

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K , L , M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$16875 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

5 и 3 нельзя представить в виде произведения двух других цифр, то число должно содержать четыре пятёрки и три тройки, либо четыре пятёрки, одну девятку и 1 тройку. На месте остальных цифр должна быть 1, т.к. только она не изменит произведения. Рассмотрим 2 случая.

1) Число состоит из 5, 5, 5, 5, 3, 3, 3, 1.

Тогда, восьмью способами можем выбрать место для 1, C_7^4 место для 5, а остальные будут тройки. Используем сочетания, т.к. нам не важно в каком порядке они будут стоять, то в этом случае способов: $C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 56$

2) Число состоит из 5, 5, 5, 5, 9, 3, 1, 1.

то $\frac{7}{2}$ мест для 1 (не важен порядок) C_6^4 - мест для пятёрки и умножить на 2 варианта (... 9 ... 3 ...) или (... 3 ... 9 ...), то число способов в этом случае $\frac{7!}{2!} \cdot \frac{6!}{4!2!} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 15 \cdot 56$

Значит всего способов: $5 \cdot 56 + 15 \cdot 56 = 56(5+15) = 56 \cdot 20 = 1120$

Ответ: 1120

№2

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

1) $\cos 5x - \sin 5x = 0$: $\tan 5x = 1$, т.к. $\cos 5x$ и $\sin 5x$ одновременно в 0 не обращаются в силу основного тригоном. тождества, то $\cos 5x = 0$ не является решением ур-ня

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$

и 3

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $y > 0$, $x < 0$ (сл. сущ. логарифма)
 $-xy > 0$, то $x < 0$ (сл. сущ. лог.)
 $x < 0, y > 0$

Рассмотрим первое уравнение.

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \quad \text{Прологарифмируем по основанию 10}$$

$$\lg\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2\lg y \lg \frac{x^2}{y} = \lg(-x) \lg(-xy)$$

$$2\lg y (\lg x^2 - \lg y) = (\lg(-x) + \lg(y)) \lg(-x)$$

$$2\lg y (2\lg|x| - \lg y) = \lg^2(-x) + \lg(y) \lg(-x) \quad \forall x < 0, \text{ то } |x| = -x$$

$$4\lg y \lg(-x) - 2\lg^2 y = \lg^2(-x) + \lg(y) \lg(-x)$$

$$\lg(-x) = a; \lg y = b$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 + 2b^2 - 3ab = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + b^2 - ab = 0$$

$$(a-b)^2 - b(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$1) a-b=0 \quad \text{или} \quad 2) a-2b=0$$

$$\lg(-x) - \lg(y) = 0$$

$$\lg\left(\frac{-x}{y}\right) = 0$$

$$\frac{-x}{y} = 1$$

$$y = -x$$

$$\lg(-x) - 2\lg(y) = 0$$

$$\lg\left(\frac{-x}{y^2}\right) = 0$$

$$\frac{-x}{y^2} = 1$$

$$x = -y^2$$

Все формулы применялись с учетом ОДЗ.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x = -y$. Подставим во второе ур-не

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y-2)=0$$

$$y_1 = 0$$

$$y=2, x=-2$$

те прикљуга
003

$(-2; 2)$

2) $x = -y^2$ Подставим во второе ур-ие

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 7y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$g(y^3 - y^2 - 6y + f) = 0$$

$$y = 0$$

✓ ке приказл. одз

$$\begin{array}{r} y^3 - y^2 - 6y + 8 \mid y - 2 \\ - (y^3 - 2y^2) \\ \hline y^2 - 6y \\ - (y^2 - 2y) \\ \hline -4y + 8 \\ - (-4y + 8) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$y = 2$ - корень $f - 4 - 12 + f = 0$ - верно

$$(y-2)(y^2+y-4)=0$$

$$y = 2,70$$

$$x = -4$$

$(-9, 2)$

$$y^2 + y - 4 = 0$$

$$2 = 1 + 16 = 17$$

$$y_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

1) $y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$, го lee нрyкaгн. 0x3

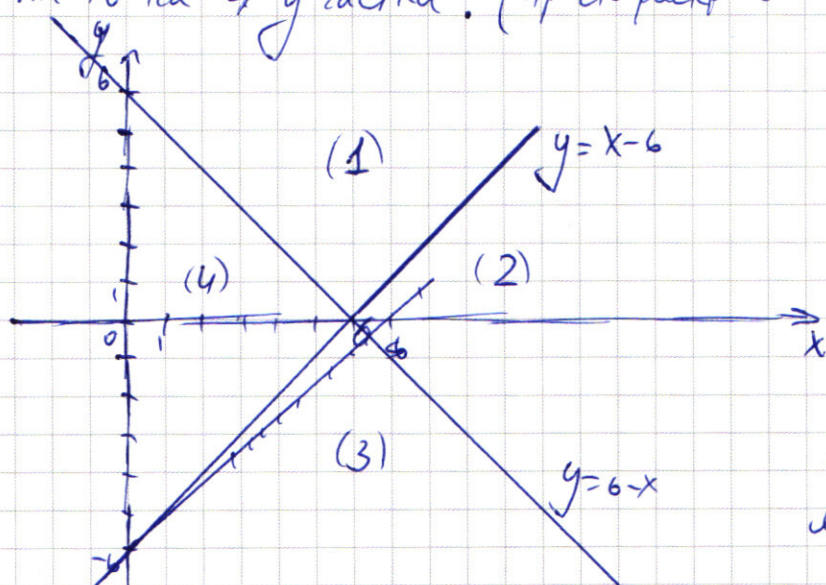
$$2) y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \text{ und } x = \frac{-1 + 17 + 2\sqrt{17}}{4} =$$
$$= \frac{9 + \sqrt{17}}{2}; \left(-\frac{9 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \right)$$

Ответ: $(-2; 2); (-4; 2); \left(\frac{\sqrt{17}-9}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

$$\begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 & (1) \\ ((|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (1) ур-ие $|x-6-y| + |x-6+y| = 12$

рассмотрим прямые $y = x-6$ и $y = 6-x$, они разбивают м-ть на 4 участка. (Просто раскрываем модули)



на участке (1)

$y \geq x-6$, то модуль 1 раскрывается со знаком "+"

$y \geq 6-x$, то модуль 2 раскрывается со знаком "+"

на участке (2) $y \leq x-6$, то модуль 1 с "+" $y \leq 6-x$, то модуль 2 с "+"

на участке (3) $y \leq x-6$, то модуль 1 со знаком "+"; $y \leq 6-x$, то модуль 2 с "-"

на участке (4) $y \geq x-6$, то модуль 1 со знаком "-"; $y \leq 6-x$, то модуль 2 со знаком "-"

Раскроем модули. на участке (2)

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$x = 12$ — прямая, параллельная оси OY , проходящая через $T(12; 0)$

на участке (3)

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$y = -6$ — прямая, параллельная оси OX , проходящая через $T(0; -6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Раскроем модули на участке (1)

$$-x+6+y+x-6+y=12$$

$y=6$ — прямая, параллельная оси Ox , проходящая через т. $(0;6)$

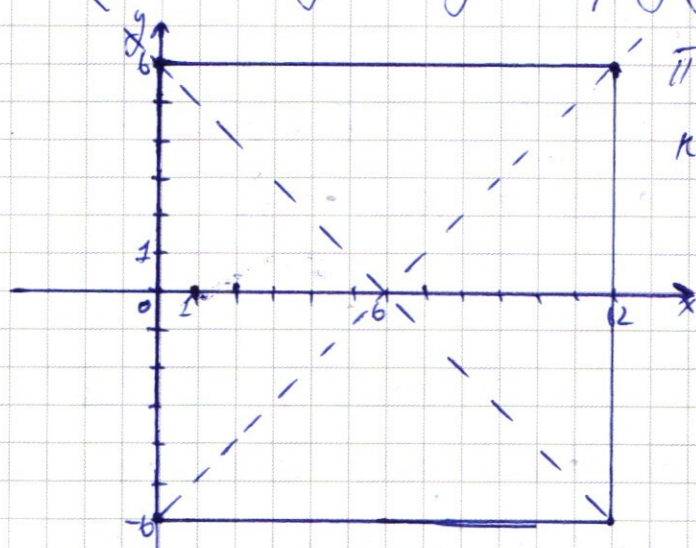
на участке (4)

$$-x+6+y-x+6-y=12$$

$$-2x=0$$

$x=0$ — ось Oy

Построим полуэллипсическую фигуру:



(каждую прямую считаем только на своем участке)
Получилась такая фигура. Это квадрат.

Теперь рассмотрим второе уравнение.

$$(|x|-6)^2 + (|y|-6)^2 = a$$

Раскроем модули. 1) $x \geq 0; y \geq 0$ $(x-6)^2 + (y-6)^2 = a$ — окружность с центром в т. $(6;6)$ и радиусом $\sqrt{a}$

2) $x \geq 0; y \leq 0$ $(x-6)^2 + (y+6)^2 = a$ — окр. с центром в т. $(6;-6)$, радиусом $\sqrt{a}$

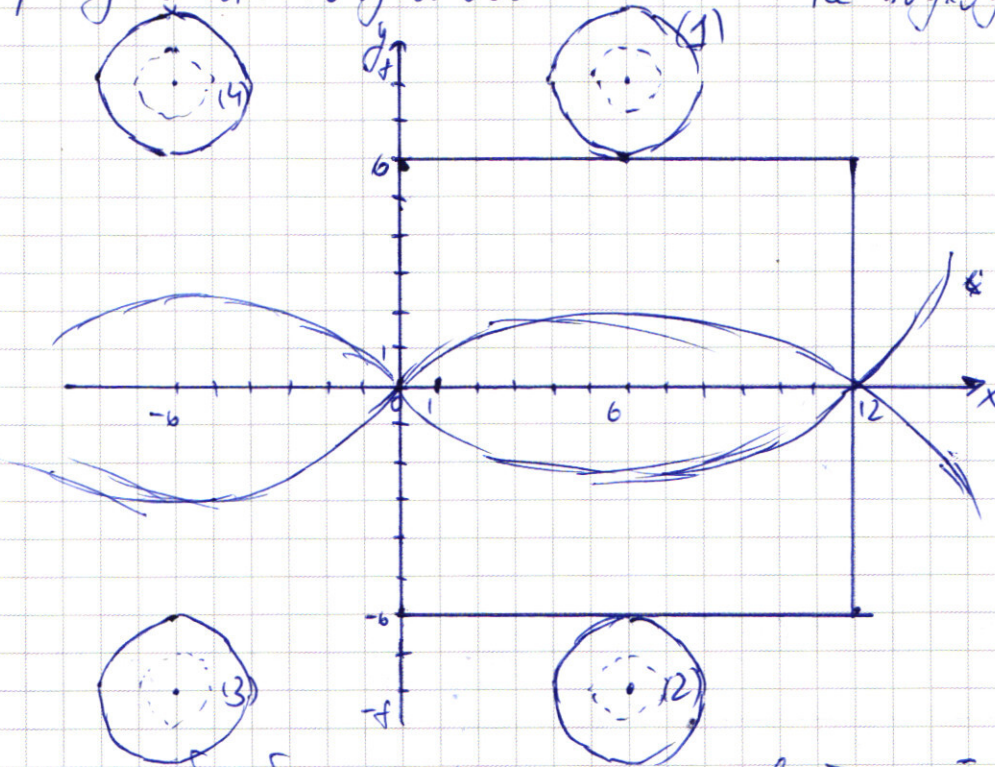
3) $x \leq 0; y \geq 0$ $(x+6)^2 + (y-6)^2 = a$ — окр. с центром в т. $(-6;6)$, радиусом $\sqrt{a}$

4) $x \leq 0; y \leq 0$ $(x+6)^2 + (y+6)^2 = a$ — окр. с центром в т. $(-6;-6)$ радиусом $\sqrt{a}$.

Это могут быть либо окружности, либо их части, т.к. каждая окруж~~ная~~ фигура должна находиться в определённой координатной четверти.

Нарисуем, что получилось

Случай, когда $a=0$ и точки касания не подходят



Нужно, чтобы было 2 решения, то первый случай — окружности (1) и (2) касаются, а (3) и (4) не достают, то радиус равен $8-6=2$; $5a^2=2$, то $\boxed{a=4}$

(2) случай — части окружности (1) и (2) проходят через точки $(0; 6)$ и $(12; 6)$, а (3) и (4) только через $(0; 0)$, тогда радиус равен расстоянию от $(6; 8)$ — центр фигуры (1) до т. $(0; 6)$ $\neq 5a^2 = \sqrt{36+64}$; $\boxed{a=100}$
 Больше вариантов нет, т.к. картинка симметрична в правой полуплоскости относительно ОУ относительно оси X, то части окружностей (1) и (2) должны либо не пересекать квадрат, либо касаться его, либо пересекать в двух совпадающих точках.
 и касание совпадающими рассмотрим, а если (1) и (2) не пересекают квадрат, то (3) и (4) — тоже.
 Ответ: 4; 100

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

16875	5.
3375	5.
675	5.
135	5.
27	3.
9	3.
3	3.
1	

$$\begin{array}{r} 76875 \mid 5 \\ \underline{15} \\ 75 \\ \underline{14} \\ 75 \\ \underline{37} \\ 35 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8325 \mid 5 \\ \underline{30} \\ 37 \\ \underline{35} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 625 \mid 5 \\ \underline{5} \\ 125 \\ \underline{10} \\ 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 135 \mid 5 \\ \underline{10} \\ 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \mid 5 \\ \underline{10} \\ 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 625 \\ 27 \\ \hline + 4375 \\ 1250 \\ \hline 16575 \end{array}$$

$4 \cos^2 x$

$$16875 = \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{5} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 1 \quad (\text{I})$$

555 5 9 3 11 (II)

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 4^2}{2} = 6$$

12' 13' 14

23, 24, 34

① $P.C^4$

$$(II) \quad C_8^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot C_6^4 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} \times 56 \\ 20 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$1) \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{4! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 5.58$$

$$2) 7 \cdot 8 \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 5 \cdot 56 \cdot 3$$

$$t = 5.56(1+s) = 20.56 = 1120$$

$$-2 < \quad < 2$$

$$u_L$$

$$-2\sqrt{2} < \dots < 2\sqrt{2}$$

$$-2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$-2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos x - \sin x) = -\cancel{2} \cancel{(\cos x - \sin x)}$$

$$2 \cos 2x = \cancel{2} \cancel{(\cos x - \sin x)}$$

$$2 \cos 2x = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x) = 0$$

$$1) \cos 5x = \sin 5x \quad | : \cos 5x$$

$$\tan 5x = 1$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2 x - 1 = \sin 10x - \cos^2 x$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos^2 1 + 2 \cos 5x \sin 5x)$$

$$2 \cos^2 2x = 1 + 2 \cos 10x$$

$$2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = 2 \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right)$$

$$2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{4x}{2} - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 5x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) (\cos 5x + \sin 5x) = 0$$

$$= (\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)) = 0$$

$$2 \cos 2x - \sqrt{2} \cos 5x - \sqrt{2} \sin 5x = 0$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$2 \cos^2 2x = 1 + \sin 10x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \sin^2 x - \sqrt{2} (\cos^4 x \cos x - \sin^4 x \sin x + \cos^4 x \sin x + \sin^4 x \cos x)$$

$$2) 2 \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$-1 \leq \cos 5x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin 5x \leq 1$$

$$-2 \leq \cos 5x + \sin 5x \leq 2 \quad | \cdot \sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{2} \leq \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \leq 2\sqrt{2} \quad | \cdot (-1)$$

$$-2\sqrt{2} \leq -\sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x) \leq 2\sqrt{2}$$

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$-2 \leq$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$y = 6 - x$$

$$\begin{aligned} x-6-y &\geq 0 \\ x-6+y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$1) (x-6) \geq 0, \text{ то } x \geq 6$$

$$|x-6-y| + |x-6+y| = 12$$

$$1) \begin{cases} x-6-y \geq 0 \\ x-6+y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x-6-y &\geq 0 \\ y &\leq x-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x-6+y &\geq 0 \\ y &\leq 6-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad x-6-y &\geq 0 \\ x-6+y &\geq 0 \end{aligned}$$

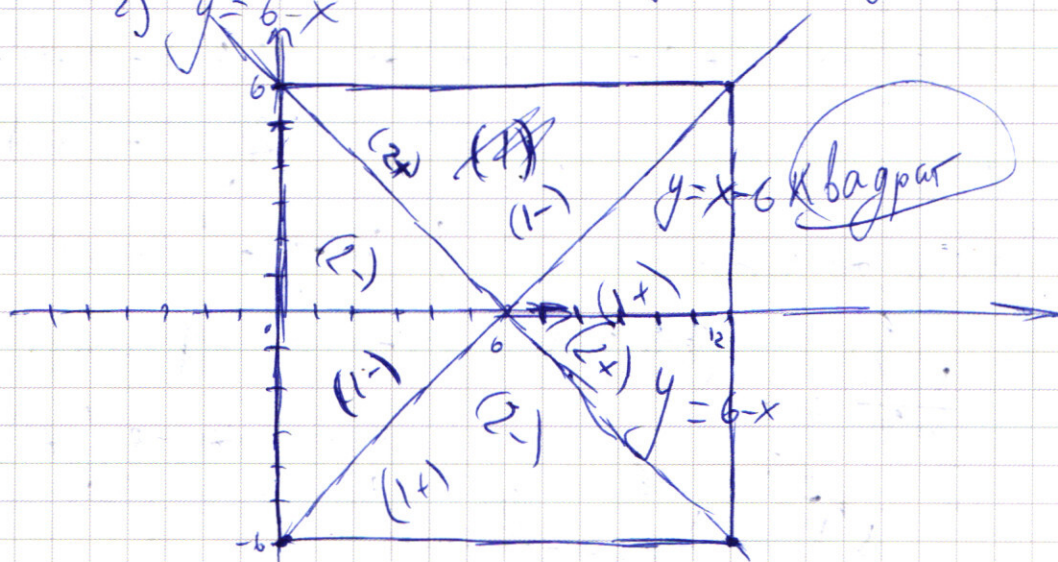
$$\begin{aligned} 2) \quad x-6-y &\geq 0 \\ x-6+y &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &\leq x-6 \\ y &\leq 6-x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad y &\leq x-6 \\ y &\leq 6-x \\ y &\leq 0 \end{aligned}$$

$$1) y = x-6$$

$$2) y = 6-x$$



$$\begin{aligned} (1) \quad y &\geq 6-x \\ y &\leq x-6 \end{aligned}$$

$$x-6-y + x-6+y = 12$$

$$2x = 24$$

$$x = 12$$

$$x = 0 \text{ не подходит}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y &\leq x-6 \\ y &\leq 6-x \end{aligned}$$

$$x-6-y - x+6-y = 12$$

$$-2y = 12$$

$$y = -6$$

$$\begin{aligned} 3) \quad y &> 6-x \\ y &\leq x-6 \end{aligned}$$

$$-x+6+y + x-6+y = 12$$

$$2y = 12$$

$$y = 6$$

$$\begin{aligned} 4) \quad y &> x-6 \\ y &\leq 6-x \end{aligned}$$

$$-x+6+y - x+6-y = 12$$

$$-2x = 0$$

$$x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$xy = 2y^2 - x^2 - 4x - 8y$$

$$xy = 2(y^2 - 4y + 4) - 4 - (x^2 + 4x + 4) + 4 = 2(y-2)^2 - (x+2)^2 - 4$$

$$y > 0$$

$$-xy > 0, \text{ то } x < 0$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg y + \lg(-x)}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\left(\frac{x}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\frac{x^{\lg y}}{y^{2\lg y}} = (-x)^{\lg y} \cdot (-x)^{\lg(-x)}$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$-xy = x^2 + 4x - 2y^2 + 8y$$

$$-xy = x(x+4) - 2y(y+4)$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$-xy = x^2 + 4x - 2y^2 + 8y$$

$$(x+2)^2 - 4 - 2(y^2 - 4y) =$$

$$-(x+2)^2 - 2(y-2)^2 + 4 + 4$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_b a = c$$

степень

степень

основание

$$\log_a a = a^{\log_a a} = a^1 = a$$

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$b^c = a^c \Leftrightarrow a=b$$

$$2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0$$

$$\begin{matrix} y > 0 \\ x < 0 \end{matrix}$$

$$3 \cdot 8 = 24$$

$$2y^2 - y(x+8) - (x^2+4x) = 0$$

$$D = x^2 + 16x + 64 + 8x^2 + 32x = 9x^2 + 48x + 64 = (3x+8)^2$$

$$y = \frac{1 \pm (3x+8)}{4}$$

$$x \geq \frac{3}{8}$$

можно считать модуль, т.к. учитываем оба знака

$$y_1 = \frac{1+3x+8}{4} \quad y_2 = \frac{1-3x-8}{4}$$

$$y_1 = \frac{9+3x}{4}$$

$$y_2 = \frac{-7-3x}{4}$$

$$\left(\frac{x^2}{\frac{9+3x}{4}}\right)^{2\lg \frac{9+3x}{4}} = (-x)^{\lg(-x \cdot \frac{9+3x}{4})}$$

$$\left(\frac{4x^2}{9+3x}\right)^{2\lg \frac{9+3x}{4}} = (-x)^{\lg \left(\frac{3x^2+9x}{4}\right)}$$

$$\left(\frac{x^2}{9+3x}\right)^{2\lg \frac{9+3x}{4}} = (-x)^{\lg \left(\frac{4x^2}{9+3x} \cdot \frac{9+3x}{4}\right)}$$

$$4ab - 2b^2 = ab + a^2$$

$$3ab = a^2 + 2b^2$$

$$3ab - b^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = ab - b^2$$

$$(a+b)^2 = b(a-b)$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

не 0

$$\lg\left(\frac{x^4}{y}\right)^{2\lg y} = \lg(-x)^{\lg(-xy)}$$

$$2\lg y \cdot \lg\left(\frac{x^4}{y}\right) = \lg(-xy) \cdot \lg(-x)$$

$$2\lg y (2\lg x - \lg y) = (\lg y + \lg x) \lg(-x)$$

$$4\lg x \lg y - 2\lg^2 y = \lg y \lg|x| + \lg^2|x|$$

$$3\lg y \lg|x| - 2\lg^2 y \lg|x| = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a$$

1) $x \geq 0$
 $y \geq 0$

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = a \quad \text{окр с } O(6; 8); R = \sqrt{a}$$

2) $x \geq 0$
 $y \leq 0$

$$(x-6)^2 + (-y-8)^2 = a$$

$$(x-6)^2 + (y+8)^2 = a \quad O(6; -8) \quad R = \sqrt{a}$$

3) $x < 0$
 $y > 0$

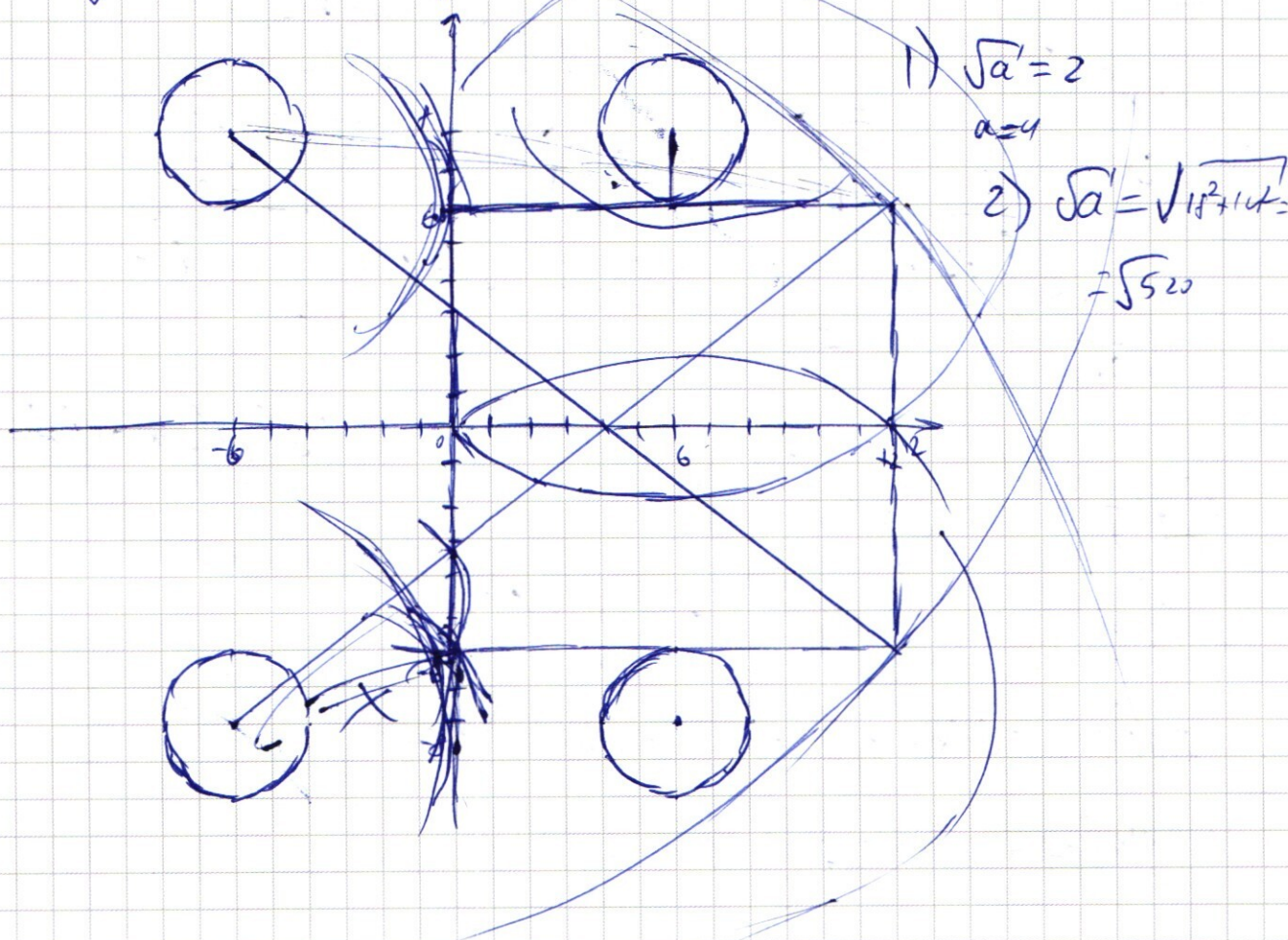
$$(x+6)^2 + (y-8)^2 = a \quad O(-6; 8) \quad R = \sqrt{a}$$

4) $x < 0$
 $y < 0$

$$(x+6)^2 + (y+8)^2 = a \quad O(-6; -8) \quad R = \sqrt{a}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ + 196 \\ \hline 520 \\ - 212 \\ \hline 308 \\ - 130 \\ \hline 178 \end{array}$$

$$2\sqrt{130}$$



1) $\sqrt{a} = 2$

$a = 4$

2) $\sqrt{a} = \sqrt{16 + 144} =$

$= \sqrt{160}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x'}$
 $y < 85 + (3^{x'} - 1)x$

~~$y \geq 3^x + 5 \cdot 3^{x'}$~~
 ~~$y < 85 + (3^{x'} - 1)x$~~

$\max: 3+5+5+5+5+6+6 = 35$
 $85 + (3^{x'} - 1)x < y \leq 3^x + 4 \cdot 3^{x'}$

$85 + 3^{x'}x - x \leq 3^x + 4 \cdot 3^{x'}$
 $0 \leq 85 - 3^x + 3^{x'}(4-x) + x - 85$
 $(3^x - 3^{x'}(4-x) + x - 85)' =$
 $= 3^x \ln 3 + 3^{x'} + 1$
 $f(x) = \frac{-3^{x'} - 1}{\ln 3}$

$y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{x'}$
 $y < 85 + 5 \cdot 3^{x'} - 5$

$\frac{5\pi}{x} = \frac{\pi}{4}$
 $x = \frac{5\pi}{4}$
 $x \approx 20 \frac{\pi}{10}$

$3^x + 4 \cdot 3^{x'} = (85 - x) + x \cdot 3^{x'}$
 $3^x = (85 - x) = 3^{x'}(x - 4)$
 $3^{x'} = 4 = 3^{x'}$

$x = 85$
 $x = 81$

$157 - 4 = 153$
 $153 + 3 \cdot 81 = 153$
 $x = 85$

$3^x + 4 \cdot 3^{x'} = 85 + 3^{x'}x - x$
 $3^x + 3^{x'}(4-x) = 85 - x$
 $3^{85} + 3^{x'} \cdot (-3^4) = 85 - 3^{85}$

$x \in (4, 85)$
 $1) x = 5$

$243 + 4 \cdot 3^{x'} - 15 = 5 \cdot 3^{x'} + 5$

$$3^x \leq y - 3^{81}$$

$$x = \log_3(y - 3^{81})$$

$$x > \frac{y-85}{3^{81}-1}$$

$$y \geq 3^5 + 4 \cdot 3^{81} = 245 + 4 \cdot 3^{81}$$

$$y < 85 + 3^{81} \cdot 5 - 5$$

$$y < 80 + 4 \cdot 3^{81} + 3^{81}$$

$$80 + 4 \cdot 3^{81} + 163 \quad 3^{81} - 163 + 3^{81}$$

$$y \cdot 163 \cdot 3^{81} - 3^x - (85 - x)$$

$$3^{81} - 3^x - 85 + x$$

$$x = 5, 6, 7, \dots, 84$$

$$\sum \text{нар: } x(3^{81} - 3^x - 85 + x)$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

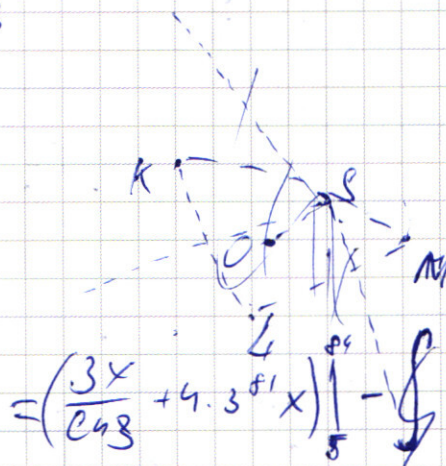
$$2 \cos 2x = \sqrt{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2}$$

$$-2 \leq 2$$

$$\frac{3^x}{\ln 3}$$



$$= \left(\frac{3^x}{\ln 3} + 4 \cdot 3^{81} x \right) \Big|_5^{84} - \int_5^{84} \left(85x + \frac{3^{81} x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{3 \cdot 5}{\ln 3} + 4 \cdot 3^{81} \cdot 5 - \frac{3 \cdot 84}{\ln 3} + 4 \cdot 3^{81} \cdot 84 - \left(85 \cdot 5 + \frac{5 \cdot 85}{2} - \frac{25}{2} - 85 \cdot 84 - \frac{3^{81} \cdot 84^2}{2} + \frac{84^2}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}$$

$$\lg\left(\frac{x^2}{y}\right)^{2\lg y} = \lg((-x)^{\lg(-xy)})$$

$$2\lg y (\lg x - \lg y) = \lg(-xy) (\lg(-x) + \lg y) (\lg(-x))$$

$$4\lg(-x)\lg y - 2\lg^2(y) = \lg^2(-x) + \lg(y)\lg(-x)$$

$$\lg(-x) = a \quad \lg(y) = b$$

$$4ab - 2b^2 = a^2 + ab$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = 2ab - b^2$$

$$(a-b)^2 = b(2a-b)$$

$$-3ab + 2b^2 + a^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 - 2ab + b^2 - ab = 0$$

$$(a-b)^2 + b(a-b) = 0$$

$$(a-b)(a-b+b) = 0$$

$$(a-b)(a-2b) = 0$$

$$1) x = (-y)$$

$$2y^2 + y^2 - y^2 + 4y - 8y = 0$$

$$2y^2 - 2y = 0$$

$$y(y-2) = 0$$

$$2) x = -y^2$$

$$2y^2 + y^3 - y^4 + 4y^2 - 8y = 0$$

$$y^4 - y^3 - 6y^2 + 8y = 0$$

$$y(y^3 - y^2 - 6y + 8) = 0$$

$$y^3 - y^2 - 6y + 8 = 0$$

$$2 \cos 2x = \sqrt{2}$$