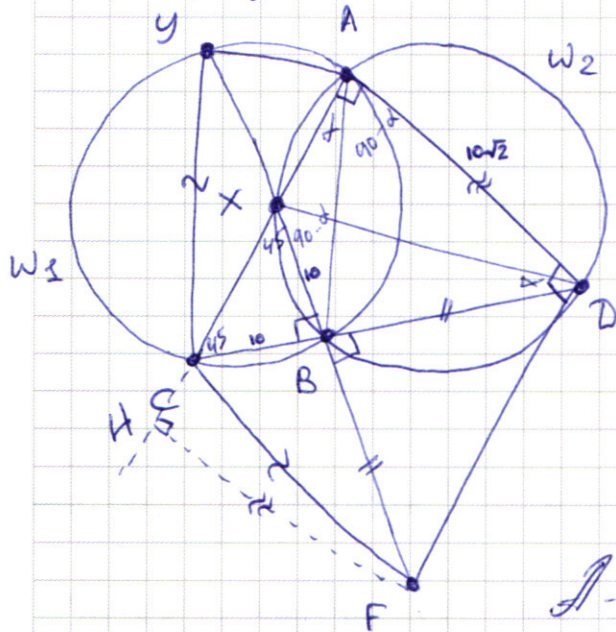
чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

№6. а), б).



1. Пусть перпендикуляр $BF \perp AC = X$. $\angle XBA = \angle XAD = 90^\circ \Rightarrow$
 $ADBX$ - впис. и $X \in W_2$.

2. Во впис. $ADBX$ $\angle XAB = \angle XDB =$
 $= \alpha$.

$$\angle BAD = \angle BXD = 90^\circ - \alpha.$$

3. На окружности W_1 по т. син.

$$\frac{BC}{\sin(\angle CAB)} = 2R = 2 \cdot 13 = \frac{BC}{\sin \alpha};$$

А-но на окружности W_2 :

$$\frac{BD}{\sin(\angle BAD)} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{BD}{\cos \alpha} = 2 \cdot 13.$$

4. В $\triangle CBF$ ($\angle B = 90^\circ$) по т. Пифагора:

$$CF = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{BD^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 \cdot 13^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = 26.$$

Ответ: 26.

5. $BX \cap W_1 = Y$, $\angle CBY = 90^\circ \Rightarrow CY$ - диаметр W_1 . $CY = CF = 26 \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC$ - сев. перп. к FY и $YB = BF = BD$.

6. $\angle YAC = 90^\circ$, т.к. CY диам. $\Rightarrow \angle YAD = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ($A \in DY$).
 $BY = BD \Rightarrow \angle YDB = 45^\circ = \angle BDF \Rightarrow DF \perp AD$.

Т.к. $BXAD$ - впис. $\angle YDB = \angle BXC = 45^\circ = \angle XCB$ ($\triangle CKB$ $\angle B = 90^\circ$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow CB = BX = 10$.

7. $ADBX$ - впис. $\Rightarrow \triangle CBX \sim \triangle CAD$ с коэфф. $\cos(\angle ACD) = \frac{2}{\sqrt{2}}$.
 Значит, $AD = BX \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$.

8. В $\triangle CAD$ $\angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow AD = AC = 10\sqrt{2}$.

9. $AC \perp AD$, $FD \perp AD \Rightarrow AC \parallel FD$ и высота FH $\triangle ACF$ - равна между
 AC и FD , равна AD . ($ADFK$ - кр-к, т.к. $\angle A = \angle D = \angle K = 90^\circ$).

$$FH = AD = 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Значит, } [ACF] = \frac{1}{2} FH \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot (10\sqrt{2})^2 = 100.$$

Ответ: 100, 26.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 03

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81}; \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x; \end{cases}$$

Заметим, что для $\forall x \in \mathbb{R}$ $y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} > 0$. С другой стороны для всякого $x \leq -1$

$y < 85 + (3^{81} - 1)x \leq 85 - 3^{81} + 1 < 0$. Поэтому $\forall x \in \mathbb{Z}$, являясь решением, $x \geq 0$.

$f(x) = 3^x + 4 \cdot 3^{81}$, $g(x) = 85 + (3^{81} - 1)x$. Нетрудно видеть, что $f(4) = g(4)$ — а производная $g'(x) = \text{const}$, производная $f'(x) > 0$ растет экспоненциально. Следовательно, для $\forall x \geq 4$ $f(x) \geq g(x)$ ($f(x) - g(x) = 3^x - (3^{81} - 1)x + \text{const} \geq 0$).

Т.к. $f(x) \leq y < g(x)$, то $f(x) < g(x)$ и $\forall x \in \mathbb{Z}$, что является решением, должно быть меньше 4-х.

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 1 + 4 \cdot 3^{81}; \\ y < 85 < 4 \cdot 3^{81} + 1 \Rightarrow \text{решений нет.} \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 3 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + 3^{81} - 1 < 4 \cdot 3^{81} + 3 \Rightarrow \text{решений нет.} \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 3^2 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + 2 \cdot 3^{81} - 2 < 4 \cdot 3^{81} + 9 \Rightarrow \text{решений нет.} \end{cases}$$

$$x = 3 \Rightarrow \begin{cases} y \geq 27 + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + 3 \cdot 3^{81} - 3 = 82 + 3 \cdot 3^{81} < 4 \cdot 3^{81} \text{ решений нет.} \end{cases}$$

Таким образом, система не имеет решений (x, y) , где $x, y \in \mathbb{Z}$.

Ответ: 0.

$a \in \mathbb{R}$ имеет ровно 2 решения.

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12; \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a; \end{cases} \leftarrow \text{одни корни однозначно заданы (наверное).}$$

$$x-6 > y \quad \begin{cases} x-y-6 < 0; \\ x-6+y < 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+6-x+6-x-y = 12. \\ \Rightarrow x=0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x < 6+y & \quad x-6 \leq y \leq x+6 \\ x < 6-y & \end{aligned} \Rightarrow y \in [-6; 6].$$

Если

$$x-y-6 < 0; \quad (|y|-8)^2 = a-36. \quad 36 + y^2 - 8|y| + 64 = a;$$

$$x-6+y > 0; \quad y^2 - 8|y| + 100 - a = 0, \\ \text{чел. } \uparrow \text{ имеет 2 рещ.}$$

$$(*) \quad \begin{aligned} y &> 6-x \\ y &> x-6. \end{aligned} \quad \text{где } y > 0 \text{ ровно 1 рещ.} \Rightarrow \begin{aligned} a-36 &= 0 \\ a &= 36. \end{aligned}$$

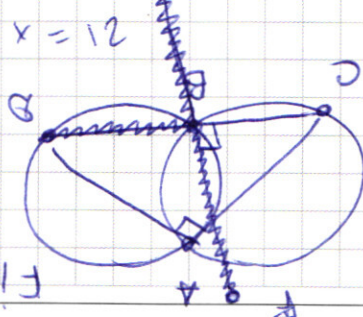
$$\Rightarrow x=6 \quad \begin{aligned} 6+y &= x+x-6+y \\ y &= 6. \end{aligned} \quad \text{Всегда четной график.} \\ \text{Если } \exists \text{ решение.} \\ (x, y) \Rightarrow \exists$$

$$\begin{aligned} \text{Если } x-y-6 > 0 & \quad y < 6-x \\ x-6+y < 0 & \quad y < x-6. \end{aligned}$$

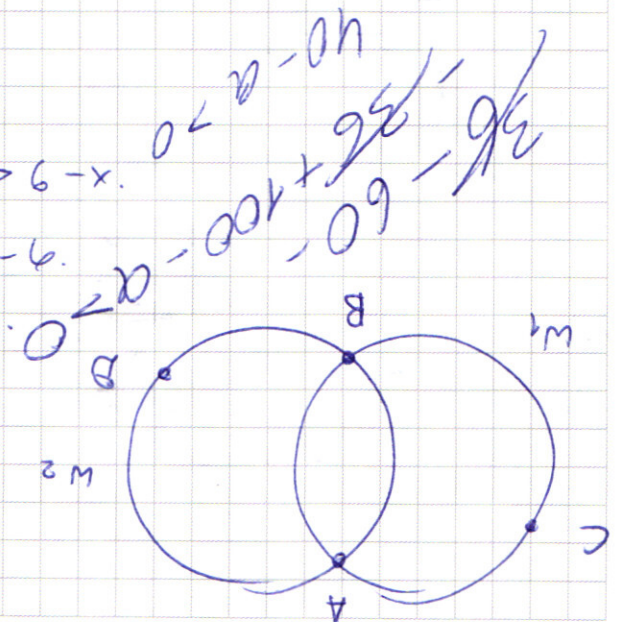
$$x-6+y+6-x-y \rightarrow y=0.$$

$$\begin{aligned} \text{Если } x-y-6 > 0 & \quad \Rightarrow x-6 > y > 6-x. \\ x-6+y > 0 & \end{aligned}$$

$$y = 2x - 12$$



Find: CF.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8 знат.

$$\begin{array}{r} 16875 \\ \underline{18} \\ 15 \\ \underline{37} \\ 35 \\ \underline{25} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3375 \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{25} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 675 \\ \underline{17} \\ 135 \\ \underline{35} \\ 27 \end{array}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot [3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1]$$

↑ берем по одной цифре.

счит. варианты
и - x цифр.

$$\{3, 3, 3, 1\}$$

$$\{3, 9, 1, 1\} \text{ т.к.}$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 3!} + \frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{8!}{4!} \left(\frac{1}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{8!}{4! \cdot 2} \left(\frac{4}{3} \right) =$$

$$= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$20 \cdot 8 \cdot 7 =$$

$$= 140 \cdot 8 = 800 + 320 = 1120$$

$$a + b - \sqrt{2}(ab + cd) - c - d = 0.$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x.$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2}(\cos 7x \cos 3x - \sin 7x \sin 3x) - \sin 7x - \sin 3x = 0$$

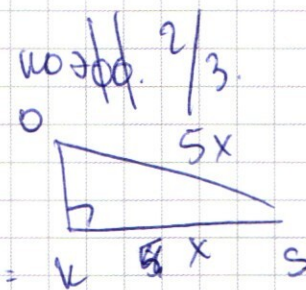
$$(-2\cos 7x) \left(\cos 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Find: $\angle KSO$ Помогите с коэф. $2/3$.

$$6R + 2R = 3x$$

$$2R = x$$

$$SK =$$



$$3R \left(\frac{1}{3} \right)$$

$$2R = 5R$$

$$2x + 2R = 3x$$

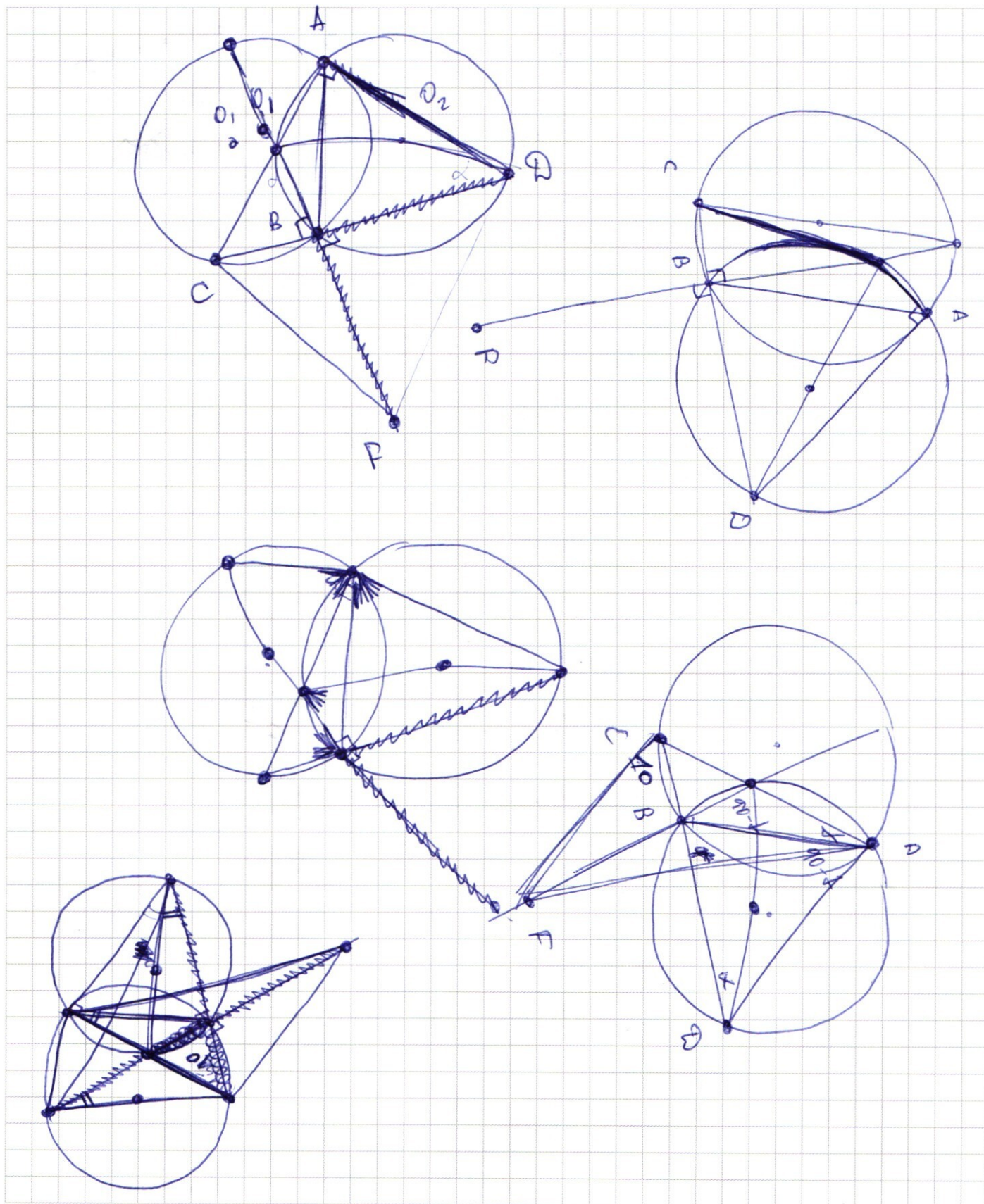
$$2R = x$$

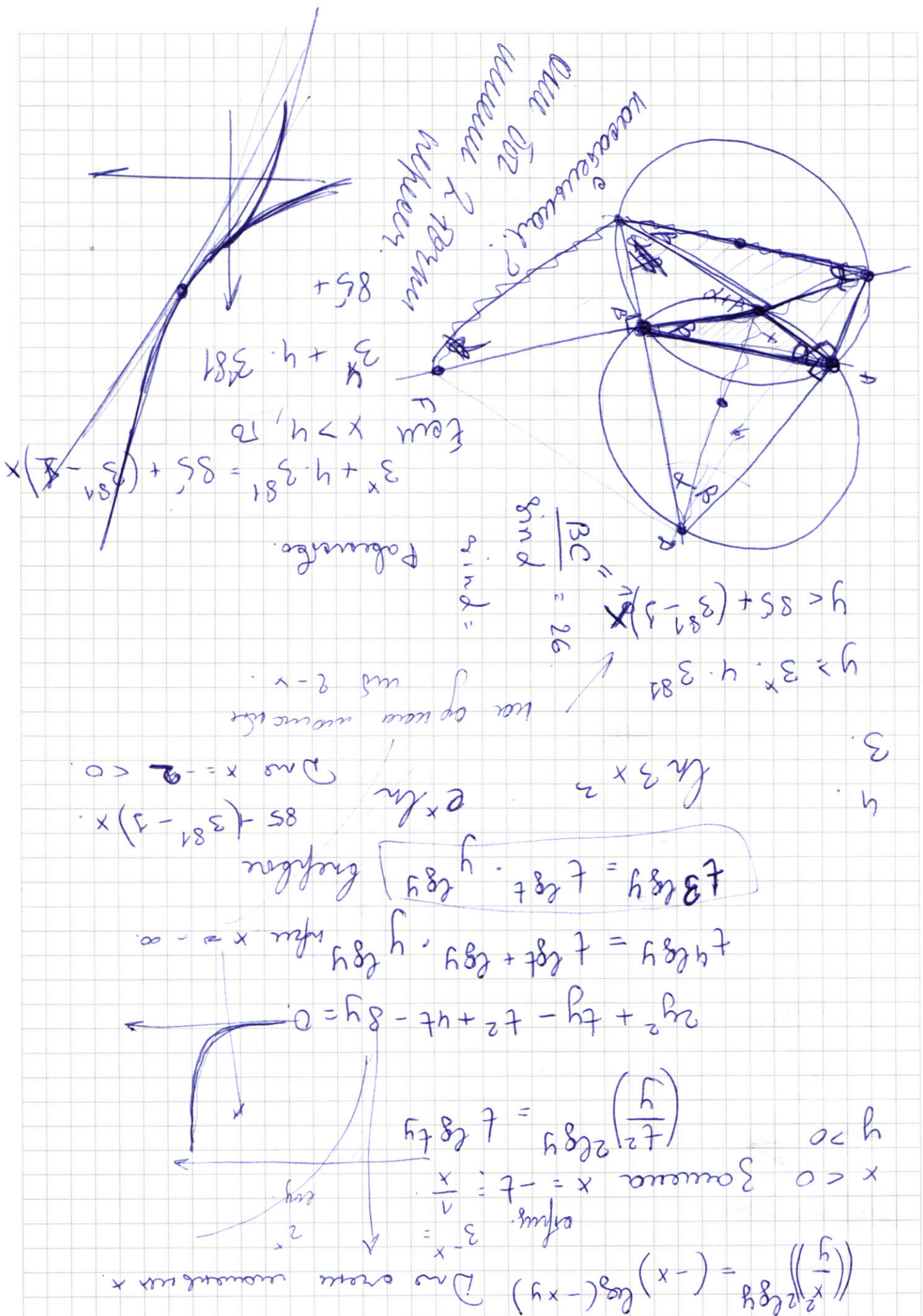
$$SO = 5R$$

$$KO = R$$

$$\sqrt{24}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 05

$\begin{cases} |x-6-y|+|x-6+y|=12, \\ (|x|-6)^2+(|y|-8)^2=a, \end{cases}$ Заметим, что если система имеет решение (x_0, y_0) , то она имеет решение и $(x_0, -y_0)$.

1. Если $\begin{cases} x-6-y < 0; \\ x-6+y < 0; \end{cases} \begin{cases} x-6 < y < 6-x \end{cases} (*)$, то $x-x+y+6-x-y=12$
 $\Rightarrow x=0$. и $-6 < y < 6$.

Получим $(|y|-8)^2=a-36$ имеет равносоставленные, когда $f(|y|)=|y|^2-16|y|+100-a=0$ имеет ровно один >0 корень ($\Leftrightarrow 100-a < 0$ и $100 < a$). При этом, чтобы данной корень $|y_0| \in [0; 6]$ где $y=0$ $f(|0|)=100-a < 0$
 $y=6$ $f(|6|)=36-16 \cdot 6+100-a > 0 \Leftrightarrow 40-a > 0$.
это быть не может.

2. Если $\begin{cases} x-6-y < 0 \\ x-6+y > 0 \end{cases} \begin{cases} y > x-6; \\ y > 6-x; \end{cases} \Rightarrow -x+6+y+x-6+y=12;$
 $y=6$.
Значит, $(|x|-6)^2+4=a \leftarrow$ имеет единств. решение (иначе 3 р-ия системы $(x_1, 6), (x_2, 6), (x_1, -6), (x_2, -6)$).
 $\Rightarrow x=0$, но тогда $6=y > 6-x=6$. Противоречие.

3. Если $\begin{cases} x-6-y > 0 \\ x-6+y < 0 \end{cases} \begin{cases} 6+y < x < 6-y \end{cases} \Rightarrow x-6-y+6-x-y=12$.
 $y=-6$.

Значит, $(|x|-6)^2+4=a \leftarrow$ опять таки должно иметь

Ответ: $a=100, 4$.

№02

$$\cos 7x - \sin 7x + \cos 3x - \sin 3x - \sqrt{2} \cos 10x = 0; \quad (*)$$

$$\sqrt{2}(\cos 45^\circ \cos 7x - \sin 7x \sin 45^\circ) + (\cos 3x - \sin 3x) \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2} \cos 10x = 0;$$

$$\sqrt{2} \left(\cos \left(7x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(3\pi + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

↓ по ф. суммы косинусов

$$2 \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cos 2x = \cos 10x;$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x;$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$\cos 2x \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) = \sqrt{2} \cos 10x;$$

$$\cos 2x \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot 2 = \cos 10x;$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \frac{t^4 e_{8y}}{y^{2e_{8y}}} &= t e_{8(ty)} + 3e_{8y} = y^{2e_{8y}} \cdot t e_{8t} \\ |x - y - 6| + |x - 6 + y| &= 12. \\ \text{Even } \exists \text{ keine } (x, y) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \text{ keine } (x, -y) \end{aligned}$$

$$y^2 + ty \quad t^2 - ut - ty + 8y - 2y^2 = 0, \quad \text{noisy } y > 0$$

$$(y+t)(y+u) \quad t^2 - t(y+u) + 2y(u-y) = 0, \quad \exists! x$$

$$y^2 + ty - ut - uy - (uy \quad \text{behave } 65d$$

$$y^2 + ty - ut - uy - (uy \quad \text{behave } 65d$$

$$xy^2 + y(t-8) + t(y-t) = 0.$$

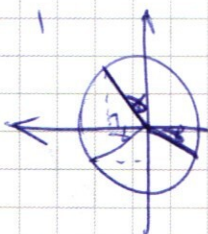
$$D = (t-8)^2 - 8t(4-t) = t^2 + 64 - 16t -$$

$$\cos\left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \frac{\cos(\gamma_T + \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}} \sqrt{2} = -\sqrt{2} \sin(\gamma_T)$$

$$8' \cos 7x - \sin 7x =$$

$$\sqrt{2 \cos 10^\circ}$$



of

$$(y-8)^2 + (1x-6)^2 = a^2$$

