

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 16875. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)}, \\ 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения данного трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 4 и 9.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - 6 - y| + |x - 6 + y| = 12, \\ (|x| - 6)^2 + (|y| - 8)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 13 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 10$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 3^x + 4 \cdot 3^{81} \\ y < 85 + (3^{81} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $16875 = 1 \cdot 3^3 \cdot 5^4 = 1^2 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 5^4$ - два варианта

В первом случае количество воз- набора цифр.
можных вариантов равно произведению кол-ва
вариантов положения единицы в числе (8) и
кол-ва способов выбрать 3 из 7-ми позиций
для троек. Это будет $8 \cdot \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 8 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 280$.

Во втором случае есть 8 вариантов расположе-
ния девятки, 7 - тройки и $\frac{6!}{4! \cdot 2!}$ - единичек.

Получается $8 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 = 840$

Всего $840 + 280 = 1120$ вариантов.

Ответ: 1120.

2. $\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\sin 5x + \cos 5x) (\cos 5x - \sin 5x) = 0$

$\Leftrightarrow 2 (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x)) = 0 \quad | :2$

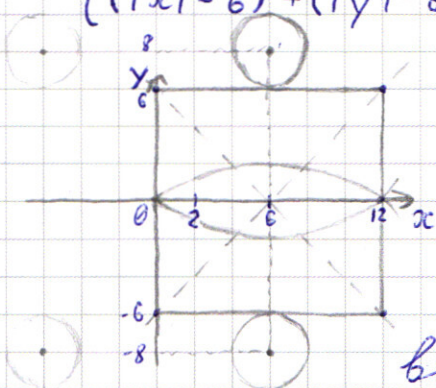
$\Leftrightarrow (\cos 5x - \sin 5x) (\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4})) = 0$

$\Leftrightarrow 2 (\sin 5x - \cos 5x) \cdot \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) \cdot \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \Leftrightarrow \frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8} \in \{\pi k \mid \forall k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{2\pi}{7}k + \frac{\pi}{28} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\} \\ \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8} \in \{\pi k \mid \forall k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{12} \mid \forall k \in \mathbb{Z}\} \\ \operatorname{tg} 5x = 1 \Leftrightarrow 5x \in \{\frac{\pi}{4} + \pi k \mid \forall k \in \mathbb{Z}\} \Leftrightarrow x \in \{\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k \mid \forall k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

Ответ: $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\{\frac{2\pi}{7}k + \frac{\pi}{28}\} \cup \{\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{12}\} \cup \{\frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}k\})$

$$5. \begin{cases} |x-6-y| + |x-6+y| = 12 \\ (|x|-6)^2 + (|y|-8)^2 = a \end{cases}$$



Пунктиром обозначены прямые, значения координат в которых обнуляют один из модулей первого уравнения.

~~Указанные~~ Координаты ~~вершин~~

вершин изображенного на рисунке квадрата подходят в первое уравнение и лежат на пунктирных прямых, значит он и будет мн-вом решений первого уравнения.

Решениями второго ур-я яв-ся точки, лежащие на окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центром, положение которого зависит от четверти, в которой находится точка.

Окружности в левой полуплоскости нас не интересуют, т.к. квадрат лежит в правой.

1) При малых a окр-ти квадрат не пересекут (0 реш.).

2) При $a = 4$ обе окр-ти ~~пересекут~~ коснутся квадрата (2 решения).

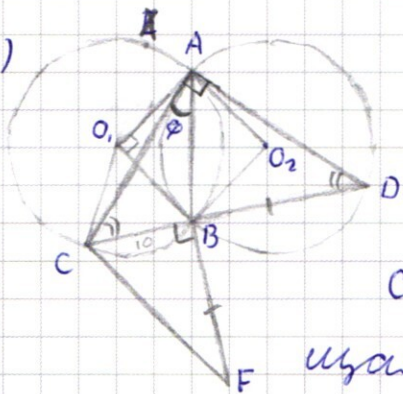
3) Далее при росте a обе окр-ти будут пересекать квадрат ~~в двух разных парах точек~~ в двух разных парах точек, пока при $a = 100$ не пересекут его в одних и тех же точках.

4) Далее решений будет больше двух до тех пор, пока окружности не выйдут за пределы квадрата.

Ответ: $\{4; 100\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. а)



$\angle ACB$ и $\angle ADB$ опираются на ~~хорду~~
хорду AB в равных окр-ях $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow CA = AD \Rightarrow$ дуга

с центром O_1 , содержа-

щая т-ку B = дуге AD окр-ти, не

содержащей точку B ($\cup A\bar{B}D$).

$$\angle CAD = \frac{\cup CB + \cup BD}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\cup BD = 2\pi - \cup AB - \cup A\bar{B}D =$$

$$= 2\pi - \cup AB - \cup CBA = 2\pi - \cup CB - 2\cup AB$$

$$\angle CAD = \frac{\cup CB + 2\pi - \cup CB - 2\cup AB}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cup AB = \frac{\pi}{2} = \angle AOB$$

$$AB = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 13\sqrt{2}$$

$$\angle ACB = \frac{\pi}{2} : 2 = \frac{\pi}{4} \text{ (оп-ся на дугу)}$$

$$CB = \sin \varphi \cdot \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{13\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{2}} \sin \varphi = 26 \sin \varphi$$

$$CA = 26 \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \text{ из } \triangle CBA \quad AD = CA \text{ (для пункта б)}$$

$$BD = 26 \cos \varphi \text{ из } \triangle BAD$$

$$BF = BD$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{26^2 \sin^2 \varphi + 26^2 \cos^2 \varphi} = \sqrt{26^2} = 26$$

Ответ: 26

$$\text{б) } CB = 26 \sin \varphi = 10 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{5}{13} \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin \angle BCF = \frac{BF}{CF} = \frac{26 \cos \varphi}{26} = \frac{12}{13} \Rightarrow \angle BCF = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$\angle CAE = \frac{\cup EA}{2} = \frac{2\angle CBA - \pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \varphi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \varphi$$

$$\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{3\pi}{4} - \varphi$$

$$\sin \angle ACF = \sin \left(\frac{3\sqrt{13}}{4} - \varphi \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{17}{26} \sqrt{2}$$

$$S_{\Delta ACF} = \frac{AC \cdot CF}{2} \cdot \sin \angle ACF = \frac{17\sqrt{2} \cdot 26}{2} \cdot \frac{17}{26} \sqrt{2} = 289$$

$$* AC = 26 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) = 26 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \right) = 17\sqrt{2}$$

Ответ: 289.

$$3. \begin{cases} \left(\frac{x^y}{y^x} \right)^{\lg y} = (-x)^{\lg(-xy)} \\ (2y+x)(y-x-4) = 0 \end{cases}$$

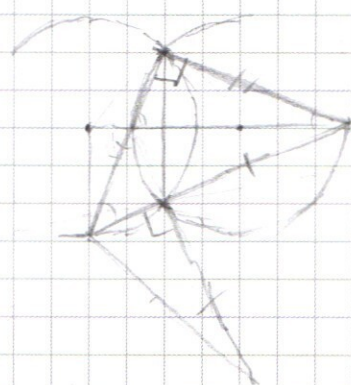
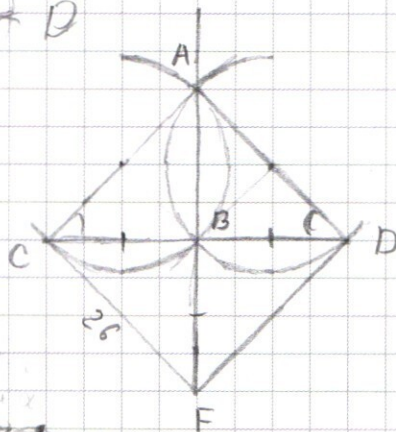
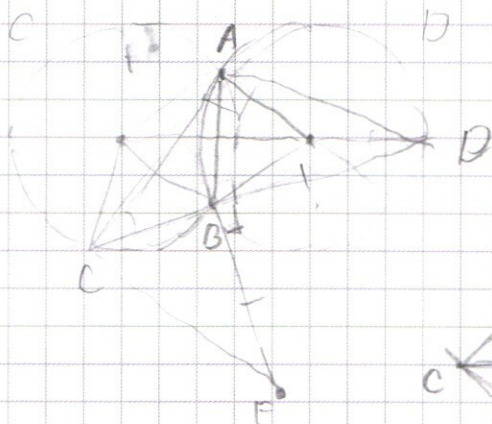
о.г. з.: $y > 0; x < 0$

$$x = -2y \quad \vee \quad x = y - 4$$

...

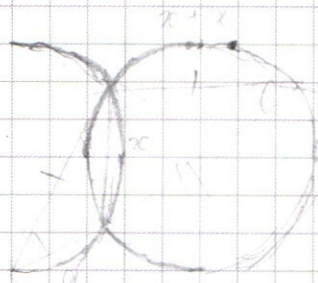
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$$100 + 49 + 190$$

$$289$$



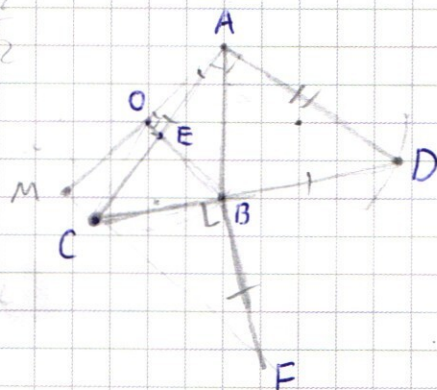
$$\frac{\sqrt{2}}{26} \cdot 17$$

$$\angle O, CF =$$

$$\angle O, CA = \frac{2\angle CBA - \pi}{2} = \frac{3\pi}{4} - \varphi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \varphi$$

$$AC = 26 \cdot \left(\sin \varphi \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \right) = 13\sqrt{2} \left(\frac{17}{13} \right) = 17\sqrt{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$



$$\frac{19}{35}$$

$$CA = \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sqrt{2} \cdot 26$$

$$BD = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cdot 26 = \cos \varphi \cdot 26$$

$$\sin \angle BCF = \frac{26 \cos \varphi}{26} = \frac{12}{13}$$

$$\cos \angle BCF = \frac{5}{13}$$

$$\sin \varphi = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \left(\frac{12}{13} \right)$$

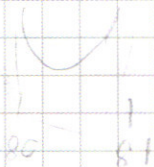
$$85 + (3^{81} - 1)x > 3^x + 4 \cdot 3^{81}$$

$$4 \cdot 3^{81} - 85 + 3^x + (1 - 3^{81})x < 0$$

$$\ln 3 \cdot 3^x + 1 - 3^{81} < 0$$

$$\ln 3 \cdot 3^x < 3^{81} - 1$$

$$3^{81} = 3 \cdot 9^{40} < 3 \cdot 10^{40}$$



$$x = 80: 12 \cdot 3^{80} + 3^{80} - 85 + 80 - 80 \cdot 3 \cdot 3^{80}$$

$$x = 50:$$

$$(2y + x + a)(y - x + b)$$

$$\begin{cases} a + 2b = -8 \\ -a + b = -4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3b = -12 \\ a = b + 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} b = -4 \\ 0 \end{matrix}$$

$$(2y + x)(y - x - 4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$16875 = 5 \cdot 3375 = 5^2 \cdot 675 = 5^4 \cdot 3^3$$

$$1 \cdot 33 \cdot 45$$

$$8 \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 5 = 280$$

без двоек

$$8 \cdot 7 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 56 \cdot 3 \cdot 5 = 168 \cdot 5 = 840$$

с двойками

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 5x - \sin^2 5x) = 2 \sin 5x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} (\sin 5x + \cos 5x) (\sin 5x - \cos 5x) = 0$$

$$2 (\cos 5x - \sin 5x) (2 \cos 2x - (\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x)) = 0$$

$$\cos 2x - \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cos 2x (s+c) (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2(s-c) \sin 2x \cos 2x =$$

$$- 2 \sin(\frac{7}{2}x - \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{8})$$

$$\frac{3}{2}x \in \left\{ \pi k + \frac{\pi}{8} \right\} \quad x \in \left\{ \frac{2\pi k}{3} + \frac{\pi}{24} \right\}$$

$$x \in \left\{ \frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{3 \cdot 4} \right\}$$

$$3. \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{x^4}{y^2}\right)^{\lg y} &= (-x)^{\lg(-xy)} \end{aligned} \right.$$

o.g.z.: $xy < 0$

$y > 0 \quad x < 0$

$$\left\{ \begin{aligned} 2y^2 - xy - x^2 - 4x - 8y &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\frac{(-x)^{3 \lg y}}{y^{2 \lg y}} = (-x)^{\lg(-xy)} \cdot \frac{1}{y^{\lg y}}$$

$$xy - x - y + 1$$

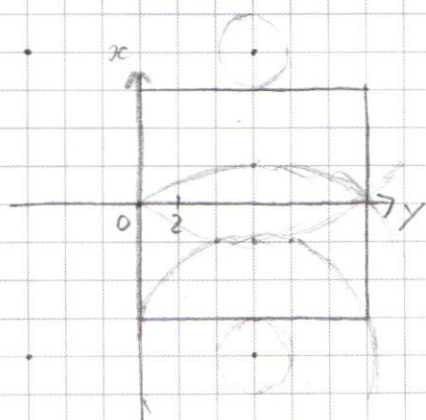
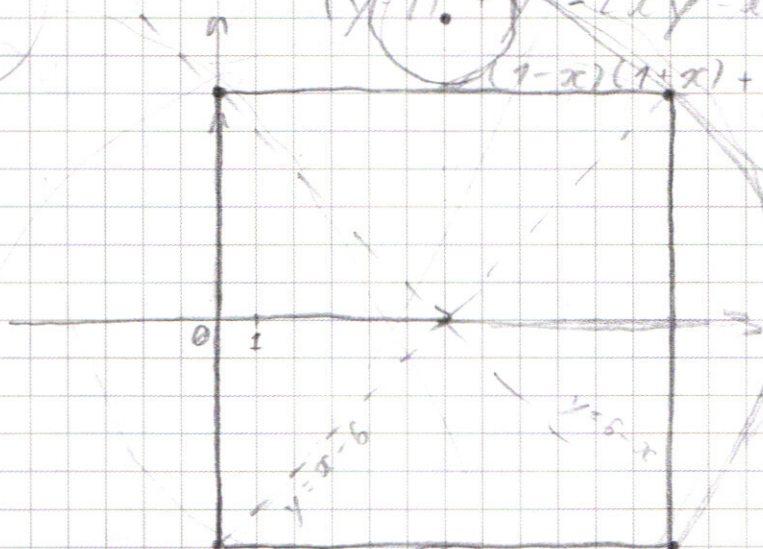
$$(y-1)(x-1) + 2y^2 - 2xy - x^2 - 3x - 7y - 1$$

$$(y-1)^2 + y^2 - 2xy - x^2 - 3x - 5y - 2$$

$$(1-x)(1+x) + y^2 - 2xy - 3x - 5y - 3$$

5.

$a > 0$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

